Notiz über die Abbildung einer stetigen linearen
Mannigfaltigkeit auf eine unstetige.

Von

AXEL HARNACK in Dresden.

Kann eine stetige lineare Mannigfaltigkeit auf eine in jedem kleinsten Theile unstetige derart umkehrbar eindeutig bezogen werden, dass zweien Elementen der letzteren a_1, a_2 , welche eine Folge bilden $a_1 < a_2$, immer zwei Elemente der stetigen Mannigfaltigkeit a'_1, a'_2 entsprechen, für welche auch $a'_1 < a'_2$ ist? Es scheint mir bemerkenswerth, dass dieser Satz zu bejahen ist, dass er aber zwei wesentlichen Einschränkungen unterliegt, die beim ersten Anblick den Satz aufzuheben scheinen: Die discontinuirliche Mannigfaltigkeit darf keine isolirten Punkte enthalten und sie darf in keinem noch so kleinen Intervalle überall dicht sein, vorausgesetzt, dass sie dort nicht stetig ist. Das erstere ist unmittelbar einleuchtend. Denn sind die beiden Punkte a_1, a_2 isolirt, d. h. enthalten sie kein weiteres Element der Mannigfaltigkeit zwischen sich, so entsprächen ihnen zwei getrennte Punkte a'_1, a'_2 der stetigen Mannigfaltigkeit, und allen Punkten zwischen a'_1 und a'_2 könnte kein anderer Punkt mehr zugeordnet werden. Von der Nothwendigkeit der zweiten Forderung überzeugt man sich zunächst auf Grund der allgemeinen Sätze über stetige Functionen. Angenommen es liesse sich eine Function $y = f(x)$ bilden, welche, während x ein stetiges Intervall durchläuft, discontinuirliche Werthe annimmt, die überall dicht in einem Intervalle gelegen sind, (etwa bloss alle rationalen Werthe), und die dabei der Forderung genügen, dass für $x_1 < x_2$ auch $f(x_1) < f(x_2)$ ist, so müsste diese Function $f(x)$ auch die Eigenschaft haben, dass zu jeder noch so kleinen Zahl δ eine obere Grenze für h gefunden werden könnte, so dass

$$\text{abs } [f(x \pm h) - f(x)] < \delta$$

wird. Die Function $f(x)$ würde also unter die übliche Definition der Stetigkeit fallen, während sie doch nicht, dem aus derselben abgeleiteten Lehrsatz gemäss, sämtliche Werthe zwischen zwei vorhandenen annimmt.

In der That kann man die zweite Forderung direct beweisen. Es seien die Werthe der Function $f(x)$ in jedem kleinsten Theile eines Intervalles überall dicht, jedoch discontinuirlich. Man fixire einen Werth A innerhalb dieses Intervalles, der von der Function $f(x)$ nicht angenommen wird, und definire eine unendliche Reihe von Werthen der Function

$$f_1 < f_2 < \dots < f_n < \dots,$$

welche nach A convergirt. Diesen Werthen entsprechen die Punkte $x_1 < x_2 < \dots < x_n < \dots$ der stetigen Mannigfaltigkeit, die ebenfalls einen Grenzwert X definiren. Der Stelle X kann nun nicht der Werth A entsprechen, da A von der Function f übersprungen wird. Es kann ihr auch nicht ein Werth kleiner als A entsprechen, da sonst die Aufeinanderfolge der Functionswerthe f und der Argumente x gestört wird. Mithin gehört zu X ein Werth $A + \delta$, und keiner der Werthe zwischen A und $A + \delta$ kann von der Function $f(x)$ angenommen werden, da das zugehörige x weder grösser noch kleiner als X sein kann. Die Function $f(x)$ ist also nicht überall dicht in dem Intervalle.

Es erübrigt noch zu zeigen, dass man trotz dieser Einschränkungen die Abbildung eines Discontinuums auf ein Continuum mit Wahrung der Aufeinanderfolge entsprechender Elemente ausführen kann. Discontinuirliche Punktmengen, mit denen das möglich ist, sind Mengen ohne Isolationen, die in keinem Intervalle überall dicht sind. Wie man solche Mengen construiren kann, habe ich an einem Beispiele (Annalen, Bd. XIX, pag. 239) gezeigt; ein ähnliches hat Herr Cantor (Bd. XXI, pag. 590) gegeben.

Es giebt bekanntlich stetige Functionen, die in jedem kleinsten Intervalle oscilliren. Die von Herrn Weierstrass gebildete Function (Mittheilung an Herrn du Bois-Reymond, Journal Bd. 79, pag. 29) welche Herr Wiener geometrisch discutirt hat (Bd. 90, pag. 221), gehört zu denselben. Für solche Functionen kann das Vorzeichen des Differenzenquotienten $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ in keinem noch so kleinen Intervalle schliesslich überall positiv, oder schliesslich überall negativ werden; denn die Function würde alsdann in diesem kleinen Intervalle nur wachsen, oder auch nur abnehmen; vielmehr bilden die Stellen, an denen das Vorzeichen von $\lim_{\Delta x} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ positiv ist, (einschliesslich von $+0$) sicherlich in jedem Intervalle ein Discon-

tinuum. (Vergleiche den vorhergehenden Aufsatz § 2). An irgend einer Stelle x sei ein endlicher Werth Δx so fixirt, dass

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \eta > 0.$$

Convergirt Δx nach 0, so convergirt auch η stetig nach 0, und zwar, da die Function eine oscillirende ist, derart, dass es bald wächst, bald abnimmt. Man kann Δx so fixiren, dass der Werth η im Innern nicht mehr erreicht wird, und ebenso x derart wählen, dass der Werth 0 im Innern nicht vorkommt. Es geht also η stetig mit Oscillationen in den Werth 0 über. Bedeutet nun ε einen Werth $< \eta$, und $x + \Delta'x$ die Stelle, an welcher zum *erstenmale* $f(x + \Delta'x) - f(x) = \varepsilon$ wird, so ist

$$f(x + \Delta x) - f(x + \Delta'x) = \eta - \varepsilon > 0.$$

Die Stelle $x + \Delta'x$ hat jedenfalls die Eigenschaft, dass der Differenzenquotient daselbst positiv ist; denn convergirt Δx stetig nach $\Delta'x$, so ist diese Differenz, indem sie nach 0 convergirt, nur positiv. Alle Stellen, an denen der Werth ε zum erstenmale erreicht wird, sind, wenn ε alle Werthe von η bis 0 durchläuft, eindeutig bezogen auf das Continuum η bis 0. Aber alle diese Stellen gehören zu denjenigen, an denen der Differenzenquotient positiv wird, und bilden daher sicherlich in keinem noch so kleinen Intervalle ein Continuum. Die Abbildung hat zudem die verlangte Eigenschaft, dass die Aufeinanderfolge entsprechender Elemente in beiden Mannigfaltigkeiten die gleiche ist.

Die charakteristischen Eigenschaften der Weierstrass'schen Function stehen, soweit ich es übersehe, immer in Zusammenhange mit discontinuirlichen Punktmengen ohne Isolationen, die aber auch überall dicht in einem Intervalle gelegen sein können. Will man den Begriff des Unendlichkleinen, seiner Entstehung gemäss, nur bei stetigen Mannigfaltigkeiten beibehalten, so werden durch Punktmengen ohne Isolationen räumliche Trennungen innerhalb des Unbegrenzt- oder Unmessbar-kleinen definirt.*)

Dresden, im August 1883.

*) Der vorstehende Satz über Abbildung eines Discontinuuums auf ein Continuum ist aus der Erkenntniss hervorgegangen, dass es stetige, nicht constante Functionen giebt, für welche der erste Differentialquotient an allen Punkten Null ist, mit Ausnahme von solchen, die nur ein discretes System ohne Isolationen bilden, und an denen der Differentialquotient unendlich ist. Wenn solch eine Function, während x von a bis b wächst, das Intervall von $f(a)$ bis $f(b)$ durchaus wachsend (monoton) durchläuft, so sind alle Werthe dieses stetigen Intervalles eindeutig, und zwar in der geforderten Weise, auf ein Discontinuum abgebildet,

sobald man jedem Functionswerthe $f(x)$ das Argument x desjenigen Punktes zuordnet, bei welchem zum ersten Male der Werth $f(x)$ erreicht ist. In dem zweiten Theile meiner Untersuchungen über Differentialquotienten werde ich etwas ausführlicher auf diese Functionen eingehen, da durch dieselben, was mir früher entgangen war, und was durch diese Note vorbereitet werden soll, der Fundamentalsatz der Integralrechnung eine Einschränkung erleidet, wenn man ihn auf den Fall ausdehnen will, dass die zu integrirende Function in allgemeinster Weise Unendlichkeitsstellen besitzt. Inzwischen habe ich auch von Herrn G. Cantor brieflich erfahren, dass er auf dieselben bemerkenswerthen Functionen geführt worden ist.

December 1883.