CONTRIBUTO ALLA TEORIA DEI PRODOTTI INFINITI E DELLE SERIE A TERMINI POSITIVI.

Nota di **Ettore Bortolotti**, in Modena.

Adunanza del 13 marzo 1904.

Mi propongo, con questo breve lavoro, di cercare delle relazioni fra il comportamento assintotico della variabile $\varphi_n = \prod_{r=1}^n (1 + a_r)$ e la legge di formazione della variabile reale a_n , quando n tenda all'infinito.

Porrò prima in riscontro le variabili φ_n , ed $e^{\sum_{r=1}^n a_r}$, ricavandone, per la φ_n , le condizioni di convergenza assoluta e condizionata, e, nel caso della convergenza, un metodo per il calcolo approssimato, nel caso della divergenza, un criterio per determinarne la rapidità di crescita.

In secondo luogo, ponendo $a'_n + a''_n = a_n$, cercherò di far dipendere la determinazione del comportamento assintotico, od il calcolo numerico nel caso della convergenza, della variabile $\varphi_n = \prod_{r=1}^n (1 + a_r)$, da quello delle variabili $\psi'_n = \prod_{r=1}^n (1 + a'_r)$, $\psi''_n = \prod_{r=1}^n (1 + a''_r)$.

Sarà agevole di qui passare al caso in cui si abbia $a_n = \alpha b_n$, e stabilire analoghe relazioni fra le variabili $\varphi_n = \prod_{r=1}^n (1 + a_r)$, $\psi_n = \prod_{r=1}^n (1 + b_r)$.

In particolare si vedrà che, nel caso della divergenza, se l'ordine di infinito (di infinitesimo) della variabile ψ_n si assume come unità, e se α è una costante positiva, l'ordine della φ_n è espresso dal simbolo (α) .

Più generalmente, se a_n, c_n sono variabili reali, soddisfacenti le con-

dizioni: α) le a_n sono tutte dello stesso segno, β) i binomi $1 + a_n$ $1 + a_n c_n$ sono tutti positivi, e se β_1 , β_2 sono i limiti inferiore e superiore di indeterminazione della espressione $\frac{\lg(1 + a_n c_n)}{\lg(1 + a_n)}$, la variabile $\prod_1^n (1 + a_n c_n)$ non è infinita (infinitesima) di ordine inferiore a quello della variabile $\left[\prod_1^n (1 + a_r) \right]^{\beta_1 - \varepsilon}$, nè di ordine superiore a quello della variabile $\left[\prod_1^n (1 + a_r) \right]^{\beta_1 + \varepsilon}$, ε positivo qualunque.

In particolare, se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \beta$, si ha $\beta_1 = \beta_2 = \beta$, e cioè, l'ordine di infinito della $\prod_1^n (1 + a_r c_r)$, secondo il concetto di CAUCHY, è eguale a quello della variabile $\left[\prod_1^n (1 + a_r) \right]^\beta$.

Riprendendo alcune ricerche precedenti, mi studierò in fine di mettere in relazione le variabili

$$\varphi_n = \prod_{r=1}^n [1 + a(x_0 + n)], \quad f(n) = e^{\int_{\lambda_0}^{\lambda_0 + n} a(x) dx},$$

estendendo così ai prodotti infiniti un metodo che fu dato dal CAUCHY per le serie a termini positivi.

Di cotesta quistione, per altro, non darò che un rapido cenno, riservando ad un prossimo studio una più ampia trattazione.

Ho voluto nel § I, insieme con alcuni risultamenti che ritengo nuovi, stabilire le principali proposizioni che servono di fondamento alla teoria dei prodotti infiniti, perchè il metodo che ho seguito porta a dimostrarle, quasi senza sviluppi di calcolo, nel modo che parmi più semplice e naturale *).

*) Non richiedo a chi legge che le prime nozioni sui limiti e sulle serie, quali si insegnano nel corso di Algebra ai nostri studenti di primo anno e si trovano, per fissare le idee, nell'*Analisi Algebrica* del CESÀRO.

Il PRINGSHEIM in una dotta memoria del vol. XXXIII dei «*Mathematische Annalen*» stabilisce i fondamenti sulla convergenza dei prodotti infiniti con metodo certo rigoroso, e, dal suo punto di vista, elementare; ma lungo, difficile, laboriosissimo. Egh trova necessario quel metodo, per evitare la considerazione di trascendenti logaritmiche, usate dal DINI nella sua classica memoria «*Sui prodotti infiniti*» (*Annali di Matematica*, serie II, t. 2, 1870). Credo che il § I della presente pubblicazione, dove mi sono studiato

Delle *serie a termini positivi*, tratto incidentalmente, nel § II, per mostrare come il metodo che uso per lo studio dei prodotti infiniti, possa giovare anche per quello delle serie, e conduca rapidamente ai criterî, detti logaritmici, di convergenza, ed a criterî che in taluni casi servono per determinare l'ordine di infinito di serie divergenti. Nel § III, e nel IV, poi, studio il comportamento assintotico della serie a termini positivi $\sum [a_n - \lg(1 + a_n)]$, dove a_n è una variabile reale infinitesima per $n = \infty$.

Questa serie, per $a_n = \frac{1}{n}$, ha per somma la costante di EULERO ed è in ogni caso strettamente legata con le variabili

$$\varphi_n = \prod_{r=1}^n (1 + a_r), \quad A_n = \sum_{r=1}^n a_r.$$

§ I.

1. Sia a_r una variabile positiva; si indichi con A_n la somma dei primi termini della serie

$$(1) \quad \sum_1^\infty a_r = a_1 + a_2 + \dots$$

e con φ_n il prodotto dei primi n fattori nel prodotto infinito:

$$(2) \quad \prod_1^\infty (1 + a_r) = (1 + a_1)(1 + a_2) \dots$$

Le variabili A_n , φ_n sono entrambe sempre crescenti; se una almeno di esse è infinita per $n = \infty$, potremo scrivere *):

$$(3) \quad \lim_{n=\infty} \frac{A_n}{\lg \varphi_n} = \lim_{n=\infty} \frac{A_n - A_{n-1}}{\lg \varphi_n - \lg \varphi_{n-1}},$$

quando esista il secondo membro.

Ma si ha

$$(4) \quad \lim_{n=\infty} \frac{A_n - A_{n-1}}{\lg \varphi_n - \lg \varphi_{n-1}} = \lim_{n=\infty} \frac{1}{\lg(1 + a_n)^{\frac{1}{a_n}}};$$

di imitare la scioltezza e la eleganza dei metodi del DINI e del CAUCHY, evitando considerazioni di ordine trascendentale, non sarà trovato dai nostri scolari meno elementare di quello del PRINGSHEIM.

*) Cfr. CESÀRO, *Analisi Algebrica*, pag 98.

dunque, quando sia determinato il limite della espressione $\lg(1 + a_n)^{\frac{1}{a_n}}$, avremo:

$$(5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{\lg \varphi_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lg(1 + a_n)^{\frac{1}{a_n}}};$$

ed, in ogni caso, usando il simbolo $\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$ per indicare il limite inferiore di indeterminazione della variabile f_n , si avrà *):

$$(6) \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{\lg \varphi_n} \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lg(1 + a_n)^{\frac{1}{a_n}}}.$$

2. Supponiamo ora che sia

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Per ogni valore finito di n avremo $(1 + a_n)^{\frac{1}{a_n}} < e$, ed al limite, per $n = \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a_n)^{\frac{1}{a_n}} = e$ **).

D'onde si deduce:

$$(7) \quad \frac{A_n}{\lg \varphi_n} = 1 + \varepsilon_n, \quad \varepsilon_n > 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$$

ed anche:

$$(8) \quad \frac{e^{A_n}}{\varphi_n} = \varphi_n^{\varepsilon_n}, \quad \varepsilon_n > 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0.$$

3. Le variabili sempre crescenti A_n , φ_n sono determinate per $n = \infty$.

Se non è $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, divergono entrambe, se è $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ possono convergere. La formula (8) però, dimostra che esse sono sempre insieme divergenti: d'onde il noto teorema:

Condizione necessaria e sufficiente per la convergenza del prodotto infinito $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ è che converga la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

4. Le variabili A_n , φ_n sieno convergenti. Posto

$$(9) \quad \alpha_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots \quad Q_n = (1 + a_{n+1})(1 + a_{n+2}) \dots,$$

*) Cfr. O. STOLZ, Mathematische Annalen, Bd. XXXIII, pag. 243.

**) CESÀRO, loc. cit., pag. 110.

avremo *)

$$(10) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{\lg Q_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n - \alpha_{n+1}}{\lg Q_n - \lg Q_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{\lg(1 + a_{n+1})} = 1.$$

Scriveremo perciò

$$(11) \alpha_n = \lg Q_n^{1+\varepsilon_n}, \quad \frac{e^{\alpha_n}}{Q_n} = Q_n^{\varepsilon_n}, \quad \varepsilon_n > 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$$

ed anche

$$(12) \quad e^{\sum_{r=n}^{\infty} a_r} > \prod_{r=n}^{\infty} (1 + a_r), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\sum_{r=n}^{\infty} a_r}}{\prod_{r=n}^{\infty} (1 + a_r)} = 1.$$

La variabile $\prod_1^n (1 + a_r)$ ha dunque la stessa rapidità di tendenza al limite della variabile $e^{\sum_1^n a_r}$.

Calcolando direttamente il prodotto dei primi n fattori, avremo un limite superiore dell'errore commesso trascurando gli altri, se calcoleremo

la espressione $e^{\sum_1^n a_r}$, od una espressione approssimata in eccesso di questa.

5. Nel caso della *divergenza*, le formule (7) ci assicurano che la serie $\sum_1^{\infty} a_r$ ha lo stesso ordine di infinito e la stessa parte principale del logaritmo del prodotto infinito $\prod_1^{\infty} (1 + a_r)$.

Dalle formule (8) poi ricaviamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{A_n}}{\Phi_n} \geq 1,$$

cioè l'ordine di infinito del prodotto $\prod_1^{\infty} (1 + a_r)$ è minore od eguale a

quello della espressione $e^{\sum_1^{\infty} a_r}$.

Al § III vedremo in quali casi cotesti ordini sieno eguali.

*) Ibidem, pag. 99.

6. Indicando con b_n una variabile positiva infinitesima per $n = \infty$, e con B_n la somma $B_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$, poniamo:

$$\psi_n = (1 - b_1)(1 - b_2) \dots (1 - b_n).$$

Le variabili B_n , ψ_n , sono entrambe monotone; nel caso che la prima sia infinita, o che la seconda sia infinitesima, potremo scrivere:

$$\lim_{n=\infty} \frac{B_n}{\lg \psi_n} = \lim_{n=\infty} \frac{B_n - B_{n-1}}{\lg \psi_n - \lg \psi_{n-1}} = \lim_{n=\infty} \frac{1}{\lg (1 - b_n)^{\frac{1}{b_n}}} = -1.$$

Se con σ_n indichiamo una variabile positiva infinitesima per $n = \infty$, avremo perciò

$$(14) \quad \frac{B_n}{\lg \psi_n} = 1 - \sigma_n, \quad \frac{e^{-B_n}}{\psi_n} = \psi_n^{-\sigma_n}, \quad \sigma_n > 0, \quad \lim_{n=\infty} \sigma_n = 0.$$

Ricordando che per le variabili monotone B_n , ψ_n , esiste sempre limite determinato, ricaveremo di qui la proposizione:

Condizione necessaria e sufficiente perchè il prodotto infinito $\prod_1^\infty (1 - b_n)$ converga verso un limite diverso dallo zero, è la convergenza della serie $\sum_1^\infty b_n$.

Inoltre potremo affermare che:

Se la serie $\sum_1^\infty b_n$ diverge, il prodotto infinito $\prod_1^\infty (1 - b_n)$ è infinitesimo di ordine maggiore od eguale a quello della espressione $e^{-\sum_1^\infty b_n}$.

7. Sia c_n una variabile reale infinitesima per $n = \infty$.

Consideriamo il prodotto infinito $\prod_1^\infty (1 + c_n)$.

Se nella serie $\sum_1^\infty c_n$ distinguiamo coi simboli $a_1, a_2, a_3, \dots, a_m, \dots$, $b_1, b_2, b_3, \dots, b_m, \dots$ i termini positivi ed i valori assoluti dei termini negativi rispettivamente, potremo distinguere i tre seguenti casi *):

- I. Le serie $\sum a_m$, $\sum b_m$, convergono entrambe.
- II. » » » » divergono entrambe.
- III. » » » » sono l'una convergente, l'altra divergente.

*) Cfr. DINI, *Sui prodotti infiniti*, Annali di Matematica, serie II, tomo II, pag. 31.

D). Se le serie $\sum a_n$, $\sum b_n$ convergono entrambe, sono convergenti anche i prodotti infiniti $\prod (1 + a_n)$, $\prod (1 - b_n)$ e la serie $\sum c_n$ converge assolutamente.

Se indichiamo con $c'_1, c'_2, c'_3, \dots$ una particolare permutazione dei termini della $\sum c_n$, ad ogni coppia di numeri positivi ε, r faremo corrispondere un numero n_0 tale che le somme

$$a'_{n_1} + a'_{n_1+1} + \dots + a'_{n_1+r_1}, \quad b'_{n_2} + b'_{n_2+1} + \dots + b'_{n_2+r_2}$$

dei termini positivi e dei valori assoluti dei termini negativi contenuti nella somma:

$$c'_n + c'_{n+1} + \dots + c'_{n+r}, \quad n \geq n_0,$$

sieno entrambe minori di ε .

Ma si ha:

$$\lim_{n_1 \rightarrow \infty} \frac{e^{\sum_{s=n_1}^{n_1+r_1} a'_s}}{\prod_{s=n_1}^{n_1+r_1} (1 + a'_s)} = 1, \quad \lim_{n_2 \rightarrow \infty} \frac{e^{-\sum_{s=n_2}^{n_2+r_2} b'_s}}{\prod_{s=n_2}^{n_2+r_2} (1 - b'_s)} = 1;$$

faremo dunque corrispondere al numero ε un numero N maggiore di n_0 e tale che

$$1 < \frac{e^{\sum_{s=n_1}^{n_1+r_1} a'_s}}{\prod_{s=n_1}^{n_1+r_1} (1 + a'_s)} < 1 + \varepsilon, \quad 1 < \frac{e^{-\sum_{s=n_2}^{n_2+r_2} b'_s}}{\prod_{s=n_2}^{n_2+r_2} (1 - b'_s)} < 1 + \varepsilon, \quad n_1, n_2 > N;$$

cioè:

$$\frac{1}{1 + \varepsilon} < \prod_{s=n_1}^{n_1+r_1} (1 + a'_s) < e^\varepsilon, \quad \frac{e^{-\varepsilon}}{1 + \varepsilon} < \prod_{s=n_2}^{n_2+r_2} (1 - b'_s) < 1;$$

finalmente:

$$\frac{e^{-\varepsilon}}{(1 + \varepsilon)^2} < \prod_{s=n}^{n+r} (1 + c'_s) < e^\varepsilon, \quad n > N,$$

e ciò dimostra la convergenza del prodotto $\prod_1^\infty (1 + c'_n)$ *), cioè la convergenza assoluta del prodotto $\prod_1^\infty (1 + c_n)$.

*) Cfr. p. es. PRINGSHEIM, Mathematische Annalen, XXXIII, pp. 127, 128.

II. Le serie $\sum a_n$, $\sum b_n$ divergono entrambe. Cangiando l'ordine dei termini nelle serie $\sum c_n$ in tutti i modi possibili, questa serie verrà a prendere tutti i valori da $+\infty$ a $-\infty$, e ciascuno un numero infinito di volte; e per dati cangiamenti dello stesso ordine diverrà anche indeterminata.

Ordiniamo i termini c_n in modo che la somma $c'_1 + c'_2 + \dots + c'_n$, per n abbastanza grande, superi qualunque numero positivo M .

Conservando le notazioni usate nel caso precedente, avremo

$$\sum_{s=1}^{n_1} a'_s - \sum_{s=1}^{n_2} b'_s > M, \quad n \geq n_0.$$

Dunque

$$n \geq n_0, \quad \frac{\sum_{s=1}^{n_1} a'_s}{\sum_{s=1}^{n_2} b'_s} > 1 + \frac{M}{\sum_{s=1}^{n_2} b'_s}$$

e potremo supporre le c'_n ordinate in modo che il quoziente $\frac{M}{\sum_{s=1}^{n_2} b'_s}$ abbia

limite superiore di indeterminazione maggiore di zero.

Da ciò, e dalle relazioni

$$\lim_{n_1 \rightarrow \infty} \frac{\sum_{s=1}^{n_1} a'_s}{\lg \prod_{i=1}^{n_1} (1 + a'_i)} = 1, \quad \lim_{n_2 \rightarrow \infty} \frac{-\sum_{s=1}^{n_2} b'_s}{\lg \prod_{i=1}^{n_2} (1 - b'_i)} = 1$$

[formule (7), (14)], dedurremo immediatamente:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^{n_1} a'_i - \sum_{i=1}^{n_2} b'_i}{\lg \prod_{i=1}^{n_1} (1 + a'_i) + \lg \prod_{i=1}^{n_2} (1 - b'_i)} = 1,$$

cioè

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{s=1}^n c'_s}{\lg \prod_{i=1}^n (1 + c'_i)} = 1$$

e ciò prova che, nell'ordine indicato, il prodotto $\prod_{i=1}^{\infty} (1 + c'_i)$ diverge verso $+\infty$.

La medesima dimostrazione, quando la serie $\sum c_n$ sia ordinata in modo che la somma $c'_1 + c'_2 + \dots + c'_n$ si mantenga inferiore di qualunque numero negativo $-M$, serve a provare che il prodotto infinito $\prod_1^\infty (1 + c'_n)$ corrispondente tende al limite zero.

III. Le serie $\sum a_n$, $\sum b_n$, sieno l'una convergente, l'altra divergente.

La serie $\sum c_n$ in tal caso diverge assolutamente: con ragionamento poco diverso dal precedente, proveremo che il prodotto $\prod_1^\infty (1 + c_n)$ diverge assolutamente; e cioè: verso $+\infty$ se la serie $\sum a_n$ diverge, verso lo zero se diverge la serie $\sum b_n$ *).

8. Da tutto quanto abbiamo detto si ricava: *Condizione necessaria e sufficiente per la convergenza assoluta del prodotto infinito $\prod_1^\infty (1 + c_n)$ è la convergenza assoluta della serie $\sum_1^\infty c_n$ **).*

La condizione necessaria e sufficiente per la convergenza assoluta di una serie $\sum c_n$ consiste però, come è noto, nella convergenza della serie dei valori assoluti: $\sum |c_n|$, ed è questa anche condizione necessaria e sufficiente per la convergenza del prodotto infinito $\prod_1^\infty [1 + |c_n|]$; concludiamo dunque:

Condizione necessaria e sufficiente per la convergenza assoluta del prodotto infinito $\prod_1^\infty (1 + c_n)$, è la convergenza del prodotto:

*) Non mi dilungo in molti particolari trattandosi di cose note. Il DINI, nella memoria citata, dimostra di più che *alterando l'ordine dei fattori si può far prendere al prodotto infinito qualunque valore e anche ridurlo indeterminato.*

Nel § III, studierò la convergenza condizionata, considerando così il problema da un punto di vista più generale.

**) È quasi superfluo avvertire che la *convergenza di un prodotto infinito* si intende al modo indicato dal DINI ed esplicitamente definito dal PRINGSHEIM, cioè si fa dipendere dalla esistenza del limite *finito e diverso dallo zero* per la successione

$$P_n = (1 + c_1)(1 + c_2) \dots (1 + c_n), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\prod_1^{\infty} (1 + |c_n|),$$

formato coi valori assoluti $|c_n|$ delle variabili c_n .

§ II.

9. Le presenti ricerche hanno principalmente in vista la teoria dei prodotti infiniti; ma i teoremi ora dimostrati ed il metodo seguito possono utilmente servire anche allo studio delle serie a termini positivi.

Servano d'esempio le proposizioni seguenti:

I. Se la variabile φ_n tende all'infinito sempre crescendo e soddisfa la condizione

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi_{n+1}}{\varphi_n} = 1,$$

le due serie:

$$(15) \quad \sum_1^{\infty} a_n = \sum_1^{\infty} \frac{\varphi_{n+1} - \varphi_n}{\varphi_n}, \quad \sum_1^{\infty} b_n = \sum_1^{\infty} \frac{\varphi_{n+1} - \varphi_n}{\varphi_{n+1}},$$

divergono entrambe con rapidità pari a quella della variabile $\lg \varphi_n$.

E più esattamente si hanno le relazioni:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_1^n a_n}{\lg \varphi_n} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_1^n b_n}{\lg \varphi_n} = 1.$$

Questa proposizione è una conseguenza immediata della formula (7).

In particolare: facendo $\varphi_n = n$, si ha la nota proprietà della serie armonica, di divergere come $\lg n$.

II. Se la serie a termini positivi $\sum \frac{1}{u_n}$ è divergente e soddisfa la condizione $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{u_n} = 0$, se si indica la somma dei suoi primi n termini col simbolo σ_n e si forma la serie $\sum \frac{1}{u_n \sigma_n}$, questa si comporta assintoticamente come $\lg \sigma_n$.

Più precisamente si ha

$$(16) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{r=1}^n \frac{1}{u_r \sigma_r}}{\lg \sigma_n} = 1.$$

Si deduce ciò dalla proposizione precedente col fare $\varphi_n = \sigma_n$.

La successiva applicazione di cotesto risultamento conduce alla co-

struzione della scala di serie divergenti

$$(17) \sum \frac{1}{u_n}, \quad \sum \frac{1}{u_n \sigma_n}, \quad \sum \frac{1}{u_n \sigma_n \lg \sigma_n}, \quad \sum \frac{1}{u_n \sigma_n \lg \sigma_n \lg \lg \sigma_n}, \dots$$

con la proprietà che la somma dei primi n termini di una qualunque di esse serie, tende all'infinito con rapidità eguale a quella del logaritmo della somma analoga, nella serie precedente.

Le proposizioni precedenti sono note da gran tempo, si trovano infatti nella memoria del DINI « *Sulle serie a termini positivi* » stampata negli « *Annali delle Università Toscane* » del 1867, e sono qui recate unicamente per dare esempio della brevità del metodo.

Tenendo conto della proposizione:

Se la serie $\sum_1^\infty \frac{1}{u_n}$ è divergente, se ρ indica un numero positivo, la serie:

$$\sum_1^\infty b_n = \sum_1^\infty \frac{1}{u_n \sigma_n^{1+\rho}}, \quad \left(\sigma_n = \sum_1^n \frac{1}{u_n} \right),$$

è convergente *);

e giovandoci della prop. II, formeremo la scala di serie convergenti:

$$(19) \quad \frac{1}{u_n \sigma_n^{1+\rho}}, \quad \frac{1}{u_n \sigma_n (\lg \sigma_n)^{1+\rho}}, \quad \frac{1}{u_n \sigma_n \lg \sigma_n (\lg \lg \sigma_n)^{1+\rho}}, \dots$$

Donde i soliti criterî, detti logaritmici, di convergenza per la serie a termini positivi **).

III. Se la serie $\sum_1^\infty \frac{1}{u_n}$ diverge ed è $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{u_n} = 0$, la serie $\sum_1^\infty \frac{\sigma_n}{u_n}$ diverge con rapidità eguale a quella della variabile $\frac{\sigma_n^2}{2}$.

Infatti si ha:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_1^n \frac{\sigma_r}{u_r}}{\frac{\sigma_n^2}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sigma_n}{u_n}}{\frac{\sigma_n^2}{2} - \frac{\sigma_{n-1}^2}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma_n}{\sigma_n - \frac{1}{2u_n}} = 1.$$

In particolare: la serie $\sum_1^\infty \frac{\lg n}{n}$ diverge come $\frac{1}{2} (\lg n)^2$, cioè come $\lg \left(\frac{\lg n}{n^2} \right)$; la serie $\sum \frac{\lg \sigma_n}{u_n \sigma_n}$ diverge come $\lg \left(\frac{\lg \sigma_n}{\sigma_n^2} \right)$.

*) Cf. DINI, loc. cit., § 6.

**) DINI, loc. cit., § 8.

§ III.

10. Abbiamo visto al n° 5 che l'ordine di infinito del prodotto

$\prod_1^{\infty} (1 + a_n)$ è minore od uguale a quello della espressione $e^{\sum_1^{\infty} a_n}$.

L'eguaglianza di quegli ordini di infinito può sicuramente affermarsi quando la serie $\sum a_n^2$ sia convergente.

Si consideri infatti la serie:

$$(20) \quad a_1 - \lg(1 + a_1) + a_2 - \lg(1 + a_2) + a_3 - \lg(1 + a_3) + \dots$$

Se poniamo

$$S_n = C_{2n} = \sum_1^n [a_r - \lg(1 + a_r)], \quad S'_n = \sum_1^n a_r^2,$$

abbiamo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{S'_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - \lg(1 + a_n)}{a_n^2}.$$

Ora si ha:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \lg(1 + x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{1}{2}:$$

avremo anche perciò:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{S'_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - \lg(1 + a_n)}{a_n^2} = \frac{1}{2};$$

d'onde si vede che le somme C_{2n} di un numero pari di termini, della serie (20) convergono verso un limite finito C quando la serie $\sum a_n^2$ sia convergente.

Le somme C_{2n+1} di un numero dispari di termini, differiscono dalle corrispondenti somme C_{2n} per le quantità infinitesime a_{n+1} , e tendono perciò al medesimo limite.

La costante positiva C somma della serie (20), nel caso particolare di $a_n = \frac{1}{n}$, assume il valore 0,577215664 ... ed ha nome da EULERO *).

Se scriviamo la somma C_{2n} dei primi $2n$ termini della serie (20)

*) Cf. CESÀRO, loc. cit. pag. 147.

sotto la forma :

(21) $C_{2n} = a_1 + a_2 + \dots + a_n - \lg(1+a_1)(1+a_2) \dots (1+a_n) = A_n - \lg \varphi_n$
abbiamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (A_n - \lg \varphi_n) = C$$

e perciò :

$$(22) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{A_n}}{\varphi_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\sum_{r=1}^n a_r}}{\prod_{r=1}^n (1+a_r)} = e^C;$$

e ciò prova l'eguaglianza negli ordini di infinito delle variabili $e^{\sum_{r=1}^n a_r}$,
 $\prod_{r=1}^n (1+a_r)$.

II. Paragoniamo le serie a termini positivi

$$(23) \quad \sum_1^{\infty} -[a_n + \lg(1-a_n)]$$

$$(20) \quad \sum_1^{\infty} [a_n - \lg(1+a_n)].$$

Facendo il rapporto dei termini corrispondenti :

$$\frac{-a_n - \lg(1-a_n)}{a_n - \lg(1+a_n)}$$

e considerando che :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x - \lg(1-x)}{x - \lg(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1 + \frac{1}{1-x}}{1 - \frac{1}{1+x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{(1-x)^2}}{\frac{1}{(1+x)^2}} = 1,$$

e che la variabile a_n è supposta infinitesima per $n = \infty$, si ricava subito :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-a_n - \lg(1-a_n)}{a_n - \lg(1+a_n)} = 1.$$

Le due serie (23), (20) perciò convergono, o divergono insieme.

Chiamando con C'_n la somma dei primi n termini della (23), avremo

$$C'_n = \sum_{r=1}^n (-a_r) - \lg \prod_{r=1}^n (1-a_r) > 0,$$

cioè :

$$(24) \quad \frac{e^{\frac{-\sum_1^n a_r}{1}}}{\prod_{r=1}^n (1 - a_r)} = e^{\frac{C'}{n}} > 1.$$

Nel caso che la serie (23) converga, ciò che in particolare ha luogo quando la serie $\sum a_n^2$ è convergente, indicandone la somma con C' , si ha:

$$(25) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{-\sum_1^n a_r}{1}}}{\prod_{r=1}^n (1 - a_r)} = e^{C'}.$$

Da cui si scorge che se la serie $\sum a_r^2$ converge e la serie $\sum a_r$ diverge, le variabili $e^{\frac{-\sum_1^n a_r}{1}}$, $\prod_{r=1}^n (1 - a_r)$ hanno lo stesso ordine di infinitesimo.

12. Le serie $\sum a_r^2$, $\sum b_r^2$, dove le a_r , b_r sono variabili positive, convergono entrambe: convergeranno anche le serie $\sum [a_r - \lg(1 + a_r)]$, $\sum -[b_r + \lg(1 - b_r)]$.

Indicando con C_a , C'_b le somme di queste serie, avremo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_1^n a_r - \lg \prod_1^n (1 + a_r) + \sum_1^n (-b_r) - \lg \prod_1^n (1 - b_r) \right] = C_a + C'_b;$$

da cui

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{\sum_1^n (a_r - b_r)}{1}}}{\prod_1^n (1 + a_r)(1 - b_r)} = e^{C_a + C'_b}.$$

13. Sia c_r una variabile reale infinitesima per $r \rightarrow \infty$.

Consideriamo la serie

$$(26) \quad \sum_1^\infty [c_r - \lg(1 + c_r)].$$

Potremo supporre tutte le $|c_r|$ minori di 1, ed allora tanto i termini corrispondenti a valori positivi delle c_r , quanto quelli corrispondenti a valori negativi sono positivi, e la serie (26) è a termini positivi.

Ponendo

$$C_{n,c} = \sum_1^n [c_r - \lg(1 + c_r)],$$

ne verrà, per ogni valore di n :

$$(27) \quad \frac{e^{\sum_1^n c_r}}{\prod_1^n (1 + c_r)} = e^{C_{n,c}}.$$

Considerando ora che la serie (26) converge sempre, o diverge, *assolutamente*, si scorge che la variabile $C_{n,c}$ non cambia il suo comportamento assintotico qualunque inversione si faccia nell'ordine delle c_r .

La formula (27) ci offre dunque un mezzo semplicissimo per lo studio della *convergenza condizionata* del prodotto infinito $\prod_1^\infty (1 + c_r)$.

14. Senza entrare ora nei dettagli della discussione di quella formula mi limiterò ad osservare che, tutti i teoremi dai vari autori trovati su questo argomento, se ne derivano con la massima facilità.

Taccio del teorema sulla convergenza assoluta, che ne è conseguenza immediata.

Supponiamo che la serie $\sum c_r^2$ sia convergente.

Convergeranno entrambe le serie $\sum a_r^2$, $\sum b_r^2$, dove a_r e b_r indicano i termini positivi ed i valori assoluti dei termini negativi delle c_r .

Convergono quindi le serie $\sum [a_r - \lg(1 + a_r)]$, $\sum [-b_r - \lg(1 - b_r)]$, e la serie (26) converge assolutamente.

La relazione

$$(28) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\sum_1^n c_r}}{\prod_1^n (1 + c_r)} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{C_{n,c}} = e^C$$

vale perciò *indipendentemente dall'ordine delle c_r* .

Se la serie $\sum_1^\infty c_r^2$ converge ed, in uno speciale ordinamento, la $\sum_1^\infty c_r$ converge, in quello speciale ordinamento converge anche il prodotto $\prod_1^\infty (1 + c_r)$;

e soddisfa la relazione

$$(29) \quad \prod_1^{\infty} (1 + c_r) = e^{\frac{\sum_1^{\infty} c_r}{1}}.$$

Se, ordinando diversamente i termini c_r , la serie $\sum_1^{\infty} c_r$ tende a $+\infty$ ($-\infty$), il prodotto $\prod_1^{\infty} (1 + c_r)$ è infinito (infinitesimo) dello stesso ordine della espressione $e^{\frac{\sum_1^{\infty} c_r}{1}}$.

15. La serie $\sum c_r^2$ sia divergente; divergerà assolutamente anche la serie a termini positivi (26) e la relazione:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{\sum_1^n c_r}{1}}}{\prod_1^n (1 + c_r)} = +\infty$$

sarà verificata per qualunque ordinamento delle c_r .

Se per un particolare ordine delle c_r la serie $\sum_1^{\infty} c_r$ risulterà convergente, il corrispondente prodotto $\prod_1^{\infty} (1 + c_r)$ sarà infinitesimo di ordine eguale a quello della espressione $e^{-\frac{\sum_1^{\infty} c_r^2}{1}}$.

§ IV.

16. Sieno a_r , b_r variabili positive.

Poniamo

$$(30) \quad \begin{cases} A_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, & \varphi_n = (1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) \\ B_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n, & \psi_n = (1 + b_1)(1 + b_2) \dots (1 + b_n) \\ C_{n,a} = a_1 - \lg(1 + a_1) + a_2 - \lg(1 + a_2) + \dots + a_n - \lg(1 + a_n) = A_n - \lg \varphi_n \\ C_{n,b} = b_1 - \lg(1 + b_1) + b_2 - \lg(1 + b_2) + \dots + b_n - \lg(1 + b_n) = B_n - \lg \psi_n \end{cases}$$

Considerando che la funzione:

$$y = x - \lg(1 + x)$$

è, nel tratto $(0, \dots, +\infty)$, continuamente crescente, si vede che, per

ogni valore di n e qualunque sia il comportamento assintotico della variabile positiva a_n ,

$$(31) \quad A_n > \lg \varphi_n, \quad e^{\sum_{r=1}^n a_r} > \prod_{r=1}^n (1 + a_r).$$

Donde in particolare risulta che l'ordine di infinito del prodotto $\prod_1^\infty (1 + a_r)$

non è mai superiore a quello della espressione $e^{\sum_1^\infty a_r}$.

In secondo luogo supponiamo:

$$a_r \geq b_r \quad (r = 1, 2, 3, \dots);$$

avremo

$$A_n - \lg \varphi_n \geq B_n - \lg \psi_n,$$

cioè

$$(32) \quad C_{n,a} \geq C_{n,b}.$$

Dato adunque che le serie $\sum_1^\infty [a_r - \lg(1 + a_r)]$, $\sum_1^\infty [b_r - \lg(1 + b_r)]$ convergano verso limiti finiti C_a , C_b , avremo

$$C_a \geq C_b;$$

da cui:

La costante C_a somma della serie $\sum [a_r - \lg(1 + a_r)]$ è tanto più piccola quanto più rapida è la convergenza allo zero della variabile a_r .

Considerando ora che per la serie divergente $\sum \frac{1}{n}$ si ha $C = 0,577 \dots$, si scorge che, per serie $\sum a_n$ convergenti, si ottengono costanti C_a abbastanza piccole (minori delle somme $\frac{1}{2} \sum_1^\infty a_n^2$) e che, per ottenere una approssimazione in eccesso del valore del prodotto infinito convergente

$$\prod_1^\infty (1 + a_r), \text{ si può calcolare la espressione } e^{\sum_1^\infty a_r}.$$

17. Conservando le notazioni (30), donde in particolare si deriva:

$$(33) \quad \sum_1^n [a_r + b_r - \lg(1 + a_r)(1 + b_r)] = A_n + B_n - \lg \varphi_n \psi_n = C_{n,a} - C_{n,b},$$

poniamo inoltre:

$$(34) \quad \sum_1^n [a_r + b_r - \lg(1 + a_r + b_r)] = C_{n,a+b}.$$

Osservando che per $a_r > 0$, $b_r > 0$, si ha :

$$1 + a_r + b_r < (1 + a_r)(1 + b_r)$$

e che perciò :

$$(35) \quad a_r + b_r - \lg(1 + a_r + b_r) > a_r + b_r - \lg(1 + a_r)(1 + b_r),$$

ricordando inoltre che la funzione $x - \lg(1 + x)$ per valori positivi della x è sempre crescente, abbiamo

$$a_r + b_r + a_r b_r - \lg(1 + a_r)(1 + b_r) > a_r + b_r - \lg(1 + a_r + b_r) > a_r + b_r - \lg(1 + a_r)(1 + b_r),$$

da cui

$$(36) \quad C_{n,a} + C_{n,b} + \sum_1^n a_r b_r > C_{n,a+b} > C_{n,a} + C_{n,b}.$$

Ne concludiamo che : Se esistono, determinati e finiti, i limiti per $n = \infty$ delle $C_{n,a}$, $C_{n,b}$, e se la serie $\sum_1^\infty a_n b_n$ è convergente, esiste anche limite finito per la variabile $C_{n,a+b}$ e soddisfa la limitazione :

$$\lim_{n=\infty} (C_{n,a} + C_{n,b}) < \lim_{n=\infty} C_{n,a+b} < \lim_{n=\infty} (C_{n,a} + C_{n,b}) + \sum_1^\infty a_r b_r.$$

18. Supponiamo ora che

$$a_r + b_r < 1 \quad (r = 1, 2, 3 \dots).$$

Facilmente verificheremo che :

$$(37) \quad 0 < \lg(1 + a_r)(1 + b_r) - \lg(1 + a_r + b_r) < a_r + b_r - \lg(1 + a_r)(1 + b_r),$$

da cui

$$(38) \quad 0 < \lg \prod_1^n (1 + a_r)(1 + b_r) - \lg \prod_1^n (1 + a_r + b_r) < C_{n,a} + C_{n,b},$$

infine

$$(39) \quad 1 < \frac{\prod_1^n (1 + a_r)(1 + b_r)}{\prod_1^n (1 + a_r + b_r)} < e^{C_{n,a} + C_{n,b}}.$$

In particolare : se le serie $C_{n,a}$, $C_{n,b}$ convergono, ed i due prodotti infiniti $\prod_1^\infty (1 + a_n)(1 + b_n)$, $\prod_1^\infty (1 + a_n + b_n)$ sono divergenti, essi hanno lo stesso ordine di infinito ; se invece convergono, sono fra loro nella relazione :

$$(40) \quad \prod_1^{\infty} (1 + a_r + b_r) < \prod_1^{\infty} (1 + a_n)(1 + b_n) < \prod_1^{\infty} (1 + a_r + b_r) \cdot e^{C_a + C_b}.$$

Se scriviamo la (39) sotto la forma

$$(41) \quad 1 < \prod_1^n \left(1 + \frac{a_r b_r}{1 + a_r + b_r} \right) < e^{C_{n,a} + C_{n,b}}$$

scorgiamo che: se le serie $C_{n,a}$, $C_{n,b}$ sono convergenti, converge il prodotto infinito $\prod_1^{\infty} \left(1 + \frac{a_n b_n}{1 + a_n + b_n} \right)$: converge dunque anche la serie:

$$\sum_1^{\infty} \frac{a_n b_n}{1 + a_n + b_n};$$

ed infine converge la serie $\sum_1^{\infty} a_n b_n$, i cui termini hanno a quelli della serie precedente rapporti tendenti al limite 1; ma dalla formola (36) deduciamo che in allora converge anche la $C_{n,a+b}$; in fine concluderemo:

Se le serie $\sum_1^{\infty} [a_n - \lg(1 + a_n)]$, $\sum_1^{\infty} [(b_n - \lg(1 + b_n))]$ sono entrambe convergenti, convergono anche le serie:

$$\sum_1^{\infty} a_n b_n, \quad \sum_1^{\infty} [a_n + b_n - \lg(1 + a_n + b_n)].$$

19. Scrivendo la formola (37) sotto la forma

$$a_r + b_r - \lg(1 + a_r + b_r) - [a_r + b_r - \lg(1 + a_r)(1 + b_r)] < a_r + b_r - \lg(1 + a_r)(1 + b_r)$$

e sommando da $r = 1$ ad n , si ha:

$$C_{n,a+b} - (C_{n,a} + C_{n,b}) < C_{n,a} + C_{n,b},$$

cioè

$$(42) \quad C_{n,a} + C_{n,b} < C_{n,a+b} < 2(C_{n,a} + C_{n,b}).$$

Osserviamo ora che per $x > 0$, si ha

$$x - \lg(1 + x) < \frac{x^2}{2},$$

d'onde si ricava:

$$C_{n,a} + C_{n,b} < \sum_1^n \frac{a_i^2 + b_i^2}{2},$$

ed avremo

$$C_{n,a+b} < \sum_1^n (a_i^2 + b_i^2),$$

da cui, ricordando la (34), dedurremo:

$$(43) \quad 1 < \frac{e^{\sum_{r=1}^n (a_r + b_r)}}{\prod_{r=1}^n (1 + a_r + b_r)} < e^{\sum_{r=1}^n (a_r^2 + b_r^2)}$$

In particolare, se la somma $\sum (a_r + b_r)$ è convergente, si ha la limitazione

$$(44) \quad e^{\sum_{r=1}^{\infty} (a_r + b_r - a_r^2 - b_r^2)} > \prod_{r=1}^{\infty} (1 + a_r + b_r) < e^{\sum_{r=1}^{\infty} (a_r + b_r)}.$$

20. Dalla formula (42), facendo $b = a$, si ricava:

$$2 C_{n,a} < C_{n,2a} < 4 C_{n,a}.$$

Di poi, facendo $b = 2a$:

$$3 C_{n,a} < C_{n,3a} < 10 C_{n,a}.$$

In generale, indicando con P_p l'integrale della equazione alle differenze:

$$(45) \quad f_p - 2f_{p-1} - 2 = 0,$$

che è determinato dal valore iniziale $P_1 = 1$, si ha

$$(46) \quad p C_{n,a} < C_{n,pa} < P_p C_{n,a}.$$

I numeri P_p sono tutti finiti, epperò, in particolare, abbiamo:

Se la serie $\sum_{r=1}^{\infty} [a_r - \lg(1 + a_r)]$ converge, ed è p un numero positivo, intero, qualunque, anche la serie

$$\sum_{r=1}^{\infty} [p a_r - \lg(1 + p a_r)]$$

è convergente; e, se si incomincia a sommare da un indice abbastanza elevato perchè sia sempre $p a_r < 1$, si ha:

$$(47) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{r=1}^{\infty} [p a_r - \lg(1 + p a_r)] &= \theta \sum_{r=1}^{\infty} [a_r - \lg(1 + a_r)] \\ p &< \theta < P_p. \end{aligned} \right.$$

21. Tale risultamento si estende senza difficoltà al caso in cui p rappresenti una costante positiva qualunque, e, tenendo conto, dei risultamenti ottenuti al § precedente, anche al caso di costanti negative.

Vale un risultamento analogo anche nel caso che p sia una quantità variabile ed abbia limiti superiore ed inferiore di indeterminazione finiti.

In particolare potremo enunciare la proposizione seguente :

Se la variabile b_n ha limite superiore di indeterminazione L , ed è p il massimo intero contenuto in L ; se il suo limite inferiore di indeterminazione è un numero $l \geq 1$, se il prodotto $a_n b_n$, al pari della a_n , è sempre minore della unità, si ha :

$$(48) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_1^n [a_r b_r - \lg(1 + a_r b_r)] &= \theta_n \sum_1^n [a_r - \lg(1 + a_r)] \\ l &< \theta_n < P_p. \end{aligned} \right.$$

Se la variabile b_n ha limite inferiore di indeterminazione $l > 1$, anche se non si possa accertare che tutte le $a_n b_n$ sieno minori di 1, si potrà sempre affermare che :

$$(49) \quad \sum_1^n [a_r b_r - \lg(1 + a_r b_r)] > l \sum_1^n [a_r - \lg(1 + a_r)].$$

22. Se le serie $\sum_1^\infty [a'_r - \lg(1 + a'_r)]$, $\sum_1^\infty [a''_r - \lg(1 + a''_r)]$, ... sono tutte convergenti, se le variabili positive b'_r , b''_r , ... hanno limiti superiori di indeterminazione finiti, converge anche la serie

$$\sum [a'_r b'_r + a''_r b''_r + \dots - \lg(1 + a'_r b'_r + a''_r b''_r + \dots)].$$

23. Supponiamo che la serie $\sum_1^\infty [a_n - \lg(1 + a_n)]$ sia divergente.

In tale ipotesi, essendo α una costante positiva (o negativa) qualunque, potremo scrivere :

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum_1^n [\alpha a_r - \lg(1 + \alpha a_r)]}{\sum_1^n [(a_r - \lg(1 + a_r))]} = \lim_{n=\infty} \frac{\alpha a_r - \lg(1 + \alpha a_r)}{a_r - \lg(1 + a_r)}$$

ed, analogamente a quanto si fece al n° 11, concluderemo :

$$(50) \quad \lim_{n=\infty} \frac{\sum_1^n [\alpha a_r - \lg(1 + \alpha a_r)]}{\sum_1^n [(a_r - \lg(1 + a_r))]} = \alpha^2.$$

Di qui facilmente si deduce

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum_1^n [\alpha a_r - \lg(1 + \alpha a_r)] - \alpha \sum_1^n [a_r - \lg(1 + a_r)]}{\alpha \sum_1^n [a_r - \lg(1 + a_r)]} = \alpha - 1,$$

cioè :

$$\lim_{n=\infty} -\lg \frac{\prod_1^n (1 + \alpha a_r)}{\left[\prod_1^n (1 + a_r) \right]^\alpha} \cdot \frac{1}{\alpha C_{n,a}} = \alpha - 1,$$

che scriveremo :

$$-\lg \frac{\prod_1^n (1 + \alpha a_r)}{\left[\prod_1^n (1 + a_r) \right]^\alpha} \cdot \frac{1}{\alpha C_{n,a}} = \alpha - 1 + \varepsilon_n, \quad \lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0,$$

cioè

$$\frac{\prod_1^n (1 + \alpha a_r)}{\left[\prod_1^n (1 + a_r) \right]^\alpha} = e^{-\alpha C_{n,a}(\alpha - 1 + \varepsilon_n)}, \quad \lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0,$$

infine :

$$(51) \prod_1^n (1 + \alpha a_r) = \left[\prod_1^n (1 + a_r) \right]^\alpha \cdot e^{-\alpha C_{n,a}(\alpha - 1 + \varepsilon_n)}, \quad \lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0.$$

Ricordando ora che $C_{n,a} = \sum_1^n a_r - \lg \prod_1^n (1 + a_r)$, e che, nella ipotesi $\lim_{n=\infty} a_n = 0$, da cui non ci siamo dipartiti, si ha

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum_1^n a_r}{\lg \prod_1^n (1 + a_r)} = 1,$$

avremo

$$\frac{C_{n,a}}{\lg \prod_1^n (1 + a_r)} = \frac{\sum_1^n a_r}{\lg \prod_1^n (1 + a_r)} - 1 = \sigma_n, \quad \lim_{n=\infty} \sigma_n = 0, \quad \sigma_n > 0$$

dunque

$$C_{n,a} = \lg \left[\prod_1^n (1 + a_r) \right]^{\sigma_n}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = 0, \quad \sigma_n > 0$$

$$e^{C_{n,a}} = \left[\prod_1^n (1 + a_r) \right]^{\sigma_n}; \quad \left\{ \begin{array}{l} e^{\alpha C_{n,a}(\alpha_1 + \epsilon_n)} = \left[\prod_1^n (1 + a_n) \right]^{\delta_n} \\ \delta_n > 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0. \end{array} \right.$$

Sostituendo nelle (51) ho

$$(52) \quad \prod_1^n (1 + \alpha a_r) = \left[\prod_1^n (1 + a_r) \right]^{\alpha - \delta_n}, \quad \delta_n > 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0.$$

Questo risultamento si può esprimere dicendo:

Se l'ordine di infinito del prodotto $\prod_1^\infty (1 + a_r)$ si assume come unità, l'ordine del prodotto $\prod_1^\infty (1 + \alpha a_r)$ non è maggiore di α ed è maggiore di $\alpha - a$, a positivo qualunque.

Usando la notazione che il BOREL, seguendo le idee di CAUCHY, ha proposto *), diremo che quell'ordine è espresso dal simbolo (α) .

24. Nel caso che la serie $\sum_1^\infty (a_n - \lg(1 + a_n))$ sia convergente, giovandoci del risultamento espresso dalla formola (47), con ragionamento analogo a quello fatto dianzi, avremo

$$(53) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\prod_1^n (1 + \alpha a_r)}{\left[\prod_1^n (1 + a_r) \right]^\alpha} = e^{(\alpha-0)C_a} \\ \theta \text{ determinato e finito, } C_a = \sum_1^\infty [a_n - \lg(1 + a_n)]. \end{array} \right.$$

D'onde concluderemo che, preso per unità l'ordine di infinito del prodotto $\prod_1^\infty (1 + a_r)$, l'ordine di infinito del prodotto $\prod_1^\infty (1 + \alpha a_r)$ è espresso dal numero α , non solo secondo la definizione di CAUCHY; ma

*) Cfr. E. BOREL, *Leçons sur les séries à termes positifs*. (Paris), pag. 36.

anche nel senso più stretto, in cui ordinariamente è definito l'ordine di infinito.

25. Le ricerche precedenti si possono estendere a prodotti della forma $\prod_1^\infty (1 + a_r c_r)$, $\prod_1^\infty (1 + a_r)$ dove a_r, c_r sono variabili reali qualunque, soggette alle sole condizioni seguenti:

- α) le a_r sono tutte di uno stesso segno e nessuna di esse è nulla,
- β) i binomi $(1 + a_r)$, $(1 + a_r c_r)$, sono tutti maggiori di zero,
- γ) il prodotto infinito $\prod_1^\infty (1 + a_r)$ non è convergente.

Un ragionamento analogo a quello fatto al n° 23, ci conduce alla ricerca del numero $\beta = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\lg(1 + a_r c_r)}{\lg(1 + a_r)}$.

Se, per brevità di linguaggio, consideriamo gli infinitesimi come infiniti di ordine negativo, se per infinito principale assumiamo quello della variabile $\prod_1^n (1 + a_n)$ nella ipotesi che questa finisca per superare qualunque numero positivo, quello della $\left[\prod_1^n (1 + a_r) \right]^{-1}$ nel caso contrario, troveremo in ogni caso che il numero β esprime l'ordine di infinito (al senso di CAUCHY) del prodotto infinito $\prod_1^\infty (1 + a_r c_r)$.

26. Sieno β_1, β_2 , rispettivamente, i limiti inferiore e superiore di indeterminazione della espressione $\frac{\lg(1 + a_r c_r)}{\lg(1 + a_r)}$, e sia ε un numero positivo arbitrario.

La variabile $\prod_1^n (1 + a_r c_r)$ sarà, per $n = \infty$, infinita (infinitesima), di ordine superiore a quello della variabile $\left[\prod_1^n (1 + a_r) \right]^{\beta_1 - \varepsilon}$, ed inferiore a quello della variabile $\left[\prod_1^n (1 + a_r) \right]^{\beta_1 + \varepsilon}$.

Supponiamo, per fissare le idee, che sia $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_1^n (1 + a_r) = +\infty$.

Per la definizione di β_1 , in corrispondenza di ε determineremo

un N tale che

$$n \geq N, \quad \frac{\lg(1 + a_r c_r)}{\lg(1 + a_r)} > \beta_1 - \varepsilon.$$

Ricordando la proprietà α) dei numeri a_r , avremo:

$$r \geq N, \quad 1 + a_r c_r > (1 + a_r)^{\beta_1 - \varepsilon},$$

$$n > N, \quad \prod_{r=N}^n (1 + a_r c_r) > \left[\prod_{r=N}^n (1 + a_r) \right]^{\beta_1 - \varepsilon},$$

infine:

$$n > N, \quad \frac{\prod_{r=1}^n (1 + a_r c_r)}{\left[\prod_{r=1}^n (1 + a_r) \right]^{\beta_1 - \varepsilon}} > \frac{\prod_{r=1}^N (1 + a_r c_r)}{\left[\prod_{r=1}^N (1 + a_r) \right]^{\beta_1 - \varepsilon}},$$

e ciò prova la prima parte dell'enunciato. Analoga dimostrazione si faccia per la parte che riguarda β_2 .

Nel caso che β_1 risulti negativo, non potremo escludere che la variabile $\prod_1^n (1 + a_r c_r)$ sia infinita di ordine negativo, cioè nel fatto infinitesima.

Il teorema e la dimostrazione valgono anche nel caso che la variabile $\prod_1^n (1 + a_r)$ tenda al limite zero e servono per determinare l'ordine di infinitesimo del prodotto $\prod_1^\infty (1 + a_r c_r)$. In questo caso, a limiti inferiori β_1 negativi, possono effettivamente corrispondere prodotti $\prod_1^n (1 + a_r c_r)$ infiniti per $n = \infty$.

Se è $\beta_1 = \beta_2 = \beta$, segue senza difficoltà la proposizione enunciata al n° 25.

Se è $\beta_2 = 0$, la variabile $\prod_1^n (1 + a_r c_r)$ potrà essere finita, od infinita (infinitesima) di ordine inferiore a quello di qualunque potenza positiva della $\prod_1^n (1 + a_r)$.

Se è $\beta_1 = \infty$, la $\prod_1^n (1 + a_r c_r)$ sarà infinita (infinitesima) di ordine superiore a quello di qualunque potenza positiva della $\prod_1^n (1 + a_r)$.

27. Se la variabile a_n soddisfa la relazione

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0,$$

i numeri β_1, β_2, β , definiti ai numeri precedenti si hanno cercando i limiti:

$$\beta_1 = \liminf_{n \rightarrow \infty} c_n, \quad \beta_2 = \limsup_{n \rightarrow \infty} c_n, \quad \beta = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n.$$

Ciò in conseguenza del fatto:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg [1 + x \cdot f(x)]}{\lg (1 + x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x) + x f'(x)}{1 + x f(x)}}{\frac{1}{1 + x}} = \lim_{x \rightarrow 0} f(x).$$

28. Come esempio di applicazione dei criterî esposti ai n° precedenti, prendiamo prima in esame il prodotto $\prod_1^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

La serie $\sum \left(\frac{1}{n} - \lg 1 + \frac{1}{n}\right)$ converge (ha per somma la costante di EULERO). La serie $\sum \frac{1}{n}$ diverge come $\lg n$, il prodotto dato dunque diverge con la stessa rapidità del numero n .

Sia ora il prodotto $\prod_1^{\infty} \left(1 + \frac{b_n}{n}\right)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$; divergerà esso come n^β .

Cioè: il prodotto $\prod_1^{\infty} (1 + a_n)$ è infinito dell'ordine β , se la a_n è infinitesimo del 1° ordine ed ha per parte principale $\frac{\beta}{n}$.

Risultamento trovato per altra strada nella mia Nota: *Sui prodotti infiniti divergenti* (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 2° Semestre del 1901).

Come secondo esempio consideriamo il prodotto infinito:

$$\prod_1^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n \lg n}\right).$$

La serie $\sum \left[\frac{1}{n \lg n} - \lg \left(1 + \frac{1}{n \lg n}\right)\right]$ che ha i termini inferiori a quelli della serie considerata all'esempio precedente, sicuramente converge.

La serie $\sum \frac{1}{n \lg n}$ diverge come $\lg \lg n$ (§ II, prop. II); il prodotto

proposto diverge perciò come $\lg n$: ed il prodotto

$$\prod_1^{\infty} \left(1 + \frac{b_n}{n \lg n} \right), \quad \lim_{n=\infty} b_n = p,$$

diverge come $(\lg n)^p$.

In generale: se una funzione monotona $f(x)$ soddisfa la relazione $\frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{b(x)}{x \lg x} + 1$, $\lim_{x=\infty} b(x) = p$, essa si comporta assintoticamente come la funzione $(\lg x)^p$. (Cfr. *Sui prodotti infiniti divergenti* al n° 13).

Prendiamo infine ad esaminare il prodotto infinito $\prod_1^{\infty} \left(1 + \frac{\lg n}{n} \right)$.

La serie $\sum \left[\frac{\lg n}{n} - \lg \left(1 + \frac{\lg n}{n} \right) \right]$ converge, perchè è convergente la serie $\sum \left(\frac{\lg n}{n} \right)^2$.

La serie $\sum \frac{\lg n}{n}$ si comporta assintoticamente come la variabile $\frac{(\lg n)^2}{2}$ (§ II, prop. IV). Il prodotto dato ha dunque ordine di infinito eguale a quello della variabile:

$$n^{\frac{\lg n}{2}}.$$

Il prodotto infinito

$$\prod_1^{\infty} \left(1 + b_n \frac{\lg n}{n} \right), \quad \lim_{n=\infty} b_n = p$$

diverge dunque come la variabile

$$n^{\frac{p \lg n}{2}};$$

tale è anche la rapidità di divergenza di qualunque funzione monotona $f(x)$, la quale soddisfi la relazione

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} = 1 + b_x \frac{\lg x}{x}, \quad \lim_{x=\infty} b_x = p.$$

§ V.

29. La nota relazione, dovuta a CAUCHY *), fra le serie a termini positivi sempre decrescenti $\sum_1^{\infty} \alpha(n)$, e gli integrali definiti impropri

*) Cfr. p. es. GOURSAT, *Cours d'Analyse mathématique* (Paris 1902), pag. 379.

$\int_1^{\infty} \alpha(x) dx$, può servire a dedurre, dalle proposizioni enunciate nei §§ precedenti, altrettante proprietà relative al comportamento assintotico delle variabili $\prod_{r=1}^n [1 + \alpha(x_0 + r)]$, $\int_{x_0}^{x_0+n} \alpha(x) dx$.

Nella Nota già citata *Sui prodotti infiniti divergenti* ho trovato direttamente le più importanti di tali proposizioni, desumendole, con metodo che ritengo nuovo, da pochi e generali principi sulla crescita delle funzioni monotone.

30. Non è difficile dimostrare *) che tutte le funzioni reali $f(x)$ della variabile reale x , monotone in un determinato intorno dell'infinito, e la cui derivata logaritmica è infinitesima per $x = +\infty$, soddisfano la relazione:

$$(54) \quad \lim_{x=+\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = 1;$$

e che, reciprocamente: tutte le funzioni monotone $f(x)$ soddisfacenti la (54), non possono avere derivata logaritmica determinata per $x = +\infty$, se non infinitesima.

Così pure si può affermare che:

Se si assegnano alla classe p^{esima} le funzioni monotone $f(x)$, le quali soddisfano le relazioni:

$$(54) \quad \lim_{x=+\infty} \frac{\lg f(x)}{x^p} = 0, \quad \liminf_{x=+\infty} \frac{\lg f(x)}{x^{p-1}} > 0 \quad **),$$

le funzioni

$$(55) \quad \varphi(x) = \frac{f(x+1)}{f(x)}$$

appartengono alla classe $(p-1)^{\text{esima}}$, e reciprocamente.

31. Le funzioni della prima classe possono dunque mettersi sotto la forma

$$f(x) = e^{x \varepsilon(x)}, \quad \lim_{x=\infty} \varepsilon(x) = 0,$$

*) Cfr. *Sul limite del quoziente di due funzioni* (Annali di Matematica, tomo VIII della serie III, pag. 273 e seguenti).

**) Scrivo: $\liminf_{x=+\infty}$ invece di *limite inferiore di indeterminazione* per $x = +\infty$.

possono essere infinite od infinitesime, per $x = +\infty$, secondo che la $\varepsilon(x)$ è sempre positiva o sempre negativa in un determinato intorno dell'infinito, e soddisfano tutte la condizione:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = 1.$$

Se rappresento con $\alpha(x)$ una funzione positiva, monotona, della variabile reale x , derivabile in un determinato intorno dell'infinito; con $f(x)$ l'integrale della equazione alle differenze finite

$$(56) \quad f(x+1) = [1 + \alpha(x)]f(x)$$

determinato dal valore iniziale $f(x_0) = 1 + \alpha(x_0)$, e dalla condizione di essere finita e continua insieme con le sue derivate di qualunque ordine nell'intorno $(x_0 + \infty)$; ho le relazioni:

$$(57) \quad f(x_0 + n) = \prod_{r=0}^n [1 + \alpha(x_0 + r)]$$

e la $f(x)$ così formata sarà della prima classe, ogniqualvolta la $\alpha(x)$ sia infinitesima per $x = +\infty$ *).

Quando questo sia ammesso, la relazione

$$(58) \quad \alpha(x) = \frac{f(x+1) - f(x)}{f(x)} = \frac{f'(x+\theta)}{f(x)} = \frac{f'(x+\theta h)}{f(x+\theta h)} \cdot \frac{f(x+\theta)}{f(x)}, \quad 0 \leq \theta \leq 1,$$

permetterà di dimostrare che le funzioni $\alpha(x)$, $\frac{f'(x)}{f(x)}$ sono insieme della classe prima, od insieme di classi superiori.

32. È facile verificare se una data funzione $\alpha(x)$ appartenga alla classe prima. Converrà esaminare se una almeno delle condizioni

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha'}{\alpha} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha(x+1)}{\alpha(x)} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} [\alpha(x)]^{\frac{1}{x}} = 1,$$

sia o no soddisfatta.

Nel caso affermativo, dovendo essere anche la $\frac{f'}{f}$ della classe prima, scriveremo:

$$(59) \quad \frac{f'}{f} = e^{-\varepsilon(x)}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \varepsilon(x) = 0.$$

*) La $f(x)$ è certamente sempre crescente; si veda al proposito: STOLZ *Grundzüge*, vol. I, pag. 58. Del resto, per non entrare in discussioni sottili, ammetto senz'altro che le funzioni $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, $\frac{f'(x)}{f(x)}$, sieno tutte monotone.

D'onde ricaveremo :

$$(60) \quad \begin{cases} f' = f \cdot e^{-x\varepsilon(x)}, & f'' = \frac{f'}{f} [f' - f \cdot (\varepsilon + x\varepsilon')] \\ \frac{f''}{f'} = \frac{f'}{f} - \varepsilon - \varepsilon'x = \sigma(x), \\ \frac{f''}{f} = \frac{f'}{f} \left(\frac{f'}{f} - \varepsilon - x\varepsilon' \right) = \frac{f'}{f} \cdot \sigma(x). \end{cases}$$

Se ammettiamo che $\frac{f''}{f'}$ sia, per $x = +\infty$, determinata, vediamo che $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sigma(x) = 0$, e la funzione f'' appartiene alla prima classe, onde, se la variabile positiva h_x ha limite superiore di indeterminazione finito, ne viene

$$(61) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f''(x + h_x)}{f''(x)} = 1.$$

Ora si ha

$$\alpha(x) = \frac{f(x+1) - f(x)}{f(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{f''(x)}{2f(x)} \frac{f''(x+\theta)}{f''(x)}, \quad 0 \leq \theta \leq 1.$$

In forza delle (61) scriveremo quindi :

$$(62) \quad \alpha(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{f''(x)}{2f(x)} \eta(x), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \eta(x) = 1.$$

Poniamo

$$(63) \quad \varphi(x) = \int_{x_0}^x \frac{f''(x)}{2f(x)} \eta(x) dx;$$

ne verrà

$$\int_{x_0}^x \alpha(x) dx = \lg f(x) - \lg f(x_0) + \varphi(x);$$

cioè :

$$(64) \quad \frac{f(x)}{e^{\int_{x_0}^x \alpha(\lambda) d\lambda}} = f(x_0) e^{-\varphi(x)}.$$

Considerando che, per la terza delle (60), si ha

$$(65) \quad \begin{cases} \varphi(x) = \sigma_1(\xi) \int_{x_0}^x \frac{f'}{f} dx, & e^{\varphi(x)} = \left[\frac{f(x)}{f(x_0)} \right]^{\sigma_1(\xi)}, \\ x_0 \leq \xi \leq x_1, & \sigma_1 = \frac{\eta \sigma}{2}, \quad \lim_{\xi \rightarrow \infty} \sigma_1(\xi) = 0, \end{cases}$$

potremo scrivere :

$$\frac{[f(x)]^{1+\sigma_1(\xi)}}{e^{\int_{x_0}^x \alpha(x) dx}} = [f(x_0)]^{1+\sigma_1(\xi)}.$$

Poichè la variabile $\sigma_1(\xi)$, per ogni coppia x_0, x è finita determinata e tende allo zero, per $x_0 = \infty$, si vede che le variabili $f(x)$, $\int_{x_0}^x \alpha(x) dx$, per $x = \infty$ convergono o divergono insieme.

Fatto $x = x_0 + n$, e ricordando la (57) concluderemo che: le variabili

$$f(n) = \prod_{r=0}^n [1 + \alpha(x_0 + r)], \quad \int_{x_0}^{x_0+n} \alpha(x) dx,$$

convergono o divergono insieme, cioè che: condizione necessaria e sufficiente perchè sia convergente il prodotto infinito $\prod_1^\infty [1 + \alpha(x)]$, è che la funzione $\alpha(x)$ sia atta alla integrazione definita impropria nel tratto $(x_0, \dots + \infty)$. Nel caso della divergenza l'ordine di infinito della variabile $f(x)$ si ottiene, con una prima approssimazione, calcolando quello della variabile $e^{\int_{x_0}^x \alpha(x) dx}$, per $x = +\infty$.

32. Poniamo:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \alpha(x) \delta(x), \quad f' = f \cdot \alpha \delta.$$

Dalla formula (58), per le ipotesi ammesse al n° precedente, dedurremo: $\lim_{x=\infty} \delta(x) = 1$. Derivando, e dividendo poi per f , avremo:

$$\frac{f''}{f} = (\alpha \delta)^2 + \frac{d}{dx}(\alpha \delta).$$

Poichè la α^2 ha, per $x = +\infty$, il medesimo comportamento asintotico della $(\alpha \delta)^2$, si scorge che: Se la funzione $\alpha^2(x)$ è atta alla integrazione definita impropria nel tratto $(1, \dots + \infty)$, la funzione $\varphi(x)$ definita dalla formula (63) è finita per $x = +\infty$, e le due espressioni

$$e^{\int_{x_0}^{x_0+n} \alpha(x) dx}, \quad f(x_0 + n) = \prod_{r=0}^n [1 + \alpha(x_0 + r)]$$

hanno lo stesso ordine di infinito *).

*) Cfr. il n° 10, § III; si veda anche il n° 14 della Nota *Sui prodotti infiniti divergenti*.

33. Anche la $\alpha(x)$ sia atta alla integrazione impropria nel tratto $(1, \dots + \infty)$. Ricordando la (57) potremo scrivere la (64) sotto la forma :

$$\prod_{r=0}^{\infty} [1 + \alpha(x_0 + r)] = [1 + \alpha(x_0)] \cdot e^{-\varphi(+\infty)} \cdot e^{\int_{x_0}^{+\infty} \alpha(x) dx}.$$

Supponendo $\alpha(x_0) = 0$, avremo :

$$\prod_{r=0}^{\infty} [1 + \alpha(x_0 + r)] = e^{-\varphi(+\infty)} e^{\int_{x_0}^{\infty} \alpha(x) dx}.$$

Si consideri che

$$\varphi(+\infty) = \lim_{x=\infty} \int_{x_0}^x \frac{f''(x)}{2f(x)} \eta(x) dx,$$

e, posto

$$\int_{x_0}^x \frac{f''(x)}{2f(x)} \eta(x) dx = \psi(x) - \psi(x_0),$$

si osservi che, nella ipotesi in cui ci siamo posti, la $\psi(x)$ è, per $x = +\infty$, infinitesima; onde risulta

$$\varphi(+\infty) = -\psi(x_0),$$

ed infine :

$$\prod_{r=0}^{\infty} [1 + \alpha(x_0 + r)] = e^{\psi(x_0)} \cdot e^{\int_{x_0}^{\infty} \alpha(x) dx}.$$

Nella Nota *Sui prodotti infiniti divergenti* si è trascurato il fattore $e^{\psi(x_0)}$, il quale sarà tanto più prossimo ad 1 quanto più x_0 è grande : e si è scritta l'eguaglianza approssimata :

$$\prod_{r=0}^{\infty} [1 + \alpha(x_0 + r)] = e^{\int_{x_0}^{+\infty} \alpha(x) dx}.$$

Modena, 8 febbraio 1904.

ETTORE BORTOLOTTI.