Über Grenzwerte von Doppelintegralen, die den bedingt konvergenten, einfachen Integralen analog sind.

Von Philipp Freud in Wien.

1. Die übliche Definition der uneigentlichen bestimmten Integrale läßt zwischen der Klasse der einfachen und derjenigen der mehrfachen Integrale einen wesentlichen Unterschied entstehen: jedes mehrfache Integral ist absolut konvergent,¹⁾ d. h. mit der Funktion f hat in einem Gebiete E zugleich stets ihr absoluter Betrag $|f|$ ein bestimmtes Integral. Hingegen ist für das Bestehen eines einfachen uneigentlichen Integrals die absolute Konvergenz zwar hinreichend, aber nicht notwendig.

Der Grund dieses Unterschiedes wird durch den Vergleich der Definitionen des einfachen und des Doppelintegrals in dem folgenden einfachen Falle klar: das Integrationsgebiet E sei einfach zusammenhängend, es bestehe nämlich im Falle eines einfachen Integrals aus einem Intervall ab ($a < b$), im Falle eines Doppelintegrals aus dem Innern einer sich selbst nicht treffenden geschlossenen Kontur, und die Funktion f sei in der Umgebung jedes Punktes von E , mit Ausnahme eines einzigen Randpunktes b , endlich und integrierbar. Jedem Werte einer positiven Variablen δ wird nun durch die Definition der uneigentlichen einfachen Integrale die Gesamtheit der Integralwerte:

$$\int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx = I_\varepsilon$$

zugeordnet, in welchen $0 < \varepsilon \leq \delta$ ist; hingegen durch die Definition der Doppelintegrale die Gesamtheit der Integralwerte:

$$S_D f(x, y) dx dy = I_D$$

über alle solchen Teilbereiche D von E , welche den Punkt b nicht enthalten, und deren Inhalte höchstens um δ kleiner sind als jener von E . Nähert sich alsdann in dem einen oder anderen Falle das genannte Wertsystem für ein unendlich abnehmendes δ einer bestimmten Grenze I , so ist diese das einfache resp. das doppelte Integral der Funktion f über das Gebiet E .

¹⁾ S. z. B.: Stolz, Grundzüge, XVIII. Abschn., Nr. 2—6.

Ein einfaches uneigentliches Integral besteht demgemäß z. B. unter der folgenden Annahme: Das Intervall ab zerfalle in eine Folge von Teilstrecken: $a a_1, a_1 a_2, \dots, a_n a_{n+1}, \dots, (a_n < a_{n+1}, \lim_{n=\infty} a_n = b)$, derart, daß $f(x)$ auf der ersten beständig > 0 , auf der nächsten < 0 , auf der dritten > 0 sei u. s. f. Ferner möge die Reihe

$$\sum_0^{\infty} \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x) dx = S, (a_0 = a),$$

bei dieser, aber nicht bei jeder Anordnung der Glieder konvergent sein. Dann ist die Bedingung für die Existenz des Grenzwertes I offenbar erfüllt, weil die Näherungsintegrale I_e im wesentlichen mit den Teilsummen der in der obigen Anordnung summierten Reihe S übereinstimmen; das Integral ist jedoch nicht absolut konvergent.

Ein Doppelintegral kann aber unter analogen Voraussetzungen nicht bestehen. Das Gebiet E zerfalle nämlich in eine Folge von — b nicht enthaltenden — Teilen $E_0, E_1, \dots, E_n, \dots, \left(\sum_0^{\infty} E_n = E \right)$, derart, daß $f(x, y)$ in ihnen abwechselnd positiv und negativ sei, und daß die Reihe:

$$\sum_0^{\infty} S_{E_n} f(x, y) dx dy = S$$

bei dieser, aber nicht bei jeder Anordnung der Glieder konvergiere. Dann gestattet es die Definition des uneigentlichen Doppelintegrals, einen Näherungsbereich D aus so vielen aufeinanderfolgenden Gebieten:

$E_1, \dots, E_m$ zusammenzusetzen, daß $E - \sum_0^m E_k < \delta$ ist, und

überdies Bereiche E_n , in welchen f beständig positiv ist, in beliebiger Anzahl hinzuzufügen. Auf diese Art aber kann man offenbar dem Näherungsintegral I_D einen beliebig großen, positiven Wert verschaffen.

2. Die verhältnismäßig große Unbestimmtheit des Näherungsbereiches D in der Definition der uneigentlichen Doppelintegrale ist also der Grund dafür, daß die Klasse der (uneigentlich) integrierbaren Funktionen von zwei Variablen vergleichsweise enger als die entsprechende Klasse von Funktionen einer Variablen begrenzt ist.

Es scheint, daß man diesen Unterschied aufheben könnte, indem man auch in der Erklärung der Doppelintegrale die Näherungsbereiche D als einfach zusammenhängend vorschriebe. Dies ist aber nicht der Fall¹⁾; man kann nämlich in dem vorhin angenommenen

¹⁾ Wie Stolz auf Grund einer Mitteilung des Herrn Prof. Wirtinger bewiesen hat (Sitzungsberichte der k. Akad. zu Wien [Nov. 1899]).

Beispiel jedes System D von Gebieten der Folge $E_1, \dots, E_n, \dots$ durch Einfügung so schmaler Streifen zusammenhängend machen und einen etwaigen mehrfachen Zusammenhang durch Ausscheidung so schmaler Streifen aufheben, daß die Bestandteile, welche dabei zu dem Doppelintegral I_D hinzukommen oder ihm entgehen, auf seinen Wert keinen wesentlichen Einfluß haben, also in dem vorhin besprochenen Falle die Divergenz nicht verhindern können.

Herr Prof. Wirtinger hat mir die Aufgabe gestellt zu untersuchen, ob und wie durch andere, geeignetere Spezialisierungen der Näherungsbereiche D in die Klasse der Doppelintegrale auch solche mit bedingter Konvergenz eingeführt werden könnten — etwa durch Ausschließung der Unendlichkeitsstellen mit Hilfe passender unendlich enger Konturen.

Die folgenden Ausführungen gelten der Beantwortung dieser Frage.

I. Die möglichen Methoden zur Erweiterung des Doppelintegralbegriffes.

3. Absolut konvergente Doppelintegrale. Man erhält die allgemeinste Klasse absolut konvergenter Doppelintegrale durch die folgende Definition: Eine Funktion $f(x, y)$ sei in jedem Punkte eines endlichen oder unendlichen Gebietes E eindeutig definiert, mit Ausnahme einer gewissen Teilpunktmenge d von E , von der jedem endlichen Stücke dieses Gebietes eine unausgedehnte Teilmenge angehöre; die Funktion sei in jedem endlichen, abgeschlossenen Teile von E , der keinen Punkt der Menge d enthält, endlich und integrierbar.

Man ordnet jedem Paare positiver Zahlen η, R die Gesamtheit der Teilbereiche D von E zu, welche folgende Eigenschaften haben: D ist abgeschlossen und meßbar und enthält keinen Punkt der Menge d , sein Inhalt ist höchstens um η kleiner als der Inhalt desjenigen Teiles von E , der ganz auf der mit dem Radius R um den Anfangspunkt des Koordinatensystems beschriebenen Kreisfläche liegt. Jedem Gebiete D ordnet man den Wert des darüber erstreckten Integrals der Funktion f zu.

Man sagt, daß die Funktion f ein uneigentliches, absolut konvergentes Doppelintegral über das Gebiet E habe, und daß dieses den Wert I besitze, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist: Es gibt zu jeder noch so kleinen Zahl ε eine Zahl R' und zu jedem Werte R , der $> R'$ ist, eine Zahl η' , derart, daß für jedes $\eta < \eta'$ sämtliche den beiden Zahlen η und R zugeordneten Integralwerte sich von I um weniger als ε unterscheiden.

4. Grenzwerte absolut konvergenter Doppelintegrale. Wenn man die eben definierte Klasse von Grenzwerten

durch Aufnahme bedingt konvergenter Integrale erweitern will, so wird man dies, ähnlich wie es bei den einfachen Integralen schon geschehen ist, dadurch zu erreichen suchen, daß man jedem Wertepaar η, R nicht die Gesamtheit der genannten Bereiche D , sondern nur einen irgendwie charakterisierten Teil dieser Gesamtheit zuordnet. Man könnte eine solche Änderung in der obigen Definition vornehmen und dadurch absolut und bedingt konvergente Integrale gleichzeitig als Grenzwerte von eigentlichen Integralen definieren. Man wird aber mit Vorteil für die Allgemeinheit die neu einzuführenden Integrale aus derjenigen Klasse K von Grenzwerten absolut konvergenter, eigentlicher und uneigentlicher Integrale entnehmen, welche durch die folgende Definition umschrieben wird und auch die absolut konvergenten Integrale selbst enthält:

Die Funktion f sei in jedem Punkte des endlichen oder unendlichen Gebietes E eindeutig definiert, mit Ausnahme der Punkte einer gewissen Menge d , von der jedem endlichen Teile des Gebietes eine unausgedehnte Teilmenge angehöre. Unter diesen Umständen soll im folgenden immer kurz erklärt werden, f sei im Gebiete E definiert. Die Funktion habe in jedem Teil von E , der keinen Punkt einer gewissen, ebenso wie d beschaffenen Menge e („Menge der singulären Punkte“) enthält, ein absolut konvergentes, eigentliches oder uneigentliches Integral; dagegen soll in keiner noch so kleinen allseitigen Umgebung eines Punktes der Menge e , soweit diese Umgebung zu E gehört, ein Integral bestehen.

Man ordnet jeder positiven Zahl δ ein irgendwie bestimmtes System von Teilbereichen D des Gebietes E , die von singulären Punkten frei sind, durch ein Gesetz zu, das folgende Konsequenz hat: Ist E_R derjenige Teil des Gebietes E , welcher der mit dem Radius R um den Nullpunkt beschriebenen Kreisfläche angehört, so kann man für jeden Wert von R und jede gegebene positive Zahl η eine positive Zahl δ_1 so bestimmen, daß für alle Werte $\delta < \delta_1$ die auf E_R gelegenen Teile aller zu δ gehörigen Bereiche D sich ihren Inhalten nach von E_R um weniger als η unterscheiden. — Jedem Bereiche D ordnet man den Wert des darüber erstreckten Integrals von f zu.

Es bestehe nun eine Zahl $I_E^D(f)$, die der folgenden Bedingung genüge: Zu jeder noch so kleinen Zahl ε gibt es eine Zahl δ' so, daß für jedes $\delta < \delta'$ sämtliche der Zahl δ zugeordneten Integralwerte sich von $I_E^D(f)$ um weniger als ε unterscheiden. — Ändert man den Bereich E , die Funktion f und das verwendete System von Näherungsbereichen D in jeder möglichen Weise, bei der die Konvergenz bestehen bleibt, ab, so erhält man die vollständige Klasse K der Grenzwerte $I_E^D(f)$.

5. Eindeutigkeit der in weiterem Sinne genommenen Integrale. Aus der Grenzwertklasse K wird

man eine Klasse I von Integralen in weiterem Sinne durch eine Vorschrift der folgenden Art entnehmen: Man ordnet jeder Funktion f einer irgendwie charakterisierten Klasse F von Funktionen, die in einem gegebenen Gebiete E definiert sind, durch irgend ein der Vorschrift von Nr. 4 entsprechendes Gesetz gewisse Systeme von Näherungsbereichen D zu. In dem Falle, daß für eines oder mehrere dieser Systeme Konvergenz im Sinne von Nr. 4 besteht, bestimmt die Definition der Klasse I , daß wenigstens einer von diesen Grenzwerten $I_E^D(f)$ in die Klasse I aufzunehmen ist, und mit welchen von ihnen dies geschieht. — Man erhält die ganze Klasse I , indem man alle möglichen Gebiete E zuläßt.

Das Zuordnungsgesetz wird, dem Integralbegriffe entsprechend, folgendem Grundsatz Geltung verschaffen müssen:

A) Zu einem gegebenen Gebiete E und einer darin definierten Funktion f der Klasse F gibt es in der Klasse I nicht zwei numerisch verschiedene Werte $I_E^D(f)$.

Die Forderung A) schließt im allgemeinen für jede Funktion f und jedes Integrationsgebiet E unendlich viele Grenzwerte der Klasse K von der Aufnahme in die Klasse I aus, ähnlich wie die Bevorzugung einer Anordnungsmethode der (bedingt konvergenten) Reihen unendlich viele Summenwerte einer jeden beseitigt und höchstens einen bestehen läßt.

Die Forderung A) ist z. B. dann erfüllt, wenn alle Systeme von Näherungsbereichen, die einem beliebigen Werte δ in bezug auf eine und dieselbe Funktion im Gebiete E zugeordnet werden, ein gemeinsames Teilsystem D enthalten, das, für sich genommen, ebenfalls den Vorschriften von Nr. 4 genügt.

6. Gleichartigkeit der Näherungsbereiche für verschiedene Funktionen. Die Definition der einfachen uneigentlichen Integrale ordnet zunächst allen Funktionen, die in einem gemeinsamen Integrationsgebiete durchweg gemeinsame singuläre Stellen haben, in diesem dieselben Näherungsbereiche zu und macht die geometrische Form derselben von der Verteilung der Singularitäten durch ein Gesetz abhängig, das sich auf alle möglichen Verteilungen anwenden läßt, sofern nur die singuläre Punktmenge unausgedehnt ist.

Eine entsprechende Festsetzung soll vorläufig auch für Doppelintegrale in weiterem Sinne getroffen werden, mit dem Unterschiede, daß auch mehrere Funktionen mit den gleichen singulären Stellen, aber verschiedenem analytischen Verhalten, in demselben Gebiete bestimmte Integrale in weiterem Sinne sollen haben können:

B) Die Definition der Klasse I ordnet allen denjenigen Funktionen der Klasse F , welche im Integrationsgebiete E dieselbe Menge singulärer Punkte haben, dieselbe Klasse von Näherungsbereich-Systemen $D, D', \dots$ zu.

Der Inhalt dieser Bedingung ist unwesentlich, wenn es zulässig ist, daß einer Funktion unendlich viele Systeme von Näherungsbereichen $D, D', \dots$ zugeordnet werden. Dies ist aber ausgeschlossen, wenn man mit dem Begriffe des bestimmten Integrals das folgende Postulat verbindet:

C) Ist eine Funktion f der Klasse F im Gebiete E gegeben, so kann man durch Konvergenzuntersuchungen der in Nr. 4 ausgeführten Art in endlicher Anzahl entscheiden, ob ein Grenzwert $I_E^D(f)$ in der Klasse I vorkommt oder nicht.

Es sind allerdings Klassen von bestimmten Integralen untersucht worden, für welche dieser Satz nicht zutrifft¹⁾; man wird ihn aber nicht entbehren können, wenn man tatsächlich von jeder Funktion entscheiden können will, ob sie in weiterem Sinne integrierbar ist.

7. Ausschließung der Hauptwerte. Die Theorie der einfachen Integrale liefert einen weiteren Hinweis für das Gesetz, durch welches einer Funktion in ihrem Integrationsgebiete Näherungsbereiche zuzuordnen sind. Die absolut konvergenten einfachen und auch die mehrfachen Integrale haben nämlich die Eigenschaft, daß aus der eigentlichen oder uneigentlichen Integrierbarkeit einer Funktion f über ein Gebiet E ihre Integrierbarkeit über jeden beliebigen Teil E_1 von E folgt. Dieser Satz gilt für bedingt konvergente, einfache Integrale ebenfalls, mit der Einschränkung, daß die genannten Teilgebiete E_1 aus zusammenhängenden Intervallen in endlicher Anzahl bestehen müssen. Es sind allerdings auch solche Grenzwerte bestimmter Integrale untersucht worden, für welche der Satz nicht einmal in diesem beschränkten Sinne gilt, während die anderen elementaren Sätze über bestimmte Integrale für sie gültig bleiben, nämlich die sogenannten Hauptwerte²⁾: Ist die Funktion $f(x)$ im Intervall ab , abgesehen von den Umgebungen der Punkte $c_1, \dots, c_m$, endlich und integrierbar, so heißt der Grenzwert:

$$\lim_{\delta=0} \left(\int_{a+\varepsilon}^{c_1-\varepsilon_1} f dx + \int_{c_1+\varepsilon'_1}^{c_2-\varepsilon_2} f dx + \dots + \int_{c_m+\varepsilon'_m}^{b-\varepsilon'} f dx \right) = H$$

uneigentliches bestimmtes Integral der Funktion f , wenn er unter der Voraussetzung besteht, daß $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon_1, \varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_m$ innerhalb des Intervalls $0 \dots \delta$ unbeschränkt variabel sind; besteht er jedoch nur unter der Beschränkung, daß stets $\varepsilon_1 = \varepsilon'_1, \dots, \varepsilon_m = \varepsilon'_m, \varepsilon = \varepsilon'$ ist, so nennt man ihn Hauptwert des (nicht konvergenten) Integrals.

¹⁾ Die Erweiterung von Dinis Integralbegriff bei Schoenflies, Bericht über Punktmannigfaltigkeiten, p. 185, und die von Harnacks Integralbegriff bei Moore, American Soc. Transactions, II, 1901.

²⁾ Cauchy, Résumé des leçons... sur le calcul infinitésimal, 1823, t. I, p. 96—97.

Dieser kann offenbar im Intervall ab bestehen, ohne daß es in einem der Intervalle ac_i , c_ib der Fall wäre.

Es gibt Grenzwerte von absolut konvergenten Doppelintegralen, die sich ähnlich wie Hauptwerte verhalten. Z. B. hat die Funktion:

$$\frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \arctan \frac{y}{x}$$

über den Teil des Quadrats: $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq a$, der außerhalb eines beliebig kleinen, um den Punkt: $x=0$, $y=0$ beschriebenen Kreises liegt, ein eigentliches Doppelintegral; dieses nähert sich, wenn der Kreis unendlich klein wird, einer bestimmten Grenze. Wählt man dagegen nur eine der beiden Hälften, in die das Quadrat durch die Gerade $y=x$ zerlegt wird, als Integrationsgebiet, so tritt Divergenz ein, durch welche unendlich engen Linien man den Punkt $(0, 0)$ auch ausschließen möge.

Nun wird von den Hauptwerten der einfachen Integrale in der ganzen Literatur ausdrücklich erklärt, daß sie nicht zu den bestimmten Integralen gezählt werden sollen. Man wird daher auch die Definition einer Klasse von Doppelintegralen in weiterem Sinne so fassen, daß Grenzwerte der eben angeführten Art ausgeschlossen bleiben.

8. Die absolut und die bedingt konvergenten, einfachen Integrale werden von den Hauptwerten durch eine Definition getrennt, welche die Existenz des Integrals in jedem einfach zusammenhängenden Teile des Integrationsgebietes als Folge der in diesem stattfindenden Konvergenz erscheinen läßt. Im Falle von mehr als einer Integrationsvariablen aber würde eine solche Definition die absolut konvergenten Integrale nicht nur von den Hauptwerten, sondern auch von allen Grenzwerten $I_E^D(f)$, die nicht selbst absolut konvergente Integrale sind, trennen; ihre Klasse würde also nicht erweitert. Um dies zu erreichen, muß man vielmehr die Teilgebiete E_i von E , für welche die Existenz von Grenzwerten $I_{E_i}^D(f)$ eine Folge der Zugehörigkeit eines Grenzwertes $I_E^D(f)$ zur Klasse I sein soll, durch weitergehende geometrische Bedingungen beschränken. Wie weit dieselben gehen dürfen, ohne daß dem historischen Begriffe des bestimmten Integrals widersprochen würde, dafür scheint ein genauer Hinweis nicht zu existieren; in keinem Falle aber werden sie so weit gehen dürfen, daß Grenzwerte wie der in Nr. 7 betrachtete in der Klasse I vorkommen könnten. Diese Möglichkeit wird im Falle von zwei Integrationsvariablen durch eine Definition von folgender Art vermieden werden:

D) Die Definition der Klasse I ordnet jeder Funktion f der Klasse F im Gebiete E solche Systeme von Näherungsbereichen D zu, daß ein Grenzwert $I_E^D(f)$ in der Klasse I nur dann vorkommen kann, wenn die Klasse K für jedes reguläre Teilgebiet E_i von E einen Grenzwert $I_{E_i}^D(f)$ enthält.

E_1 wird ein reguläres Teilgebiet von E genannt, wenn der innerhalb E gelegene Randteil von E_1 aus regulären, analytischen Bögen in endlicher Zahl besteht.

Die Forderung D) hat, wie man durch eine kurze Überlegung feststellt, die Konsequenz, daß die Umfänge der Systeme von Näherungsbereichen D , welche durch die Definition von I den Funktionen der Klasse F zugeordnet werden, nicht unter gewisse Grenzen herabsinken. Man betrachte z. B. die Klasse aller, oder auch nur aller analytischen, Funktionen f , die im Quadrat: $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq a$ definiert und darin, mit Ausnahme der Umgebung des Punktes $x = y = 0$, integrierbar sind; man ordne ihnen für jeden Wert δ die Gesamtheit der Teilgebiete D des Quadrats zu, die daraus durch Fortlassung der Kreisquadrantenfläche $x^2 + y^2 < \delta^2$ entstehen. Nach Nr. 7 erhält man dann auch solche Grenzwerte $I_E^D(f)$, die der Bedingung D) nicht genügen. Der Grund dafür liegt darin, daß die Klasse der Bereiche D zu eng begrenzt worden ist; wenn man es zuläßt, daß der Punkt $(0, 0)$ nicht nur durch unendlich kleine Kreisquadranten, sondern durch beliebige monotone, unendlich enge Konturen ausgeschlossen wird, so ist die Klasse der D hinreichend weit, um der Bedingung D) Geltung zu verschaffen (s. den III. Abschn.).

9. Teilung und Zusammenfügung von Integrationsgebieten. Es kann ferner verlangt werden, daß, wie es bei allen bisher untersuchten bestimmten Integralen zutrifft, neben der Bedingung D die folgenden, weitergehenden Forderungen erfüllt werden:

$D')$ Die Definition der Klasse I ordnet jeder Funktion f der Klasse F im Gebiete E solche Systeme von Näherungsbereichen D zu, daß ein Grenzwert $I_E^D(f)$ in der Klasse I nur dann vorkommen kann, wenn die Klasse I für jedes reguläre Teilgebiet E_1 von E einen Grenzwert $I_{E_1}^{D_1}(f)$ enthält.

E) Enthält die Klasse I die Grenzwerte $I_{E_1}^{D_1}(f) \dots, I_{E_n}^{D_n}(f)$, liegt ferner kein Punkt zugleich im Innern¹⁾ von zweien der Gebiete $E_1, \dots, E_n$, und bildet jedes von diesen einen regulären Teil ihrer Gesamtheit E , so gibt es in der Klasse I auch einen Grenzwert $I_E^D(f)$, für welchen die Relation:

$$I_E^D(f) = I_{E_1}^{D_1}(f) + \dots + I_{E_n}^{D_n}(f)$$

gilt.

Fast alle analytischen Eigenschaften der bestimmten Integrale beruhen auf den beiden Tatsachen, die durch die Forderungen $D')$ und E) auf die Integrale in weiterem Sinne übertragen werden: sie sind es, welche die Untersuchung der in einem Gebiete E (eigentlich oder

¹⁾ Hier und im folgenden wird zwischen „in“ und „innerhalb“ oder „im Innern“ unterschieden.

uneigentlich) integrierbaren Funktionen auf ihre Untersuchung in den Umgebungen der einzelnen Punkte des Gebietes reduzieren.

Eine genauere Diskussion der Sätze $D')$ und $E)$ zeigt, daß sie der Funktionenklasse F einen gewissen Mindestumfang sichern; hatte die Klasse I nämlich vorher nur den Bedingungen $A)$ bis $D)$ zu genügen, so konnte man die Klasse F z. B. auf die Funktionen beschränken, deren singuläre Punkte gerade Strecken bilden; die Forderung $D')$ fügt noch Funktionen mit isolierten singulären Punkten, $E)$ Funktionen mit gebrochenen singulären Linien hinzu. — Ferner ergeben $D')$ und $E)$ die Notwendigkeit, daß im allgemeinen zu jedem Grenzwert der Klasse I in dieser Klasse noch eine unendliche Mannigfaltigkeit weiterer Grenzwerte vorkommen müsse.

10. Beschränkung der Funktionenklasse F . Für die Gesamtheit derjenigen Funktionen der Klasse F , welche einerseits eine gegebene Menge e von singulären Punkten besitzen und anderseits in weiterem Sinne integrierbar sind, muß nach $B)$ und $C)$ Konvergenz gerade bei einem jener Näherungsbereich-Systeme $D, D', \dots$ (in endlicher Anzahl) bestehen, welche ihnen durch die Definition der Klasse I zugeordnet werden. Da aber bei gegebenen Systemen von Näherungsbereichen Konvergenz im allgemeinen nur für Funktionen von bestimmtem analytischen Charakter eintritt, wird schon durch die Angabe eines einzigen Doppelintegrals in weiterem Sinne über das Gebiet E , dessen Integrand die gegebene Singularitätenmenge e hat, im Verein mit den Bedingungen $B)$ und $C)$ die Klasse aller übrigen Grenzwerte I mit denselben Singularitäten wesentlich beschränkt.

Nun wurde die Klasse der absolut konvergenten, einfachen Integrale durch die Forderung erweitert, daß gewisse klassische, aber nicht absolut konvergente Grenzwerte eigentlicher Integrale, wie z. B.:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{a=\infty} \int_0^a \frac{\sin x}{x} dx$$

ebenfalls als bestimmte Integrale aufgefaßt werden sollten.

Auch eine Verallgemeinerung der absolut konvergenten Doppelintegrale wird durch eine Forderung, daß bestimmte, vorgegebene Grenzwerte von solchen als Doppelintegrale in weiterem Sinne gelten sollen, orientiert werden müssen. Durch die Bestimmung, daß die Sätze $D)$ und $E)$ bestehen sollen, treten noch andere Grenzwerte der Klasse K als notwendige Bestandteile der Klasse I auf; dadurch entsteht ein Gegensatz zu der vorhin konstatierten Beschränkung dieser Klasse, der eine Hauptschwierigkeit für die Erweiterung des Doppelintegralbegriffes bilden dürfte.

Angenommen, man könne den Funktionen einer Klasse $\bar{F}$ im Gebiete E Näherungsbereiche durch ein solches Gesetz zuweisen, daß die Forderungen A) bis D) erfüllt seien und dabei speziell auch diejenigen Grenzwerte $I_E^D(f)$ erhalten werden, deren Zugehörigkeit zur Klasse I von vornherein postuliert worden sei (s. o.). Hingegen lasse sich die Klasse $\bar{F}$ nicht so erweitern und das Zuordnungsgesetz sich nicht so abändern, daß außer A) bis D) auch die Forderungen D') und E) erfüllt wären.

Um dies herbeizuführen, kann man eine Erweiterung der für jedes Gebiet gegebenen „Normalfunktionen-Klasse“ $\bar{F}$ mit einer Modifikation der Forderung B) kombinieren. Man bildet für das Gebiet E die Klasse F aus den Funktionen der Klasse $\bar{F}$ und aus allen Funktionen f , die der folgenden Bedingung genügen: Die Definition der Funktion f bestimmt eine Zerlegung von E in reguläre Teilgebiete endlicher Zahl: $E_1, \dots, E_m$ ($m \geq 1$), derart, daß allgemein in einem bestimmten, E_k als regulären Teil enthaltenden Gebiete, E_k^0 wenigstens eine Normalfunktion besteht, die sich in E_k auf f reduziert, und deren sämtliche singulären Stellen durch f eindeutig bestimmt sind. Die Forderung B) wird dann durch die folgende, weniger weitgehende, ersetzt:

B') Man ordnet allen denjenigen Funktionen der Klasse $\bar{F}$, welche dieselben singulären Punkte haben, dieselben Näherungsbereiche zu; ebenso allen denjenigen Funktionen der Klasse F , die nicht zu $\bar{F}$ gehören, und welchen die Teilgebiete $E_1, \dots, E_m$, die Fortsetzungsgebiete $E_1^0, \dots, E_m^0$ und in diesen die singulären Stellen der betreffenden Normalfunktionen gemeinsam sind.

Die Notwendigkeit, aus der Definition einer Funktion f die Gebiete $E_1, \dots, E_m$, $E_1^0, \dots, E_m^0$ und die Singularitäten der fortgesetzten Funktionen zu bestimmen, legt es nahe, die Klasse $\bar{F}$ auf analytische Funktionen oder auf Summen von analytischen und von singularitätenfreien Funktionen zu beschränken.

11. Sukzessive Erweiterung der Integralklasse I . Die Bedingung E) führt verwickeltere Formen von singulären Mengen ein, als ohne sie zugelassen werden müßten. Die Schwierigkeit komplizierterer singulärer Gebilde kann man, ähnlich wie es in der Theorie der einfachen¹⁾ und der wiederholten Integrale²⁾ geschehen ist, auch bei den Doppelintegralen durch einen Zusatz zu der Vorchrift, die in Nr. 5 für die Erweiterung des Integralbegriffes gegeben wurde, reduzieren. Man kann nämlich zunächst die Klasse F

¹⁾ Dini-Lüroth, Grundlagen, § 217.

²⁾ De la Vallée-Poussin, Journal de Mathématiques, 1892, p. 456.

enger annehmen, als es den Zwecken der Erweiterung oder den gestellten Bedingungen, z. B. E), entspricht, und dann aus der so erhaltenen Klasse I nach derselben Vorschrift eine neue Klasse I_1 ableiten, nach der (in Nr. 4 und 5) I aus der Klasse der absolut konvergenten Integrale gewonnen wurde. Ebenso kann man zu der Klasse I_1 eine Klasse I_2 hinzufügen u. s. f. Man darf jedoch, wenn die Forderung C) erfüllt sein soll, solche Zusatzdefinitionen nur in endlicher Anzahl aufstellen. Alle dadurch eingeführten Grenzwerte entstammen der Klasse K .

Die Erfüllbarkeit der aufgestellten Regeln soll durch Definition einer speziellen Klasse von Grenzwerten $I_E^D(f)$, welche den Forderungen A), B'), C), D'), E) genügt, erprobt werden. Als Hinweis für diese Definition soll die Forderung gelten, daß Funktionen wie $\frac{\sin x}{x}$, $\frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$, $\sin(x^2)$, ..., kurz alle analytischen Funktionen, die im Intervall $0 \dots \infty$ oder in einem anderen singuläre Punkte in endlicher Zahl und bedingt konvergente, einfache Integrale haben, als Funktionen von x und y (konstanthinsichtlich y) betrachtet, Doppelintegrale in weiterem Sinne über Rechtecke von endlicher Höhe, deren Basis das betreffende Integrationsintervall ist, erhalten, und daß die Werte dieser Doppelintegrale gleich den Produkten aus den Werten der resp. einfachen Integrale und den Höhen der Integrationsrechtecke seien.

II. Erste Erweiterung der Doppelintegralklasse.

12. Voraussetzungen. Die reelle, eindeutige analytische Funktion $f_1(x, y)$ habe das endliche oder unendliche Definitionsgebiet G_1 ¹⁾; abgesehen von einer Punktmenge e , von der auf jeder endlichen Fläche höchstens eine unausgedehnte Teilmenge liege, bestehe für jeden Punkt von G_1 eine Umgebung, in deren zum Definitionsgebiet selbst gehörigem Teile die Funktion ein absolut konvergentes, eigentliches oder uneigentliches Doppelintegral besitze. Diese Voraussetzung kann insbesondere auch für einen unendlich fernen Punkt der xy -Ebene erfüllt sein, d. h. dann: wenn man in der den betreffenden unendlich fernen Punkt bestimmenden Richtung zwei beliebige parallele, gleichgerichtete Halbstrahlen zieht, so besteht ein absolut konvergentes Doppelintegral über den Teil des Gebietes G_1 , welcher außerhalb eines hinreichend großen Kreises um den Punkt $(0, 0)$ und zwischen

¹⁾ Das Definitionsgebiet wird dadurch erklärt, daß sich die Funktion in einer Umgebung jedes seiner inneren Punkte und keines im Endlichen gelegenen Randpunktes in eine gewöhnliche, absolut konvergente Potenzreihe mit reellen Koeffizienten entwickeln lasse.

den beiden Parallelen liegt. Jene unendlich fernen Punkte, für welche dies nicht zutrifft, werden zur Menge e gerechnet. Diese bestehe aus sämtlichen zu G_1 gehörigen Punkten gewisser regulärer analytischer Linien $\Lambda, \Lambda', \dots$ in endlicher Zahl.¹⁾

E sei ein endliches oder unendliches Teilgebiet von G_1 ; es sei von einer einfachen geschlossenen Kontur²⁾, die aus regulären analytischen Bögen in endlicher Zahl bestehe, begrenzt, und von jedem dieser Bögen gehe die direkte analytische Fortsetzung beiderseits ins Äußere von E ; (daraus folgt insbesondere, daß die Randkontur von E nicht aus einem einzigen regulären Bogen besteht). Die Parameterwerte t der zu E gehörigen Punkte von Λ mögen sich innerhalb eines Intervalls $t_1 t_2$ befinden, in dem die Linie regulär bleibe; das entsprechende gelte für $\Lambda', \dots$. Alle Punkte, in denen diese Linien sich selbst oder einander schneiden (und deren es nur eine endliche Anzahl gibt), mögen in positiver Distanz von E liegen. Dann enthält E von $\Lambda, \Lambda', \dots$ reguläre Bogenstücke und isolierte Punkte höchstens in endlicher Anzahl, und zwar nur auf dem Rande.

Unter einem singulären Bogen des Gebietes E (der sich auch auf einen Punkt reduzieren kann), soll stets das ganze Stück einer der Linien $\Lambda, \Lambda', \dots$ verstanden werden, das sich in direkter analytischer Fortsetzung von einem seiner Punkte aus auf dem Rand von E beschreiben läßt. Keiner von ihnen, der nicht gerade ist, stehe auf einem anstoßenden Randbogen von E senkrecht.

13. Bildung der Näherungsbereiche. Jeder singuläre Bogen von E wird beiderseits um ein beliebig kleines Stück ins Äußere von E analytisch verlängert, wodurch aus ihm die Linie λ mit den Endpunkten a und b werde. Man errichtet über λ ein krummliniges Rechteck R von beliebig kleiner Höhe δ , indem man diejenige (eindeutig bestimmte) Parallelkurve $p_\delta(\lambda)$, von der wenigstens ein Punkt innerhalb E liegt, und, von den Punkten a und b aus, zwei passende, zu λ normale Strecken von der Länge δ zieht. Irgend zwei Punkte dieser beiden Strecken verbindet man durch eine einfache, nicht ins Äußere des Rechteckes tretende und λ nicht treffende Linie l , die aus regulären analytischen Bögen in endlicher Anzahl bestehe. l bildet mit λ und etwa noch je einem Teile der

¹⁾ Eine reguläre analytische Linie wird durch zwei reelle, analytische Funktionen $x = x(t)$, $y = y(t)$ mit nicht gleichzeitig verschwindenden Ableitungen definiert gedacht, deren Parameter t so gewählt ist, daß die Linie durch analytische Fortsetzung möglichst weit verlängert werden kann; sie soll auch unendlich ferne Punkte, in welchen $\frac{1}{x}$ und $\frac{1}{y}$ (oder $\frac{1}{x}$ und y etc.) sich regulär verhalten und nicht gleichzeitig verschwindende Ableitungen besitzen, enthalten können.

²⁾ Diese soll auch durchs Unendliche gehen können; dann reduziert sie sich auf eine einfache, d. h. sich selbst nicht treffende Linie, die nach beiden Seiten hin sich demselben Halbstrahl im Unendlichen unbegrenzt nähert.

beiden Normalstrecken eine einfache, geschlossene Kontur, deren Inneres das „zwischen l und λ gelegene Gebiet“ heißt. Ist l' eine zweite Linie von derselben Art wie l , die nicht außerhalb des zwischen l und λ gelegenen Gebietes verläuft, so bildet die Gesamtheit der Punkte, die zwischen l und λ , aber nicht zwischen l' und λ liegen, das „zwischen l und l' gelegene Gebiet.“

14. Die Ausschließungslinien l mögen einmal so gewählt werden, daß sie jede im Rechteck errichtete Höhe (von der Länge δ), das andermal so, daß sie jede im Rechteck gezogene Parallellinie von λ nur längs eines zusammenhängenden Stückes (oder in einem Punkt) treffen.

Läßt man aus E die zwischen den Linien λ und je einer zugehörigen Linie l liegenden Gebiete weg, so erhält man im ersten Falle ein Gebiet $D(l)$, im zweiten ein Gebiet $D'(l)$, von denen jedes die in Nr. 4 genannten Eigenschaften eines zu δ gehörigen Näherungsbereiches besitzt. Man ordnet jedem Werte von δ die beiden Systeme $D(l)$ und $D'(l)$ zu, die durch willkürliche, nur den Bedingungen entsprechende Änderung der Linie l erhalten werden.

15. Definition von Doppelintegralen in weiterem Sinne. Es sei φ eine beliebige, in G_1 definierte und von singulären Punkten freie Funktion; die Funktion $f_1 + \varphi = f$ hat im Gebiete G_1 dieselben singulären Punkte wie f_1 und soll für die gegenwärtige Erweiterung als Typus der in Nr. 10 genannten Normalfunktionen im Gebiete G_1 gelten. Die Funktionen f bilden in jedem Teilgebiete E von G_1 die Klasse F derjenigen Funktionen, welchen Näherungsbereiche zugeordnet werden, und zwar erhält jede von ihnen dieselben Näherungsbereiche wie die betreffende Funktion f_1 .

Besteht einer der beiden Grenzwerte:

$$\lim_{\delta=0 D(\bar{Q})} S f d x d y = I_E^D(f), \quad \lim_{\delta=0 D'(\bar{Q})} S f d x d y = I_E^{D'}(f),$$

so soll er als Doppelintegral (in weiterem Sinne) der Funktion f über das Gebiet E bezeichnet werden.

Diese Definition setzt voraus, daß man von jeder in einem Gebiete E gegebenen Funktion f entscheiden könne, ob sie in zwei Bestandteile f_1 und φ der angenommenen Art zerlegbar ist, und daß man, wenn dies der Fall ist, die Zerlegung wirklich durchführen könne. Drückt die Gleichung: $f = f_1 + \varphi = f_1' + \varphi'$ zwei verschiedene Zerlegungen derselben Art aus, so haben offenbar f_1 und f_1' dieselben singulären Linien und Näherungsbereiche. Daher führen beide Zerlegungen entweder zu demselben oder zu keinem Grenzwert $I_E^D(f)$ (oder $I_E^{D'}(f)$). Besteht ein solcher, so gilt die Relation:

$$I_E^D(f) = I_E^D(f_1) + S_E \varphi d x d y = I_E^D(f_1') + S_E \varphi' d x d y.$$

Der Forderung A) (Nr. 5) ist dabei entsprochen; denn die Annahme: $l = p_\delta(\lambda)$ ergibt, wie man leicht beweist, gemeinsame Bereiche $D(l)$, $D'(l)$ für jeden hinreichend kleinen Wert von δ .

Statt die beiden Grenzwertklassen $I_E^D(f)$ und $I_E^{D'}(f)$ nebeneinander zu betrachten, ist es bequemer, sie in eine gemeinsame Klasse von Grenzwerten: $I_E^d(f)$ aufzunehmen, welche man dadurch erhält, daß man die den Systemen $D(l)$ und $D'(l)$ gemeinsamen Gebiete $\Delta(l)$ zu Näherungsbereichen wählt. Daß damit das System der Näherungsbereiche nicht zu weit eingeschränkt ist, um der Forderung D) (Nr. 8) zu genügen, wird sich im folgenden zeigen.

Wollte man aber das System der Näherungsbereiche Δ so weit beschränken, daß die Linien l als parallel zu den λ vorgeschrieben würden, so wäre die Bedingung D) nicht mehr erfüllt (vgl. Nr. 8). Z. B. würde für die Funktion:

$$f' = \frac{\cos y}{x^2}$$

der Grenzwert $I_E^d(f')$ bestehen oder nicht bestehen, je nachdem man den Streifen $0 \leq x$, $0 \leq y \leq \pi$ oder seine Hälfte $0 \leq x$, $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ zum Integrationsgebiete E wählte.

Es ist evident, daß alle drei Klassen von Grenzwerten den Forderungen C) (Nr. 6) und B') (Nr. 10) genügen.

16. Beispiele. Die reelle analytische Funktion:

$$f = \frac{1}{x} \frac{\sin \frac{1}{x}}{y^2}, \quad (0 \leq \rho < 1),$$

hat einen beliebigen der vier Quadranten, z. B. den durch $x \geq 0$, $y \geq 0$ bestimmten, zum Definitionsbereich und in diesem, abgesehen von unendlich fernen Punkten, die einzige singuläre Linie $x = 0$. Denn, ist $M \geq x \geq \delta > 0$ und $N \geq y \geq \varepsilon > 0$, so bleibt:

$$\int_{\varepsilon}^N dy \int_{\delta}^M |f| dx = \frac{N^{1-\rho} - \varepsilon^{1-\rho}}{1-\rho} \int_{\delta}^M \frac{1}{x} \left| \sin \frac{1}{x} \right| dx < \frac{N^{1-\rho} - \varepsilon^{1-\rho}}{1-\rho} \int_{\delta}^{\infty} \frac{1}{x} \left| \sin \frac{1}{x} \right| dx,$$

also unter einer von N und δ abhängigen, von M und ε unabhängigen, endlichen Grenze; folglich hat die Funktion f in jedem endlichen, von der y -Achse in einem positiven Minimalabstand gelegenen Teile des Quadranten ein absolut konvergentes Doppelintegral und in $x = +\infty$, $y = 0$ einen gewöhnlichen Punkt. Hingegen

ist für je drei beliebige, positive Zahlen ε , M , N , der mittlere Ausdruck der letzten Ungleichung beliebig groß, wenn man δ hinreichend klein annimmt; daher ist jeder Punkt der Geraden $x=0$ singular.

In dem Gebiete $E: 0 \leq x, 0 \leq y \leq N$ zieht man eine Linie $l: x = \varphi(y)$, unter φ eine im Intervall $0..N$ eindeutige, positive und stetige Funktion verstanden, deren Wert eine vorgegebene positive Größe δ nicht übersteigt. — Man bezeichnet das nicht zwischen l und der singulären Strecke $\lambda: x=0$ gelegene Teilgebiet von E mit $D(l)$, dann ist:

$$S_{D(l)} f dx dy = \int_0^N \frac{dy}{y^\rho} \int_0^{\frac{1}{\varphi(y)}} \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} dx = \frac{\pi}{2} \frac{N^{1-\rho}}{1-\rho} - \int_0^N \frac{dy}{y^\rho} \int_0^{\varphi(y)} \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} dx.$$

Nach dem zweiten Mittelwertsatze gibt es eine Zahl η zwischen 0 und $\varphi(y)$, derart, daß:

$$\int_0^{\varphi(y)} \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} dx = \varphi(y) \int_{\frac{1}{\varphi(y)}}^{\frac{1}{\eta}} \sin z dz$$

ist. Der absolute Wert des letzten Ausdruckes ist $< 2\delta$, also ist:

$$\left| \frac{\pi}{2} \frac{N^{1-\rho}}{1-\rho} - S_{D(l)} f dx dy \right| < \frac{2\delta N^{1-\rho}}{1-\rho},$$

und es besteht:

$$I_E^D(f) = \frac{\pi}{2} \frac{N^{1-\rho}}{1-\rho}.$$

Die Funktion:

$$f' = \frac{1}{x} \sin \frac{y}{x}$$

hat die Halbebene $x \geq 0$ zum Definitionsgebiete, die Gerade $x=0$ zur singulären Linie und den Punkt $x = +\infty, y=0$ zum gewöhnlichen Punkte. Denn bei Anwendung der früheren Bezeichnungen ließt das Doppelintegral:

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^N dy \int_0^M |f'| dx &= \int_{\varepsilon}^N dy \int_{\frac{1}{M}}^{\frac{1}{\delta}} \left| \frac{\sin yz}{yz} \right| y dz = \\ &= \int_{\varepsilon}^N dy \int_{\frac{y}{M}}^{\frac{y}{\delta}} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt < \int_0^N dy \int_0^{\frac{N}{\delta}} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt = N \int_0^{\frac{N}{\delta}} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt \end{aligned}$$

unter einer nur von N und δ abhängigen, endlichen Grenze; und anderseits ist für beliebig gegebene positive Werte von ε , M und N und für hinreichend kleine Werte von δ : $\frac{y}{M} \leq \frac{N}{M} < \frac{\varepsilon}{\delta} \leq \frac{y}{\delta}$, also ist:

$$\int_{\varepsilon}^N dy \int_{\frac{y}{M}}^{\frac{y}{\delta}} \frac{|\sin t|}{t} dt > \int_{\varepsilon}^N dy \int_{\frac{N}{M}}^{\frac{\varepsilon}{\delta}} \frac{|\sin t|}{t} dt = (N - \varepsilon) \int_{\frac{N}{M}}^{\frac{\varepsilon}{\delta}} \frac{|\sin t|}{t} dt$$

zugleich mit $\frac{1}{\delta}$ unendlich groß (das würde sich auch für negative Werte von ε und N ergeben).

In dem Gebiete E : $x \geq 0$, $0 \leq y \leq N$ zieht man eine Linie l : $y = \psi(x)$, unter $\psi(x)$ eine eindeutige, stetige und nicht negative Funktion, $\leq N$ verstanden, die auf einer — den Punkt 0 nicht enthaltenden Teilstrecke δ_1 , δ_2 ($\delta_1 < \delta_2$) des Intervalls $0 \dots \delta$ definiert ist und in einem der beiden Endpunkte, z. B. δ_1 , den Wert Null, im anderen den Wert N annimmt. Man bezeichnet den — nicht zwischen l und der singulären Strecke λ : $x = 0$ gelegenen — Teil von E mit D' (l). Dann ist:

$$S_{D'(l)} f' dx dy = \int_{\delta_1}^{\delta_2} dx \int_0^{\psi(x)} \frac{1}{x} \sin \frac{y}{x} dy + \int_{\delta_2}^{\infty} dx \int_0^N \frac{1}{x} \sin \frac{y}{x} dy.$$

Das erste dieser beiden Doppelintegrale ist:

$$\left| \int_{\delta_1}^{\delta_2} dx \int_0^{\psi(x)} \sin z dz \right| \leq \int_{\delta_1}^{\delta_2} \left| 1 - \cos \frac{\psi(x)}{x} \right| dx \leq 2(\delta_2 - \delta_1),$$

also mit δ unendlich klein; das zweite läßt sich in die Form:

$$\begin{aligned} \int_{\delta_2}^{\infty} dx \int_0^{\frac{N}{x}} \sin z dz &= \int_{\delta_2}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{N}{x} \right) dx = \\ &= N \int_0^{\frac{N}{2\delta_2}} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt = 2\delta_2 \sin^2 \frac{N}{2\delta_2} + N \int_{\frac{N}{2\delta_2}}^{\frac{N}{\delta_2}} \frac{\sin t}{t} dt \end{aligned}$$

setzen und hat daher für ein unendlich kleines δ den Grenzwert

$$I_E^{D'}(f') = \frac{N\pi}{2}.$$

17. Existenzbedingung. Dafür, daß eine gegebene Funktion f im Gebiete E ein Integral in weiterem Sinne: $I_E^d(f)$ besitze, ist die folgende Bedingung notwendig und hinreichend: Zu jeder positiven Zahl ε gibt es einen Wert $\delta > 0$, derart, daß für alle Paare von zugehörigen Näherungsbereichen: $\Delta(l)$, $\Delta(l_1)$ die Ungleichung:

$$|S_{\Delta(l)} f dx dy - S_{\Delta(l_1)} f dx dy| < \varepsilon \quad (1)$$

bestehe.

Dem Gebiete E mögen etwa n singuläre Bögen λ angehören; dann ist für die Existenz von $I_E^d(f)$ schon die spezielle notwendige Bedingung hinreichend, daß für jeden dieser Bögen λ bei hinreichend kleinem ε die Ungleichung:

$$|S_{(l, p_\lambda)} f dx dy| < \frac{\varepsilon}{2n} \quad (2)$$

gelte, unter l eine beliebige der zu δ gehörigen Ausschließungslinien, unter p_λ eine beliebige zwischen l und λ verlaufende Parallellinie von λ und unter (l, p_λ) das zwischen l und p_λ gelegene Gebiet, soweit dieses zu E gehört, verstanden. Denn, sind $\Delta(l)$ und $\Delta(l_1)$ zwei beliebige, zu δ gehörige Näherungsbereiche, so hat man nur alle Parallellinien p_λ gleichzeitig in den Zwischengebieten (λ, l) und (λ, l_1) zu ziehen, um aus (2):

$$|S_{\Delta(l)} f dx dy - S_{\Delta(l_1)} f dx dy| \leq \sum (|S_{(l, p_\lambda)} f dx dy| + |S_{(l_1, p_\lambda)} f dx dy|) < 2n \frac{\varepsilon}{2n}$$

(die Summe über die n Bögen λ erstreckt) zu erhalten. Wählt man andererseits für alle λ bis auf eines $l = l_1$ und für dieses eine $\lambda: l_1 = p_\lambda$, so folgt aus der Bedingung (1):

$$|S_{(l, p_\lambda)} f dx dy| < \varepsilon. \quad (2^a)$$

18. Teilung des Integrationsgebietes. Man setzt voraus, daß $I_E^d(f)$ bestehe. E_1 sei ein Teil von E , der die in Nr. 12 vorausgesetzten Eigenschaften ebenfalls besitze. Es ist zu beweisen, daß auch $I_{E_1}^d(f)$ besteht.

Die Randkurve von E_1 hat mit der von E Bögen und Punkte nur in endlicher Anzahl gemein, und jeder für E singuläre Bogen λ enthält nur eine endliche Anzahl von Bögen $\lambda_1, \lambda'_1, \dots$ die für E_1 singulär sind.

Es soll nachgewiesen werden, daß für jeden der Bögen $\lambda_1, \lambda'_1, \dots$ in E_1 die Bedingung (2^a) (Nr. 17) erfüllt ist. — Zu einem beliebigen dieser Bögen zieht man, nach der in Nr. 13 gegebenen Regel, eine Linie l_1 (Endpunkte a, b), die außerdem die beiden der

Linie l in Nr. 14 auferlegten Bedingungen gleichzeitig erfüllt, ferner eine Parallellinie p_{λ_1} , die in dem zwischen l_1 und λ_1 gelegenen Gebiete verläuft und mit diesen beiden Linien keinen Punkt gemeinsam hat. — Es ist zu zeigen, daß der zwischen l_1 und p_{λ_1} gelegene Teil von E_1 ein zugleich mit δ unendlich kleines Integral liefert.

Von a aus gesehen, treffe l_1 das Gebiet E_1 zuerst im Punkte a_1 , verlasse es demnächst im Punkte b_1 , treffe es hierauf im Punkte a_2 wieder u. s. f.; b_n sei der letzte Punkt, bei dem l_1 ins Äußere von E_1 übertrete. Man erkennt leicht, daß der Punkt a_{k+1} stets auf demselben regulären Randbogen von E_1 wie der Punkt b_k liegen muß. Man kann daher jeden Bogen $b_k a_{k+1}$ der Linie l_1 durch einen gleichnamigen Bogen des Randes von E_1 , der innerhalb des zu λ_1 errichteten krummlinigen Rechteckes R_1 liegt, ersetzen. Dadurch entsteht aus l_1 eine andere, offenbar ebenfalls zusammenhängende Linie l' , welche auch in R_1 verläuft und die Punkte a und b verbindet.

19. Die Linie l' ist einfach. Denn angenommen, ein Bogen $a_k b_k$ treffe dieselbe Linie an einem bereits vor a_k durchlaufenen Punkte c ; dann muß dieser mitten auf einem der Stücke $b_i a_{i+1}$ ($i < k$) von l' gelegen sein (weil l_1 sich selbst nicht trifft), während er auf l_1 den Punkt a_{i+1} mit dem Punkte b_i einschließt. Trifft hingegen ein Bogen $b_k a_{k+1}$ von l' diese Linie an einem schon vor b_k durchlaufenen Punkte c , so liegt c entweder auf einem Bogen $a_i b_i$ ($i \leq k$), dann kann c nur mitten auf dem Bogen $b_k a_{k+1}$ liegen, und die Punkte c und a_{k+1} schließen auf l_1 den Punkt b_k ein; oder endlich c liegt mitten auf einem Bogen $b_i a_{i+1}$ ($i < k$) von l' ; die Bögen $b_i a_{i+1}$ und $b_k a_{k+1}$ von l' gehören dann einem und demselben von λ_1 abzweigenden Randstück von E_1 an, und zwar¹⁾ entweder so, daß $b_i a_{i+1}$ ganz auf dem Bogen $b_k a_{k+1}$ liegt — dann werden auf dem Randstücke b_k und a_{k+1} durch b_i getrennt —, oder so, daß $b_k a_{k+1}$ ganz auf dem Bogen $b_i a_{i+1}$ liegt — dann werden auf dem Randstücke b_i und a_{i+1} durch a_{k+1} getrennt —, während auf der Linie l_1 in beiden Fällen die Punkte b_i und a_{k+1} durch a_{i+1} und b_k getrennt werden. Die Annahme, daß l' sich selbst treffe, führt also stets auf die Existenz dreier Punkte, die auf l_1 in anderer Reihe liegen als auf einem von λ_1 abzweigenden Randbogen des Gebietes E_1 . Dann aber müßte, wie man leicht erkennt, entweder l_1 oder der betreffende Randbogen im Rechteck R_1 entweder eine Parallellinie oder eine Normalstrecke (der Länge δ) von λ_1 in zwei von einander getrennten Strecken oder Punkten treffen; dies ist, wenn δ hinreichend klein angenommen wird, nicht der Fall.

¹⁾ Zur Begründung dieser (geometrisch evidenten) Aussage vgl. den Satz über geschlossene Kurven von Jordan (Cours d'Analyse, 2^{me} éd., t. I., p. 90–100).

Die Linie l' trifft jede Normalstrecke und jede Parallellinie von λ_1 , die in R_1 gezogen sind, längs höchstens einer Strecke (die sich auf einen Punkt reduzieren kann). Dies ist nämlich für jeden einzelnen der Bögen $a_k b_k$ und $b_k a_{k+1}$ evident. Aus den über l_1 gemachten Voraussetzungen folgt auch unmittelbar, daß zwei Bögen $a_i b_i$ und $a_k b_k$ nicht dieselbe Parallellinie oder Normale treffen können. Trifft ferner ein Bogen $b_i a_{i+1}$ eine gegebene Normale oder Parallelkurve, so wird diese auch von dem gleichnamigen Bogen der Linie l_1 getroffen (denn die beiden gleichnamigen Bögen bilden eine einfache geschlossene Kontur, in deren Inneres die betreffende Normale oder Parallelkurve eintritt, sofern sie mit einem der beiden Bögen einen Punkt gemeinsam hat; da sie mit jedem von ihnen höchstens einen Punkt gemeinsam hat, so muß sie über den anderen Bogen wieder austreten), sie kann daher weder von einem Bogen $a_k b_k$ noch von einem Bogen $b_k a_{k+1}$ ($k \neq i$) in einer Strecke, welche von der auf $b_i a_{i+1}$ liegenden getrennt wäre, getroffen werden. Man sieht ohne weiteres, daß auch die Bögen $a a_1$ und $b_n b$ der Behauptung nicht widersprechen.

20. Es sei λ der für E singuläre Bogen, dem λ_1 angehört, R das mit der Höhe δ über λ errichtete krummlinige Rechteck. Man ersetzt die beiden Stücke $a a_1$ und $b_n b$ von l' durch die zu λ parallelen Verbindungen $A a_1$ und $b_n B$, welche bei a_1 und b_n ins Äußere von E_1 treten und bis zu den zu λ normalen Seiten des Rechtecks R führen; dies ergibt statt l' eine zusammenhängende Linie l , welche, in R verlaufend, A und B verbindet. Man bezeichnet ferner mit p und q die beiden Schnittpunkte zwischen der Parallellinie p_{λ_1} und dem in R_1 gelegenen Randteil von E_1 , so daß auf diesem a_1 von q durch p getrennt wird, und verlängert p_{λ_1} von p und q aus beiderseits ins Äußere von E_1 , bis zu den Punkten P , resp. Q , bei welchen die zu λ normalen Seiten von R getroffen werden ($PQ = p_{\lambda}$). Endlich treffe die Verlängerung p_1 der Parallellinie $A a_1$ die entgegengesetzte Seite von R in B' und die Verlängerung p_n von $B b_n$ die entgegengesetzte Seite von R in A' .

Die Linie l erfüllt offenbar alle ihr in Nr. 13 und 14 auferlegten Bedingungen. Ihr Teil $a_1 b_n$ verläuft ganz in dem krummlinigen Rechteck, das durch die beiden Parallellinien p_1 und p_n und durch die a_1 und b_n passierenden Normalstrecken von λ begrenzt wird (denn sonst würde entweder einer der Punkte a_1 und b_n auf l zwei Punkte derselben Normalstrecke von λ trennen, oder es würde ein Punkt C die Linie l in zwei Teile AC und CB zerlegen, welche eine und dieselbe, nicht durch C gehende Parallelkurve trafen).

Es sei also etwa a_1 von allen Punkten der Linie l am wenigsten von λ entfernt. Liegt dann p auf dem krummlinigen Rechteck r , das durch die a_1 und b_n passierenden Normalstrecken aus R ausgeschnitten

wird und den Bogen $a_1 b_n$ von l enthält, so genügt die Linie L_1 , welche aus den zu λ parallelen Bögen Aa_1 und pQ und aus dem auf R_1 gelegenen Randstücke $a_1 p$ von E_1 gebildet ist, den Bedingungen einer zu λ gehörigen Linie l in E ; dasselbe gilt, wenn q auf r liegt, für die Linie L'_1 , welche aus den zu λ parallelen Stücken Pq und $b_n B$ und aus dem auf R_1 gelegenen Randstücke qb_n besteht; dasselbe gilt ferner, wenn q nicht auf dem Rechtecke r liegt, für die Linie L_2 , welche aus den zu λ parallelen Bögen $A'b_n$ und qQ und aus dem auf R_1 gelegenen Randbogen $b_n q$ besteht; dasselbe gilt endlich, wenn p nicht auf r liegt, für die Linie L'_2 , welche aus den zu λ parallelen Bögen Pp und $a_1 B'$ und aus dem auf R_1 gelegenen Randbogen pa_1 besteht.

Daher liefern die gemeinsamen Teile von E und von jedem der folgenden Zwischengebiete für unendlich kleine Werte von δ unendlich kleine Doppelintegrale: von jedem der Zwischengebiete (l, L_1) und (p_i, L'_1) , wenn p und q auf r liegen; (l, L_1) und (p_n, L_2) , wenn nur p auf r liegt; (l, L'_1) und (p_1, L'_2) , wenn nur q auf r liegt; (l, p_i) , (p_1, L'_2) , (p_n, L_2) , wenn weder p noch q auf r liegt.

Die zu λ parallelen Bögen Aa_1 , pq und $b_n B$ und die auf R_1 gelegenen Randstücke $a_1 p$ und qb_n von E_1 bilden zusammen eine Linie L , die den in Nr. 13 gestellten Bedingungen entspricht. Das zwischen L und l gelegene Gebiet erhält man 1. durch Entfernung des Teilgebietes (p_i, L'_1) aus (l, L_1) , 2. durch die von (p_n, L_2) aus (l, L_1) , 3. durch die von (p_1, L'_2) aus (l, L'_1) , 4. durch die gleichzeitige Entfernung von (p_1, L'_2) und (p_n, L_2) aus (l, p_i) . Daher liefert auch der zwischen l und L gelegene Teil von E , der sich offenbar nur aus Punkten von E_1 zusammensetzt, ein unendlich kleines Integral. Dieser Teil nun ist mit dem zwischen p_{i_1} und l_1 gelegenen Teile von E_1 identisch (man könnte nämlich leicht das zwischen den Linien λ_1 und l_1 gelegene Teilgebiet von E_1 so charakterisieren, daß seine Unabhängigkeit von den nicht innerhalb E_1 gelegenen Stücken von p_{i_1} und l_1 in Evidenz träte, und innerhalb E_1 fällt offenbar l mit l_1 , L mit p_{i_1} zusammen).

Es war zu beweisen, daß der zu E_1 gehörige Teil des Zwischengebietes (l_1, p_{i_1}) ein unendlich kleines Integral liefere; dies festgestellt, ist die Existenz von $I_{E_1}^d(f)$ bewiesen. — Damit erscheint die Forderung $D')$ (Nr. 9) allerdings noch nicht als erfüllt, denn für die Form des Gebietes E_1 sind zu weitgehende Voraussetzungen (Nr. 12) gemacht worden. Eine auf dem folgenden Satze beruhende Erweiterung der in Nr. 15 gegebenen Definition wird dieselben beseitigen.

21. Zusammensetzung von Integrationsgebieten. Genügt das Gebiet E und die darin definierte Funk-

tion f den in Nr. 12 gemachten Voraussetzungen, und zerfällt E in mehrere Teile $E_1, \dots, E_n$ (ohne gemeinsame innere Punkte), von denen jeder denselben Annahmen wie E genügt; bestehen ferner die Grenzwerte $I_{E_1}^A(f), \dots, I_{E_n}^A(f)$ — so besteht auch $I_E^A(f)$ und ist der Summe jener Grenzwerte gleich.

Denn es ist evident, daß jeder Näherungsbereich $\Delta(l)$ von E , der zum Werte δ gehört, aus jedem der Gebiete E_i einen solchen Teilbereich entnimmt, der als zu δ gehöriger Näherungsbereich für E_i allen Bedingungen (Nr. 13 und 14) entspricht.

22. Erweiterung der Voraussetzungen. Es seien mehrere Funktionen $f_1(x, y), f_2(x, y), \dots$ gegeben, die in ihren Definitionsgebieten $G_1, G_2, \dots$ allen in Nr. 12 aufgestellten Bedingungen genügen. In einem beliebig begrenzten endlichen oder unendlichen Gebiete E sei eine Funktion f definiert, die in einem gemeinsamen Teile E_1 von E und $G_1 = f_1 + \varphi$, in einem gemeinsamen Teile E_2 von E und $G_2 = f_2 + \varphi$ u. s. f., endlich in einem von ihren singulären Punkten freien Restgebiete E' von $E = \varphi$ gesetzt werde — unter φ eine in E beliebig definierte und von singulären Punkten freie Funktion verstanden. Es wird vorausgesetzt, daß jedes der Gebiete $E_1, E_2, \dots$ von regulären analytischen Bögen in endlicher Zahl begrenzt sei, und daß kein Punkt zugleich dem Innern zweier der Gebiete $E_1, E_2, \dots, E'$ angehöre. Über die Lage der Ausnahme- und Schnittpunkte der singulären Linien von $f_1, f_2, \dots$ zum Gebiete E wird dieselbe Voraussetzung wie in Nr. 12 gemacht.

Wenn man überdies festsetzt, daß in keinem noch so kleinen Flächenstücke von E' die Funktion φ einer der Funktionen $f_1, f_2, \dots$ gleich sein dürfe, so sind die Gebiete $E_1, E_2, \dots$ durch die Angabe der Funktion f vollständig bestimmt. Man nimmt an, daß man, wenn f in E definiert ist, die Funktionen $f_1, f_2, \dots$ und die Gebiete $E_1, E_2, \dots$ tatsächlich finden könne.

23. Reduktion auf den früheren Fall. Kein singulärer Punkt von f_1 kann im Innern von E_1 liegen. Man beschreibt um jeden Randpunkt von E_1 , in dem zwei Randbögen aneinander stoßen, ohne einander analytisch fortzusetzen, einen so kleinen Kreis, daß die vom Zentrum ausgehenden Bögen einander auf der Kreisfläche nicht treffen und dem Kreise nicht öfter als einmal begegnen. Die Randbögen und ihre direkten analytischen Fortsetzungen zerlegen die Kreisfläche in mehrere Sektoren [deren Anzahl durch beliebige Radien nötigenfalls vermehrt werden kann¹⁾], derart, daß entweder jeder innere Punkt eines Sektors oder keiner zu E_1 gehört, und

¹⁾ Dies kann nötig sein, um die im Schlußsatze von Nr. 12 enthaltene Voraussetzung herzustellen.

daß jeder zu E_1 gehörige Sektor hinsichtlich der Funktion f_1 die in Nr. 12 dem Gebiete E auferlegten Bedingungen erfüllt.

Von einem Punkte a_1 , bei dem ein vom Zentrum ausgehender Randbogen ins Äußere des Kreises tritt, verfolgt man jenen, bis er bei einem Punkte b_1 wieder ins Innere dieses oder eines anderen Kreises eintritt; von b_1 aus folgt man dem Kreisbogen, der einen zu E_1 gehörigen Sektor begrenzt (der Durchfahrungssinn des Kreises ist damit offenbar eindeutig festgelegt) und folgt dann dem nächsten, die Kreisfläche (bei a_2) verlassenden Randbogen bis zum nächsten Kreise u. s. f. Dabei wird offenbar eine einfache, geschlossene Linie beschrieben, die ganz aus Randpunkten des um die Kreisflächen verminderten Gebietes E_1 besteht und von den etwa noch weiter vorhandenen Randteilen desselben Gebietes getrennt ist. Entfernt man die beiden Teile des Gebietes E_1 , die innerhalb und außerhalb der beschriebenen Kontur liegen, voneinander, so läßt sich für den Rand eines jeden von ihnen (soweit er noch nicht beschrieben ist) das Reduktionsverfahren wiederholen.

Zuletzt besteht E_1 aus — in sich zusammenhängenden — Teilen endlicher Anzahl, ohne gemeinsame innere Punkte, und jeder ist durch einfache, geschlossene Konturen ohne gemeinsame Punkte begrenzt. Man kann jeden solchen Teil etwa noch in zwei einfach zusammenhängende Teile zerlegen, indem man von den einander ausschließenden Randkonturen die erste durch das Innere des Teilgebietes hindurch mit der zweiten, diese mit der dritten u. s. f. und zuletzt, wenn eine die übrigen umschließende Randkontur vorhanden ist, diese mit der ersten und mit der letzten eingeschlossenen Randkontur durch polygonale Züge, die einander nicht treffen, verbindet.

Endlich kann man um diejenigen Randpunkte eines solchen einfach zusammenhängenden Teiles, in denen einander nicht fortsetzende reguläre Randbögen zusammenstoßen, Kreissektoren (wie oben) ausscheiden und dadurch zuletzt E_1 in Teile: $E'_1, E''_1, \dots$ endlicher Anzahl zerlegen, die paarweise keine inneren Punkte gemeinsam haben und in bezug auf die Funktion f_1 allen in Nr. 12 für E vorgeschriebenen Bedingungen entsprechen. — E_2 zerfällt in analoge Teile $E'_2, E''_2, \dots$.

24. Erweiterung der Definition. Man zieht zu jedem für E'_1 singulären Bogen der Funktion f_1 — nach der in Nr. 13 und 14 gegebenen Vorschrift — in einer Entfernung $< \delta$ eine Linie l . Überdies schließt man alle Randpunkte von E'_1 , die, ohne für f_1 singulär zu sein, es für eine der Funktionen $f_2, \dots$ sind, durch Kreisbögen aus, deren Radius $= \delta$ ist ¹⁾ (unendlich ferne Punkte dieser Art durch einen Kreis um den Nullpunkt vom Radius $\frac{1}{\delta}$). Der Rest von E'_1 wird mit $\Delta'(l)$ bezeichnet. Aus den

¹⁾ Dadurch werden, wie Nr. 4 es verlangt, aus E die Punkte ausgeschlossen, die für f in E , aber nicht in E'_1 singulär sind.

Bereichen $\Delta'(\ell)$, welche dadurch in $E'_1, E''_1, \dots, E'_{2'}, \dots$ bestimmt sind, und aus E' setzt man einen Näherungsbereich $\Delta(\ell)$ für E zusammen.

Besteht alsdann der Grenzwert:

$$\lim_{\delta=0} S_{\Delta(\ell)} f dx dy = I_E^A(f),$$

so soll er ebenfalls als Doppelintegral (in weiterem Sinne) der Funktion f über das Gebiet E bezeichnet werden. In dieser Klasse von Grenzwerten sind offenbar auch alle absolut konvergenten Doppelintegrale enthalten.

Die auf Grund der Definition von Nr. 15 zu konstatierende Existenz der Doppelintegrale in weiterem Sinne $I_{E'_1}^A(f), I_{E''_1}^A(f), \dots, I_{E'_{2'}}^A(f), \dots$ ist für die Existenz des eben definierten Grenzwertes notwendig und hinreichend; ist diese Bedingung erfüllt, so besteht die Beziehung:

$$I_E^A(f) = I_{E'_1}^A(f) + I_{E''_1}^A(f) + \dots + I_{E'_{2'}}^A(f) + \dots + S_{E'} f dx dy.$$

Die Bereiche $\Delta'(\ell)$ unterscheiden sich nämlich von den Bereichen $\Delta(\ell)$, wie die Definition von Nr. 15 sie der Funktion f in den einzelnen Gebieten $E'_1, E''_1, \dots, E'_{2'}, \dots$ zuordnet, nur um die zu diesen Gebieten resp. gehörigen, unendlich kleinen Kreisflächenteile, deren Zentra von den singulären Punkten der betreffenden Gebiete positive Minimalentfernungen haben und selbst unausgedehnte Mengen bilden (und etwa noch um die außerhalb eines unendlich großen Kreises gelegenen Teile der Gebiete). Diese Teile liefern unendlich kleine Beiträge zu den Näherungsintegralen.

Die Existenz und der Wert des Integrals (in weiterem Sinne) $I_E^A(f)$ ist von der Art, wie man E in seine Teile $E'_1, E''_1, \dots, E'_{2'}, \dots, E'$ zerlegt, unabhängig. Denn hinsichtlich einer beliebigen anderen Zerlegung: $F'_1, F''_1, \dots, F'_{2'}, \dots, F'$ zerfällt E'_1 offenbar in Teile endlicher Anzahl: $G'_1, G''_1, \dots$, deren jeder denselben Bedingungen wie E'_1 genügt und nur von einem der Gebiete $F'_1, F''_1, \dots$ innere Punkte enthält; analog zerfallen $E''_1, \dots, E'_{2'}, \dots$ — Aus der Existenz von $I_E^A(f)$ folgt die eines Integrals in weiterem Sinne über jeden der Teile $G'_1, G''_1, \dots$ (nach Nr. 20). Ein solches besteht daher (Nr. 21) auch über jedes der Gebiete: $F'_1, F''_1, \dots, F'_{2'}, \dots$; es ist der Summe aus den Integralen (in weiterem Sinne), über die in seinem Integrationsgebiete enthaltenen Teile $G'_1, G''_1, \dots$ erstreckt, gleich.

25. Teilung und Zusammenfügung von Integrationsgebieten. E_0 sei ein regulärer Teil des beliebig gestalteten Gebietes E . Wenn eine Funktion f im Gebiete E den in

Nr. 22 angegebenen Bedingungen genügt, so tut sie es auch im Gebiete E_0 . Offenbar kann man E derart in Teilgebiete $E'_1, E''_1, \dots, E'_2, \dots, E'$ (wie in Nr. 23) zerlegen, daß von jedem entweder alle oder keine inneren Punkte zu E_0 gehören. — Daher folgt aus der Existenz von $I_{E_1}^d(f)$ die von $I_{E_0}^d(f)$ womit für die Klasse dieser Grenzwerte die Gültigkeit der Bedingung D' (Nr. 9) bewiesen ist.

Zerfällt ferner E in mehrere reguläre Teile $E_1, \dots, E_n$ ohne gemeinsame innere Punkte, und genügt f im Gebiete E den Bedingungen von Nr. 22, so folgt aus Nr. 24, daß mit den Grenzwerten $I_{E_1}^d(f), \dots, I_{E_n}^d(f)$ auch der Grenzwert $I_E^d(f)$ bestehen und der Summe jener Grenzwerte gleich sein muß. Die Notwendigkeit der Annahme, daß f in E den Bedingungen von Nr. 22 genügen solle, ist mit der Forderung E (Nr. 9) unvereinbar. Zur Erfüllung von E ist eine neue (nach Nr. 11 durchführbare) Definitionserweiterung nötig.

III. Zweite Erweiterung der Doppelintegralklasse.

26. Ausschließung von singulären Punkten zweiter Art. Unter den Voraussetzungen von Nr. 22 soll jeder auf E_1 gelegene Punkt einer singulären Linie der Funktion f_1 , jeder auf E_2 gelegene Punkt einer singulären Linie von f_2 u. s. f. ein „singulärer Punkterster Art der Funktion f im Gebiete E “ heißen. Ein Punkt von E , in dem eine singuläre Linie von f sich selbst oder eine andere trifft, soll ein „singulärer Punkt zweiter Art“ heißen und von jetzt an zugelassen werden.

Man zieht innerhalb eines Kreises vom Radius δ um jeden singulären Punkt zweiter Art eine einfache, geschlossene Kontur c_1 und, wenn ein unendlich ferner Punkt von dieser Art ist, außerhalb eines um den Nullpunkt mit dem Radius $\frac{1}{\delta}$ gezogenen Kreises eine einfache, geschlossene Kontur c_1 , die den Kreis in ihrem Innern enthält. Diese Kurven sollen aus regulären analytischen Bögen in endlicher Anzahl bestehen.

Man betrachtet die singulären Bögen von f_1 , die um einen auf E_1 gelegenen und für die Funktion f im Gebiete E von der zweiten Art singulären Punkt p ausgehen. Auf jedem grenzt man ein bei p beginnendes, beliebig kurzes, aber bestimmtes Stück λ ab; man errichtet dann darüber beiderseits je ein Rechteck von der Höhe δ . Die Linien c_1 sollen in einem Falle: *a*) jede Höhe eines solchen Rechteckes, in einem anderen Falle: *b*) jede in ihm zur Basis λ gezogene Parallele höchstens einmal treffen. (Unendlich enge Kreise erfüllen diese Bedingungen.)

Der außerhalb aller Ausschließungskurven c_1 gelegene Teil von E_1 wird im Falle *a*) mit $D_0(c_1)$, im Falle *b*) mit $D'_0(c_1)$ bezeichnet, und die Gesamtheit der in den einzelnen Gebieten $E_1, E_2, \dots$ so konstruierten Näherungsbereiche, vermehrt um das Gebiet E' (s. Nr. 22) bilde für E den Näherungsbereich $D_0(c)$, resp. $D'_0(c)$.

27. Erweiterung der Definition. Es wird angenommen, daß für jeden Wert δ über den Teil des Gebietes E , der außerhalb aller um singuläre Punkte zweiter Art mit dem Radius δ (resp. $\frac{1}{\delta}$) beschriebenen Kreise liegt, ein Doppelintegral der Funktion f (in dem in Nr. 22 angegebenen weiteren Sinne) bestehe; dann bestehen (Nr. 23) auch die Grenzwerte: $I_{D_0(c)}^D(f)$ und $I_{D'_0(c)}^D(f)$.

Wenn einer der Grenzwerte:

$$\lim_{\delta=0} I_{D_0(c)}^D(f) = I_E^D(f), \quad \lim_{\delta=0} I_{D'_0(c)}^D(f) = I_E^{D'}(f)$$

existiert, so soll er wiederum als Doppelintegral (in weiterem Sinne) der Funktion f über das Gebiet E bezeichnet werden. Statt dieser beiden Klassen von Grenzwerten kann man auch eine einzige:

$$\lim_{\delta=0} I_{\Delta'_0(c)}^D(f) = I_E^{D'}(f)$$

betrachten, welche jene in sich enthält, und deren Näherungsbereiche $\Delta'_0(c)$ dadurch definiert sind, daß sie den Bedingungen von $D_0(c)$ und $D'_0(c)$ zugleich genügen. In dieser Klasse sind die vorher untersuchten Grenzwerte $I_E^D(f)$ im besonderen enthalten.

Es ist evident, daß bei dieser Erweiterung die Forderungen A) (Nr. 5), C) (Nr. 6) und B') (Nr. 10) erfüllt bleiben.

28. Beispiel. Für die reelle analytische Funktion:

$$f = \frac{1}{xy} \sin \frac{1}{xy}$$

kann der Quadrant: $x \geq 0, y \geq 0$ als Definitionsgebiet angesehen werden. Sie hat in demselben, abgesehen vom Unendlichen, die singulären Linien $x=0$ und $y=0$. Man schließt den Schnittpunkt durch eine zusammenhängende, aus regulären Bögen endlicher Zahl bestehende und mit wachsendem x sinkende Linie c : $y = \varphi(x)$ oder $x = \chi(y)$, ($0 \leq x \leq \delta_1 < \delta_0, 0 \leq y \leq \delta_2 < \delta_0$) aus ¹⁾ und bezeichnet den Rest des Quadrats E : $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ mit $\Delta'_0(c)$.

Aus diesem Bereiche schließt man die beiden singulären Strecken durch zwei zusammenhängende, zu beiden Achsen monotone und

¹⁾ Das entspricht offenbar der in Nr. 27 gegebenen Vorschrift.

stückweise reguläre Linien, l_1 und l_2 , aus, die zwei Punkte der Geraden $x=0$, $x=1$, resp. der Geraden: $y=0$, $y=1$ verbinden und von der x -Achse, resp. der y -Achse, ohne diese zu treffen, Maximalabstände $< \delta$ besitzen. Das Restgebiet von $\Delta'_0(c)$ heiße $\Delta(l)$.

Folgt man der Linie l_1 von ihrem Anfangspunkt auf $x=1$ bis zu dem ersten Punkt, bei dem sie über c hinweg ins Äußere von $\Delta'_0(c)$ tritt, von hier an der Linie c bis zu dem nächsten Punkt, bei dem l_1 das Gebiet $\Delta'_0(c)$ wieder erreicht, dann wieder der Linie l_1 bis zum nächsten Austrittspunkt aus $\Delta'_0(c)$ u. s. f. bis zum letzten Austrittspunkt A , so erhält man wieder eine zu beiden Achsen monotone Linien l'_1 (wie in Nr. 19 und 20 zu prüfen). Analog erhält man aus l_2 eine ihr gleichartige Linie l'_2 , mit einem Endpunkt B auf c , so daß die Linien $x=1$, $y=1$, l'_2 , l'_1 und ein die Punkte A und B verbindender Bogen c' von c das Gebiet $\Delta(l)$ vollständig begrenzen. Zieht man endlich noch durch den von der x -Achse am weitesten entfernten Endpunkte von l'_1 eine Parallele zur x -Achse: $y=\beta < \delta$ und durch den von der y -Achse am weitesten entfernten Endpunkt von l'_2 eine Parallele zur y -Achse: $x=\alpha < \delta$, so zerfällt $\Delta(l)$ in drei Teile:

Der erste ist von den Geraden $x=1$, $y=\beta$ und einer zusammenhängenden Linie: $y=\psi(x)$ ($0 < x_1 \leq x \leq 1$, $0 < y < \delta$), die aus l'_1 und etwa noch einem Stück des Bogens c' besteht und über der x -Achse einfach ausgebreitet ist, begrenzt. Dieser Teil liefert das Doppelintegral:

$$Sfdx dy = \int_{x_1}^1 dx \int_{\psi(x)}^{\beta} \frac{1}{xy} \sin \frac{1}{xy} dy = \int_{x_1}^1 dx \int_{\frac{1}{x\beta}}^{\frac{1}{x\psi(x)}} \frac{\sin t}{t} dt;$$

sein absoluter Betrag unterliegt der Ungleichung:

$$|Sfdx dy| \leq 2 \int_{x_1}^1 x [\beta + \psi(x)] dx \leq 4(1-x_1)\delta < 4\delta$$

und ist daher zugleich mit δ unendlich klein.

Dasselbe gilt für das Integral über den zweiten Teil von $\Delta(l)$, der durch die Geraden: $y=1$, $x=\alpha$ und eine zusammenhängende Linie, die aus l'_2 und etwa noch einem Stück des Bogens c' besteht, begrenzt ist.

Der dritte Teil wird durch ein Stück des Bogens c' und durch die Geraden $x=\alpha$, $y=\beta$, $x=1$, $y=1$ begrenzt. Um zu beweisen, daß das Doppelintegral über diesen Teil für ein unendlich abnehmendes δ einen bestimmten Grenzwert erhält, hat man die Geraden: $x=\alpha$, $y=\beta$ durch zwei andere: $x=\alpha_1 < \alpha$, $y=\beta_1 < \beta$ zu ersetzen und zu zeigen, daß der Differenzbereich ein für ein unendlich kleines δ unendlich kleines Doppelintegral liefert. Dieses hat tatsächlich den absoluten Betrag:

$$\begin{aligned}
\left| \int_{a_1}^a dx \int_{\varphi(x)}^1 f dy + \int_{\beta_1}^{\beta} dy \int_{\chi(y)}^1 f dx \right| &\leq \int_{a_1}^a dx \left| \int_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{x\varphi(x)}} \frac{\sin t}{t} dt \right| + \int_{\beta_1}^{\beta} dy \left| \int_{\frac{1}{y}}^{\frac{1}{y\chi(y)}} \frac{\sin t}{t} dt \right| \leq \\
&\leq 2 \int_{a_1}^a x [1 + \varphi(x)] dx + 2 \int_{\beta_1}^{\beta} y [1 + \chi(y)] dy \leq 2(a - a_1) \alpha (1 + \delta_1) + \\
&\quad + 2(\beta - \beta_1) \beta (1 + \delta_2) < 4\delta^2 (1 + \delta_0).
\end{aligned}$$

Folglich besteht der Grenzwert:

$$\lim_{\delta=0} S_{\Delta(l)} f dx dy = I_{\Delta'(c)}^{\Delta}(f).$$

Um endlich zu beweisen, daß auch der Grenzwert:

$$\lim_{\delta_0=0} I_{\Delta'(c)}^{\Delta}(f) = I_E^{\Delta_0}(f)$$

bestehe, genügt es offenbar zu zeigen, daß der Wert des Doppelintegrals über den zuletzt betrachteten Teil von $\Delta(l)$ sich einer bestimmten Grenze nähert, sobald δ und δ_0 in beliebiger Weise unendlich klein werden — und dies folgt unmittelbar aus der letzten Ungleichung.

Der Grenzwert $I_E^{\Delta_0}(f)$ ist kein absolut konvergentes Doppelintegral; denn, ist $a \leq x \leq b$ ($a > 0$) eine beliebige Teilstrecke des Intervalls $0 \leq x \leq 1$, so ist für das von den Geraden $x = a$, $x = b$, $y = \delta < \frac{a}{b}$, $y = 1$ begrenzte Rechteck:

$$S|f| dx dy = \int_a^b dx \int_{\frac{1}{x}}^{\frac{x}{\delta}} \frac{|\sin t|}{t} dt \geq (b - a) \int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{b\delta}} \frac{|\sin t|}{t} dt,$$

also mit $\frac{1}{\delta}$ unendlich groß; folglich ist jeder Punkt der x -Achse und ebenso jeder der y -Achse in der Tat singular.

Man erhält den Wert von $I_E^{\Delta_0}(f)$, indem man speziell die Grenze aufsucht, welcher sich das Doppelintegral über das von den Geraden $x = \delta$, $x = 1$, $y = \delta$, $y = 1$ begrenzte Quadrat für ein unendlich abnehmendes, positives δ nähert. Es ist:

$$\begin{aligned}
\int_{\delta}^1 dx \int_{\delta}^1 f dy &= \int_{\delta}^1 dx \int_{\frac{1}{x}}^{\frac{x}{\delta}} \frac{\sin t}{t} dt = \int_1^{\frac{1}{\delta}} \frac{dz}{z^2} \int_z^{\frac{z}{\delta}} \frac{\sin t}{t} dt = \\
&= \int_1^{\frac{1}{\delta}} \frac{dz}{z^2} \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt - \int_1^{\frac{1}{\delta}} \frac{dz}{z^2} \int_0^z \frac{\sin t}{t} dt - \int_1^{\frac{1}{\delta}} \frac{dz}{z^2} \int_{\frac{z}{\delta}}^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt;
\end{aligned}$$

darin ist:

$$\left| \int_1^{\frac{1}{\delta}} \frac{dz}{z^2} \int_{\frac{z}{\delta}}^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt \right| \leq 2 \delta \int_1^{\frac{1}{\delta}} \frac{dz}{z^3} < \delta;$$

daher:

$$I_E^{A_0'}(f) = \frac{\pi}{2} - \int_1^{\infty} \frac{T(z)}{z^2} dz,$$

worin $T(z)$ die Transszendente:

$$T(z) = \int_0^z \frac{\sin t}{t} dt$$

bedeutet.

29. Ausschließung von singulären Punkten dritter Art. Die Funktion f genüge den in Nr. 22 aufgestellten Bedingungen, könne aber im Gebiete E singuläre Punkte zweiter Art und auch in einer Entfernung von den singulären Linien noch weitere, isolierte singuläre Punkte haben, wobei das Unendliche eventuell für einen zählt.

Wenn ein Grenzwert $I_{E_0}^{A_0'}(f)$ zwar in dem Teile E_0 von E besteht, der übrig bleibt, nachdem gewisse isolierte Punkte — darunter die eben genannten — mit Hilfe beliebig kleiner, um sie beschriebener Kreise und etwa auch alle unendlich fernen Punkte mit Hilfe eines beliebig großen, um den Nullpunkt beschriebenen Kreises ausgeschlossen worden sind; wenn anderseits die Ausschließung aller dieser Punkte dafür erforderlich ist, daß ein solcher Grenzwert bestehe — so sollen diese isolierten Punkte (deren Anzahl, wenn das Unendliche hier für einen gilt, notwendigerweise endlich ist) „singuläre Punkte dritter Art der Funktion f im Gebiete E “ genannt werden.

Man entfernt jeden solchen Punkt p aus dem Gebiete E mit Hilfe einer einfachen geschlossenen Kontur c , in deren Innerem er liegt, während sie selbst innerhalb eines mit dem Radius δ um p beschriebenen Kreises verläuft (für das Unendliche sinngemäß abzuändern). Die Kontur c soll aus regulären analytischen Bögen endlicher Zahl bestehen und einmal: *a)* jeden von p aus gezogenen Radius nur einmal treffen, ein andermal: *b)* in zwei Bögen zerfallen, von denen jeder um p beschriebene Kreis höchstens je einmal getroffen wird.

Über das Restgebiet von E , das im Falle *a)* $\bar{D}_0(c)$, im Falle *b)* $\bar{D}'_0(c)$ heiße, besteht, da man für die Klasse der $I_E^{A_0'}(f)$ die Forderung D' (Nr. 9) als erfüllt nachweisen könnte, der Grenzwert $I_{D_0(c)}^{A_0'}(f)$, resp. $I_{D'_0(c)}^{A_0'}(f)$.

30. Erweiterung der Definition. Wenn unter den gemachten Voraussetzungen einer der Grenzwerte:

$$\lim_{\delta=0} I_{D_0(c)}^{D_0'}(f) = I_E^{\bar{D}_0'}(f), \quad \lim_{\delta=0} I_{D_0'(c)}^{D_0'}(f) = I_E^{\bar{D}_0'}(f)$$

besteht, so soll er auch als Doppelintegral (in weiterem Sinne) der Funktion f über das Gebiet E bezeichnet werden.

Die Bedingungen A) (Nr. 5), C) (Nr. 6) und B') (Nr. 10) bleiben erfüllt, u. zw. a fortiori, wenn man alle wenigstens von der zweiten Art singulären Punkte¹⁾ gleichzeitig mit solchen Umgebungen ausschließt, deren Konturen allen in Nr. 26 und 29 angegebenen Bedingungen genügen, und dadurch die Grenzwerte $I_E^{D_0'}(f)$, $I_E^{\bar{D}_0'}(f)$ und $I_E^{\bar{D}_0'}(f)$ in die umfassendere Klasse I der Doppelintegrale (in weiterem Sinne):

$$\lim_{\delta=0} I_{D_0(c)}^D(f) = I_E^D(f)$$

aufnimmt. Der Klasse I gehören dann alle vorher betrachteten Grenzwerte von Doppelintegralen an.

Wollte man die Näherungsbereiche $\Delta_0(c)$ so weit beschränken, daß die Kurven c Kreise sein müßten, so wäre die Forderung D') (Nr. 8) nicht erfüllt (vgl. das Beisp. in Nr. 7 und 8).

31. Beispiele. Die Funktion:

$$f = \frac{1}{x^2 + y^2} \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

hat den isolierten singulären Punkt $x=0, y=0$, im Unendlichen dagegen einen gewöhnlichen Punkt; denn, zieht man um den Nullpunkt zwei Kreise von den Radien δ und $r > \delta$, so liegt für das eingeschlossene Gebiet:

$$S|f| dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_\delta^r \frac{1}{\rho} \left| \sin \frac{1}{\rho} \right| d\rho < 2\pi \int_\delta^\infty \frac{1}{\rho} \left| \sin \frac{1}{\rho} \right| d\rho$$

unter einer von r unabhängigen, aber von δ abhängigen endlichen Grenze; anderseits wird der mittlere Ausdruck bei festem r zugleich mit $\frac{1}{\delta}$ unendlich groß.

Man umschließe den Punkt: $x=0, y=0$ mit einer einfachen geschlossenen Kontur $c: \rho = F(\varphi)$, unter F eine im Intervall $0 \dots 2\pi$ eindeutig definierte und stetige Funktion verstanden, deren Wert > 0 und $< \delta$ bleibt. Dann ist für den außerhalb c gelegenen Teil $\bar{D}_0(c)$ der Ebene:

$$S_{\bar{D}_0(c)} f dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{F(\varphi)}^\infty \frac{1}{\rho} \sin \frac{1}{\rho} d\rho;$$

¹⁾ Bei dieser, der letzten Erweiterung braucht man zwischen singulären Punkten zweiter und dritter Art nicht mehr zu unterscheiden.

dieses Integral hat offenbar für ein unendlich abnehmendes δ den Grenzwert (E bedeute die ganze Ebene):

$$I_E^{\bar{D}_0}(f) = \pi^2.$$

Die Funktion:

$$f_1 = \frac{\sin \sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2}$$

liefert einen Grenzwert desselben Typus mit dem Unendlichen als einziger Singularität.

Die Funktion:

$$f' = \frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \sin \frac{y}{x^2 + y^2}$$

hat wie f den einzigen singulären Punkt $x=0, y=0$, denn für den Kreisring mit den Radien δ und $r > \delta$ als Integrationsgebiet liegt (nach Nr. 16) der Wert des Integrals:

$$S[f'] dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\delta}^r \frac{|\cos \varphi|}{\rho} \left| \sin \frac{\sin \varphi}{\rho} \right| d\rho = 4 \int_0^1 ds \int_{\delta}^r \left| \sin \frac{s}{\rho} \right| \frac{d\rho}{\rho}$$

unter einer von δ , nicht aber von r abhängigen Grenze und über einer zugleich mit $\frac{1}{\delta}$ unendlich große Zahl.

Man bezeichne anderseits mit $\bar{D}'_0(c)$ den Teil, der von der ganzen Ebene übrig bleibt, wenn man das Innere einer einfachen, geschlossenen Kontur, die den Nullpunkt enthält und der Forderung b) von Nr. 26 entspricht, entfernt. Die Gleichungen dieser Kontur seien also: $\varphi = F_1(\rho)$, $\varphi = F_2(\rho)$, unter F_1 und F_2 zwei stetige, im Intervall $0 \dots 2\pi$ enthaltene Funktionen verstanden, die auf einer den Punkt $\rho=0$ nicht enthaltenden Teilstrecke $\delta_0 \delta_1$, des Intervalls $0 \dots \delta$ definiert sind, den Relationen: $F_1(\delta_0) = F_2(\delta_0)$, $F_1(\delta_1) = F_2(\delta_1)$ und, für innere Punkte der Teilstrecke, der Ungleichung: $F_1(\rho) < F_2(\rho)$ genügen.

Dann ist:

$$S_{\bar{D}'_0(c)} f' dx dy = \int_{\delta_0}^{\delta_1} d\rho \sum_{A_2} \int_{A_2}^{B_2} \frac{1}{\rho} \sin \frac{s}{\rho} ds + \int_{\delta_1}^{\infty} d\rho \left(\int_0^1 \frac{1}{\rho} \sin \frac{s}{\rho} ds + \int_1^{-1} \frac{1}{\rho} \sin \frac{s}{\rho} ds + \int_{-1}^0 \frac{1}{\rho} \sin \frac{s}{\rho} ds \right)$$

(die Summe $\sum$ enthält für jeden Wert von ρ höchstens drei Summanden, von denen jedem ein von den Funktionen F_1 und F_2 abhängiges Integrationsintervall $A_2 B_2$ zwischen den Grenzen 0 und 1, 1 und -1 oder -1 und 0 zukommt). Der erste Summand ist zugleich mit δ unendlich klein, der zweite hat den Wert Null, also ist auch für die ganze Ebene E :

$$I_E^{\bar{D}'_0}(f') = 0.$$

32. Existenzbedingung. Dafür, daß eine gegebene Funktion f im Gebiete E , in dem sie bis auf isolierte singuläre Punkte der zweiten oder dritten Art den Voraussetzungen von Nr. 22 genügt, ein Doppelintegral in weiterem Sinne: $I_E^{A_0}(f)$ besitze, ist die folgende Bedingung notwendig und hinreichend: Zu jeder positiven Zahl ε gibt es einen Wert $\delta > 0$, derart daß für alle Paare dazu gehöriger Näherungsbereiche: $\Delta_0(c), \Delta_0(c')$ die Ungleichung:

$$|I_{\Delta_0(c)}^A(f) - I_{\Delta_0(c')}^A(f)| < \varepsilon$$

gelte.

Dem Gebiet E mögen n singuläre Punkte zweiter oder dritter Art (darunter etwa auch der unendlich ferne) angehören: dann ist für die Existenz von $I_E^{A_0}(f)$ schon die besondere notwendige Bedingung hinreichend, daß für jeden dieser Punkte p bei hinreichend klein gewähltem δ die Ungleichung bestehe:

$$|I_{(c,k)}^A(f)| < \frac{\varepsilon}{2n},$$

unter (c, k) den Teil von E verstanden, der, in der Umgebung von p gelegen, durch die Vorschriften von Nr. 26 und 29 aus E ausgeschlossen und dann um die Fläche eines beliebigen, ganz innerhalb der ausgeschlossenen Umgebung¹⁾ gelegenen Kreises k vermindert worden ist. Beweis wie in Nr. 17.

33. Teilung des Integrationsgebietes. E_1 sei ein beliebiges reguläres Teilgebiet von E ; es soll aus der Existenz von $I_E^{A_0}(f)$ die des Grenzwertes $I_{E_1}^{A_0}(f)$ gefolgert werden.

Die Funktion f genügt offenbar, wie in E , auch im Gebiete E_1 , bis auf isolierte singuläre Punkte zweiter oder dritter Art, den Voraussetzungen von Nr. 22. Jeder Punkt, der für die im Gebiete E_1 definierte Funktion f singulär von der zweiten oder dritten Art ist, ist es auch für die in E definierte Funktion f (das umgekehrte muß nicht zutreffen).

Liegt einer dieser Punkte, p , im Inneren von E_1 , so ist für ihn die Gültigkeit der in Nr. 32 angegebenen Bedingung evident. Liegt p auf dem Rand von E_1 , so wird seine Umgebung durch die Randbögen von E_1 , durch die von ihm ausgehenden singulären Bögen der in E_1 definierten Funktion f und durch beliebige, fest gezogene Radien in Sektoren zerlegt, deren jeder ganz zu E_1 gehört oder keinen Punkt von E_1 im Inneren enthält. Man kann annehmen, daß jeder Sektor ganz dem Definitionsgebiete einer einzigen der zugleich mit f bestimmten analytischen Funktionen $f_1, f_2, \dots$ (Nr. 22) angehört und daß sein Inneres hinsichtlich jeder durch p gehenden singulären Linie dieser Funktion Punkte nur von einem

¹⁾ Genauer: ist p ein in E_1 von der ersten, zweiten oder dritten Art singulärer Punkt, so liegt der zu E_1 gehörige Teil der Kreisfläche k ganz innerhalb der in Nr. 26 angegebenen Kurve c_1 ; analog für E_2 etc.

der vier Quadranten enthält, in welche diese Linie und ihre Normale die Umgebung von p zerlegen.

Man ziehe zu einem beliebig gegebenen δ irgendeine bezüglich des Gebietes E_1 den Bedingungen von Nr. 26 und 29 entsprechende Linie c_1 um p und zwischen c_1 und p einen Kreis k . Wenn man zeigen kann, daß derjenige Teil des Zwischengebietes (c_1, k) , welcher einem in E_1 gelegenen Sektor angehört, ein für ein unendlich kleines δ unendlich kleines Integral liefert, so erscheint auch für Randpunkte p die hinreichende Bedingung von Nr. 32 in bezug auf E_1 erfüllt.

Von einem Punkt, der auf einem ganz außerhalb des Sektors verlaufenden Radius liegt, aus, der Linie c_1 folgend, erreiche man einen der beiden Randbögen des Sektors zuerst im Punkte a_1 , verlasse hierauf bei b_1 den Sektor wieder, treffe ihn bei a_2 von neuem u. s. f.; b_n sei der letzte Punkt, bei dem c_1 den Sektor verläßt, ehe sie zum Ausgangspunkte zurückkehrt.

Es ist leicht zu sehen, daß die Punkte b_k und a_{k+1} stets auf demselben Randbogen des Sektors liegen. Man ersetzt jeden Bogen $b_k a_{k+1}$ von c_1 durch den gleichnamigen, der Umgebung von p angehörigen Randbogen des Sektors, ferner den vor dem Punkte a_1 und den nach dem Punkte b_n durchfahrenen Bogen von c_1 durch je einen Kreisbogen, der, außerhalb des Sektors verlaufend, den Punkt a_1 , resp. b_n mit dem Radius verbindet, von dem aus die Durchfahrung von c_1 begonnen wurde. Endlich macht man die so definierte Linie c_1 mit Hilfe eines Stückes jenes Radius zu einer geschlossenen Linie c' .

34. Die Linie c' ist einfach; aus der entgegengesetzten Annahme folgt nämlich ebenso wie in Nr. 19 die Existenz von drei Punkten, die auf der Linie c_1 in anderer Reihe folgen als auf einer der beiden Randlinien des Sektors. Daraus würde sich im Widerspruch zur Voraussetzung ergeben, daß die Linie c_1 oder ein Randbogen mit einem Radius zwei getrennte Strecken oder Punkte gemeinsam hätte.

Ebenso wie in Nr. 19 und 20 zeigt man weiter, daß die Linie c' in zwei Teile zerfällt (u. zw. wird sie durch dieselben beiden Radien wie c_1 so zerlegt), von denen sich jeder p beständig nähert oder von p beständig entfernt; ferner daß die Linie c' jeden Radius nur einmal trifft; endlich, daß sie auch hinsichtlich der durch p gehenden singulären Linien die Eigenschaften besitzt, die für eine Ausschließungslinie c des Gebietes E in Nr. 26 und 29 vorgeschrieben worden sind.

So wie in Nr. 20 ergibt es sich auch hier, daß der zwischen c' und k gelegene Teil des Sektors sich durch Zufügen und Wegnehmen gewisser Gebiete darstellen läßt, von denen jeder das Zwischengebiet zweier, allen Bedingungen von Nr. 26 und 29 genügenden Linien bildet und daher ein unendlich kleines Integral liefert.

Damit ist für die Klasse I der Grenzwerte $I_E^{A_0}(f)$ die Eigenschaft D') (Nr. 9) bewiesen.

35. Zusammenfügung von Integrationsgebieten. Das Gebiet E zerfalle in mehrere reguläre Teile $E_1, \dots, E_n$, derart, daß kein Punkt innerhalb zweier von ihnen liegt. Es wird vorausgesetzt, daß die Funktion f in jedem der Gebiete $E_1, \dots, E_n$, mithin auch in E bis auf isolierte singuläre Punkte zweiter und dritter Art den in Nr. 22 gemachten Annahmen genüge, und daß die Grenzwerte $I_{E_1}^{A_0}(f), \dots, I_{E_n}^{A_0}(f)$ bestehen.

Ist dann Δ_0 ein nach Nr. 30 in E konstruierter Näherungsbereich, der in die Gebiete $E_1, \dots, E_n$ die Teile $\bar{\Delta}_{01}, \dots, \bar{\Delta}_{0n}$ entsendet, so besteht (Nr. 25) die Relation:

$$I_{\Delta_0}^A(f) = I_{\bar{\Delta}_{01}}^A(f) + \dots + I_{\bar{\Delta}_{0n}}^A(f).$$

Nun unterscheidet sich ein Bereich $\bar{\Delta}_{0i}$ von einem solchen Bereiche Δ_{0i} , wie er nach Nr. 30 zur Bildung des Grenzwertes $I_{E_i}^{A_0}(f)$ herangezogen werden müßte, nur dadurch, daß jenem die Umgebungen etlicher Punkte, die wohl in E , nicht aber in E_i von der zweiten oder dritten Art singulär sind, fehlen können, während sie in Δ_{0i} enthalten sein müssen. Diese Umgebungen liefern aber zum Grenzwert $I_{E_i}^{A_0}(f)$ unendlich kleine Beiträge.

Das ist evident, wenn durch den betreffenden Punkt p keine vom Gebiete E_i aus als singulär anzusehende Linie hindurchführt. Liegt er hingegen auf einer solchen singulären Linie (folglich auf keiner zweiten), so kann man offenbar annehmen, daß¹⁾ er mitten auf einem singulären Bogen λ , der von hier aus nicht ins Innere von E_i führt, liege, und daß in der ganzen zu E_i gehörigen Umgebung $f = f_1 + \varphi$ sei, unter f_1 eine analytische und unter φ eine von singulären Punkten freie Funktion verstanden.

Es sei c die bei der Bildung des Näherungsbereiches Δ_0 um p gezogene Ausschließungskurve. Das über λ nach Nr. 13 errichtete Rechteck und jede in ihm hinreichend nahe bei λ gezogene Parallele von λ zerfällt durch die im Punkte p errichtete Normale n in zwei Teile von folgender Art: verbindet man einen der Teile der Parallelen p_1 , soweit er außerhalb c liegt, mit dem — im selben Rechtecksteil und nicht zwischen λ und der Parallelen gelegenen — Bogen von c und mit einer zweiten Parallelen p_2 , die vom Schnittpunkt zwischen c und der in p errichteten Normalen n in den anderen Rechtecksteil hinüberführt, zu einer zusammenhängenden Linie — so genügt diese allen in Nr. 13 und 14 für eine Ausschließungs-

¹⁾ Indem man nötigenfalls die Umgebung von p in Sektoren zerlegt.

linie l von λ gegebenen Vorschriften. Dasselbe gilt, wenn man die eben benützten Parallellinien nicht durch ein Stück von c , sondern durch eines der Normalen n von λ verbindet. Der Teil von E_i , welcher zwischen den beiden so erhaltenen Linien liegt, liefert also ein unendlich kleines Integral, wie nahe auch p_i an λ gezeichnet sein mag. Daher ist — im Grenzfall — auch das (in weiterem Sinne genommene) Integral unendlich klein, welches der innerhalb c gelegene Teil von E_i liefert.

Daraus folgt, daß:

$$\lim_{\delta=0} I_{A'_{oi}}^A(f) = \lim_{\delta=0} I_{A_{oi}}^A(f) = I_{E_i}^{A_0}(f)$$

ist, daß also der Grenzwert $I_E^{A_0}(f)$ und die Relation:

$$I_E^{A_0}(f) = I_{E_1}^{A_0}(f) + \dots + I_{E_n}^{A_0}(f)$$

besteht, d. h.: die Klasse I der Grenzwerte $I_E^{A_0}(f)$ genügt der Forderung E) (Nr. 9).

36. Reduktion auf die Umgebungen der einzelnen Gebietsstellen. Aus den Resultaten von Nr. 34 und 35 folgt der Satz: Besteht in einer allseitigen Umgebung C jedes Punktes des Gebietes E , soweit diese Umgebung zu E gehört, das Integral (in weiterem Sinne) $I_C^{A_0}(f)$ für eine in E definierte Funktion f , so besteht auch das Integral in weiterem Sinne $I_E^{A_0}(f)$.¹⁾

E wird zunächst als endlich angenommen. Der Radius der Umgebung C hat für jeden Punkt von E eine obere Grenze r . Ist diese für einen Punkt unendlich, so ist der Satz evident. Ist es nicht der Fall, so ist r eine in E stetige Funktion. Denn, sind p und p' zwei Nachbarpunkte im Gebiete E , r und r' die Werte der Funktion r in ihnen, und ist d ihre Entfernung, so ist (unter λ eine beliebig kleine, positive Zahl verstanden) der mit dem Radius $r - \lambda - d$ um den Punkt p' beschriebene Kreis k' ganz im Innern eines mit dem Radius $r - \lambda$ um p beschriebenen Kreises k enthalten. Es besteht also $I_c^{A_0}(f)$ über den zu E gehörigen Teil c der Kreisfläche k ; mithin ist $r' \geq r - \lambda - d$ und zuletzt: $r' \geq r - d$. Analog: $r > r' - d$ und daher $|r' - r|$ zugleich mit d unendlich klein, d. h. r ist stetig. Folglich erreicht die Funktion r in E ein positives Minimum ρ . Teilt man nun E in solche reguläre Gebiete, deren Durchmesser $< \rho$ sind, so folgt die Integrierbarkeit von f (in weiterem Sinne) aus Nr. 34 für jedes der Teilgebiete und aus Nr. 35 für E selbst.

¹⁾ Die folgende Beweismethode entstammt der Theorie der analytischen Funktionen, s. z. B. Weierstraß, Abhandlungen aus der Functionenlehre, S. 72.

Ist das Gebiet E unendlich, so bleibt der Satz offenbar richtig, wenn in der Voraussetzung das Unendliche als ein Punkt gilt.

V. Operationen mit Doppelintegralen in weiterem Sinne.

37. Integration einer Summe. Von den Funktionen $f', f'', \dots$ und $f = c' f' + c'' f'' + \dots$ ($c', c'', \dots$ beliebige Konstanten) mögen im Gebiete E Doppelintegrale in weiterem Sinne bestehen; dann gilt die Relation:

$$I_E^{A_0}(f) = c' I_E^{A_0}(f') + c'' I_E^{A_0}(f'') + \dots \quad (1)$$

Denn angenommen, die Funktionen $f', f'', \dots f$ und das Gebiet E genügten den in Nr. 12 gemachten Voraussetzungen. — Ist dann ε eine beliebig klein vorgegebene, positive Zahl, so wählt man δ unter einer so niedrigen Grenze, daß das Zwischengebiet irgend zweier zu δ gehöriger und einander nicht kreuzender Ausschließungslinien eines jeden der n singulären Bögen von f' einen

Beitrag zum Doppelintegral liefert, dessen absoluter Wert $< \frac{\varepsilon}{n}$ ist,

und konstruiert über jedem der n singulären Bögen nach Nr. 13 ein krummliniges Rechteck von der Höhe δ . Hierauf ersetzt man E durch einen innerhalb E gelegenen Teilbereich E' , dessen Begrenzung aus Parallelen der Randlinien von E besteht, endlich den Bereich E' durch einen innerhalb E' gelegenen Teilbereich E'' derselben Art. Die Distanzen der zu ziehenden Parallellinien von den resp. Randlinien wählt man so klein, daß das Doppelintegral von f' , genommen über denjenigen Teil des Parallelstreifens $E' - E''$, der außerhalb sämtlicher gezeichneter Rechtecke liegt, dem absoluten Betrage nach $< \varepsilon$ ist. Derjenige Teil des Parallelstreifens $E' - E''$, der einem der Rechtecke angehört, läßt sich nun leicht durch Zusammenfügen und Wegnehmen einiger Gebiete¹⁾ darstellen, von denen jedes das vollständige Zwischengebiet zweier den Bedingungen von Nr. 13 und 14 genügender Ausschließungslinien ist; er liefert

also zum Doppelintegral einen Beitrag, dessen absoluter Wert $< \frac{k\varepsilon}{n}$

ist. Der ganze Parallelstreifen ergibt mithin ein Doppelintegral, das, absolut genommen, $< (k+1)\varepsilon$ bleibt, sofern alle Parallellinien hinreichend nahe bei ihren resp. Randlinien gezogen werden.

Daher lassen sich alle Grenzwerte $I_E^A(f'), I_E^A(f''), \dots I_E^A(f)$ mit Hilfe eines und desselben Systems von Näherungsbereichen, die ganz innerhalb E liegen und durch Parallele der Randlinien begrenzt werden, erhalten. — Die behauptete Relation (1) gilt also unter den Voraussetzungen von Nr. 12 und mittelbar auch unter den erweiterten Voraussetzungen von Nr. 22.

¹⁾ Ihre Anzahl überschreitet eine leicht angebbare Grenze k nicht.

Das Gebiet E enthalte nun auch singuläre Punkte zweiter oder dritter Art der Funktionen $f', f'', \dots f$. Aus der in Nr. 35 angestellten Überlegung folgt dann, daß jeder der Grenzwerte $I_E^{d_0}(f')$, $I_E^{d_0}(f''), \dots I_E^{d_0}(f)$ sich auch für ein allen gemeinsames System von Näherungsbereichen ergibt, die durch Ausschließung beliebig gegebener Punkte in endlicher Anzahl (unter denen sich auch die isolierten singulären Punkte aller Funktionen $f', f'', \dots f$ befinden müssen) mit Hilfe unendlich enger Kreise entstehen. Für diese gemeinsamen Näherungsbereiche ist die Formel (1) schon bewiesen, und daher gilt sie unter der Voraussetzung, daß alle in ihr vorkommenden Grenzwerte bestehen, für die Klasse I allgemein.

38. Um die Existenz von $I_E^{d_0}(f)$ aus der der Grenzwerte $I_E^{d_0}(f')$, $I_E^{d_0}(f''), \dots$ zu folgern, genügt es (nach Nr. 36), dies für eine beliebig enge, kreisförmige Umgebung C jedes Punktes von E zu tun (für das Unendliche sinngemäß abgeändert). Diese Umgebung kann so eng angenommen werden, daß sie außer dem Mittelpunkt, von keiner der in Betracht kommenden Funktionen einen singulären Punkt zweiter oder dritter Art enthält, und daß alle singulären Bögen, die das Gebiet C kreuzen, den Mittelpunkt durchziehen und die Peripherie je zweimal schneiden.

Zunächst muß vorausgesetzt werden, daß die Funktion f im Gebiete C bis auf isolierte singuläre Punkte zweiter und dritter Art den Bedingungen von Nr. 22 genüge.

Ist der Mittelpunkt von C für alle Funktionen $f', f'', \dots f$ höchstens von der ersten Art singulär und enthält C von allen diesen Funktionen zusammengenommen höchstens einen singulären Bogen, so ist jeder für f zulässige Näherungsbereich zugleich für jede der Funktionen $f', f'', \dots$, die in C überhaupt einen singulären Punkt besitzt, zulässig. Daraus ergibt sich die Existenz von $I_C^d(f)$ unmittelbar.

Schließt man also im allgemeinen Falle den Mittelpunkt durch einen beliebig engen Kreis K aus, so sind im Reste $C - K$ von C die vorigen Bedingungen durchweg erfüllt, und es besteht der Grenzwert $I_{C-K}^d(f)$.

So oft sich nun ohne Rücksicht auf das Verhalten der Funktionen $f', f'', \dots$ der Mittelpunkt als singulär von der ersten Art für f ergibt, liegt darin eo ipso die Existenz von $I_C^d(f)$.

In dem Falle aber, daß der Mittelpunkt für f ein singulärer Punkt zweiter oder dritter Art ist, wird man die Existenz von $I_C^{d_0}(f)$ ohne Zusatzannahmen nicht beweisen können. Die folgenden Voraussetzungen genügen z. B.: 1. Die Funktion f läßt sich in mehrere lineare Bestandteile:

$$\begin{aligned} f'_0 &= c' f' + c'' f'' + \dots + c^{(k)} f^{(k)} \\ f''_0 &= c^{(k+1)} f^{(k+1)} + \dots + c^{(l)} f^{(l)} \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

von folgender Beschaffenheit zerlegen. Enthält ein Teil mehr als einen Summanden, so gibt es zu jedem von diesen in demselben Teile einen anderen Summanden, der mit dem ersten eine für f nicht singuläre Linie gemeinsam zur singulären Linie hat, und umgekehrt stehen alle Summanden, die eine für f nicht singuläre Linie gemeinsam zur singulären Linie haben, in demselben Teile; 2) die Bedingungen von Nr. 22 sind in C für jede der Funktionen $f'_0, f''_0, \dots$ erfüllt; 3) es bestehen die Grenzwerte $I^{A_0}_C(f'_0), I^{A_0}_C(f''_0), \dots$ — Unter diesen Voraussetzungen ist nämlich jede Linie, die für eine der Funktionen $f'_0, f''_0, \dots$ singulär ist, auch für f singulär. Daher genügt jeder für die Funktion f zulässige Näherungsbereich auch hinsichtlich der Funktionen $f'_0, f''_0, \dots$ allen Anforderungen.

Diese letzte Konsequenz besteht z. B. auch dann, wenn bei einer geeigneten Zerlegung der Funktion f die einzelnen Bestandteile $f'_0, f''_0, \dots$ sich höchstens im Mittelpunkt singulär verhalten und der Voraussetzung 3) entsprechen.

In beiden Fällen ergibt sich die Existenz von $I^{A_0}_E(f)$ unmittelbar.

39. Integration einer Ungleichung. Im Gebiete E sei überall, mit Ausnahme einer, in jedem endlichen Teile von E unausgedehnten Punktmenge: $f \leq f'$; ferner mögen die Grenzwerte $I^A_E(f)$ und $I^A_E(f')$ bestehen.

Diese beiden Grenzwerte lassen sich nach Nr. 37 mit Hilfe eines Systems von Näherungsbereichen Δ' , das gleichzeitig für beide Funktionen zulässig ist, gewinnen. Dabei ist das Doppelintegral der Funktion f , über Δ' erstreckt, nicht größer als das von f' . Diese Ungleichung überträgt sich durch einen Grenzübergang auf $I^{A_0}_E(f)$ und $I^{A_0}_E(f')$, und wenn Integrierbarkeit in weiterem Sinne bei Anwesenheit von singulären Punkten zweiter oder dritter Art besteht, folgt ebenso mit Hilfe eines Systems gemeinsamer Näherungsbereiche Δ'_0 aus $f \leq f'$ die Ungleichung:

$$I^{A_0}_E(f) \leq I^{A_0}_E(f').$$

40. Einführung neuer Variabler. Die Funktionen $x = \varphi(u, v)$, $y = \varphi_1(u, v)$ mögen das endliche Gebiet E' der uv -Ebene in umkehrbar eindeutiger Weise auf das Gebiet E der xy -Ebene abbilden; E' liege im Innern des Definitionsgebietes der beiden reellen, eindeutigen analytischen Funktionen φ und φ_1 , und die Funktionaldeterminante derselben sei in E' durchweg von Null verschieden.

Man setzt:

$$f(\varphi(u, v), \varphi_1(u, v)) \left| \frac{\partial(\varphi, \varphi_1)}{\partial(u, v)} \right| = f'(u, v).$$

Es mögen unter den Voraussetzungen von Nr. 12 die Grenzwerte $I_E^A(f)$ und $I_{E'}^A(f')$ bestehen. (Wie man leicht erkennt, läßt sich E derart in mehrere, ebenfalls den Voraussetzungen von Nr. 12 genügende Teile zerlegen, daß jeder, transformiert, hinsichtlich der Funktion f' ihnen auch genügt; es wird also zunächst angenommen, daß E schon ungeteilt diese Eigenschaft habe.)

Wenn man für jeden singulären Bogen λ von f und jeden Wert von δ auch nur eine solche Ausschließungslinie l wählen kann, daß sie durch die Transformation in eine Linie l' übergeht, die hinsichtlich des entsprechenden singulären Bogens λ' von f' allen Bedingungen von Nr. 13 und 14 hinsichtlich einer zugleich mit δ unendlich kleinen Variablen δ' genügt, so geht der zugehörige Bereich $\Delta(l)$ in einen für f' zulässigen Näherungsbereich $\Delta(l')$ im Gebiete E' über, und die Formel:

$$S_{A(l)} f dx dy = S_{A(l')} f' du dv$$

wird im Grenzübergange zu der folgenden Transformationsgleichung:

$$I_E^A(f) = I_{E'}^A(f'). \quad (1)$$

Es ist evident, daß dieser Satz sich auf den Fall übertragen läßt, daß E' oder E und E' und darin die Funktionen f und f' den allgemeineren Bedingungen von Nr. 22 genügen.

Bestehen die Grenzwerte $I_E^{A_0}(f)$ und $I_{E'}^{A_0}(f')$, so entsprechen dabei die singulären Punkte zweiter und dritter Art der beiden Gebiete E und E' einander eindeutig. Gibt es für jeden Wert von δ auch nur eine Ausschließungskurve um jeden solchen Punkt im Gebiete E , die durch die Transformation in eine für das Gebiet E' zulässige Ausschließungskurve übergeht und gilt für die Näherungsbereiche $\Delta_0(c)$ und $\Delta_0(c')$, welche durch diese speziellen Konturen in E und E' bestimmt werden, die Transformationsformel (1), so gibt sie im Grenzübergang:

$$I_E^{A_0}(f) = I_{E'}^{A_0}(f').$$

Für die hier behandelten Integrale in weiterem Sinne würde man jedoch die Existenz von $I_{E'}^{A_0}(f')$ aus der von $I_E^{A_0}(f)$ nur in dem Ausnahmefalle folgern können, daß die Einführung der neuen Variablen **sämtliche** Ausschließungslinien l' und c' des Gebietes E' aus zulässigen Ausschließungslinien l und c des Gebietes E herleitete.

41. Reduktion auf wiederholte Integrale. Bei der Aufgabe, ein Doppelintegral in weiterem Sinne, das über das endliche Gebiet E erstreckt ist, auf ein wiederholtes Integral zu reduzieren, kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß E ein Rechteck ist, welches durch die Ungleichungen: $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$ definiert ist; man kann nämlich in allen Fällen E in ein solches Rechteck einschließen und f außerhalb E gleich Null setzen.

Es werden folgende Voraussetzungen gemacht: 1) der Grenzwert $I_E^d(f)$ besteht, 2) von den singulären Linien ist keine zur x -Achse parallel; man kann ferner zu jeder positiven Zahl ε einen Wert $\delta > 0$ angeben, derart, daß für jedes zur x -Achse parallele Intervall $x_1 x_2$, dessen Länge $< \delta$ ist, 3) das Integral und die Ungleichung:

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} f dx \right| < \varepsilon$$

besteht, wobei die Lage des Intervalls $x_1 x_2$ im Rechteck E willkürlich ist, und 4) das Integral und die Ungleichung:

$$\int_{x_1}^{x_2} |f| dx < \varepsilon$$

besteht, wobei die Lage des Intervalls in einem beliebigen, abgeschlossenen Teile von E willkürlich ist, der nur keinen Punkt einer singulären Linie enthält und zugleich mit ε vorgegeben worden ist; endlich 5) bilden die Stellen, in deren Umgebung die Funktion $f(x, y)$ nicht eigentlich integrierbar ist, eine unausgedehnte Menge, von der auf jeder Parallelen zur x -Achse eine Teilmenge m erster Art liegt (d. h. entweder die Menge m oder die Menge m' ihrer Häufungspunkte oder die Menge m'' der Häufungspunkte von $m' \dots$ oder irgend eine solche abgeleitete Menge $m^{(k)}$ enthält Punkte nur in endlicher Zahl).

Man schließt nun die singulären Linien der Funktion f durch beiderseits im Abstand δ' gezogene Parallele aus dem Rechteck aus¹⁾; der Rest Δ des Rechteckes ist ein für die Funktion f zulässiger Näherungsbereich. In ihm setzt man $f' = f$, im Reste von E : $f' = 0$. Dann hat f' über E ein absolut konvergentes Doppelintegral, und zwar ist [auf Grund der Voraussetzungen 4) und 5)]:

$$S_E f' dx dy = \int_c^d dy \int_a^b f' dx. \quad ^2)$$

¹⁾ Die Möglichkeit, daß Ausnahmepunkte der singulären Linien im Rechteck vorkommen können, läßt sich leicht beheben.

²⁾ De la Vallée-Poussin, Journal de Mathématiques 1892, p. 441.

Die Funktion von y :

$$F = \int_a^b f dx$$

bleibt im Intervall cd zwischen endlichen Grenzen. Denn man kann nach 3) das Intervall cd in Teilstrecken, deren Anzahl von y unabhängig ist, so zerlegen, daß die über diese Strecken genommenen Integrale, absolut gefaßt, unter einer gemeinsamen, von y unabhängigen Grenze bleiben. — Daher hat F im Intervall cd ein oberes und ein unteres bestimmtes Integral. Die Funktion von y :

$$F' = \int_a^b f' dx$$

bleibt, wie man leicht erkennt, ebenfalls zwischen bestimmten Grenzen, ihr Integral über das Intervall cd ist daher ein eigentliches. Dabei besteht die Relation:

$$\int_c^d F' dy + \int_{c1}^d (F - F') dy \leq \int_{c1}^d F dy \leq \int_c^{d2} F dy \leq \int_c^d F' dy + \int_c^{d2} (F - F') dy,$$

(in der die Indices 1 und 2 das obere und das untere Integral charakterisieren).

Nun ist:

$$S_E f' dx dy = S_A f dx dy;$$

man kann also δ' so klein annehmen, daß:

$$\left| \int_c^d F' dy - I_E^d(f) \right| = \left| S_A f dx dy - I_E^d(f) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ist. Ferner gilt, wenn man Dinis Definition der uneigentlichen einfachen Integrale zu Grunde legt, die Beziehung:

$$F - F' = \int_a^b (f - f') dx = \sum_{i=x_i}^{x_{i+1}} \int f dx;$$

darin bedeutet x_i, x_{i+1} eines der Intervalle, längs welcher die eben betrachtete Gerade $y = \text{const.}$ die Parallelstreifen der singulären Linien trifft. Die Anzahl dieser Intervalle bleibt unter einer von y unabhängigen Grenze, und ihre Längen werden [wegen 2)] zugleich

mit δ' unendlich klein. Daher genügt es [nach 3)], δ' unter eine passende, von y unabhängige Grenze zu bringen, um für das ganze Intervall cd die Ungleichung:

$$|F - F'| < \frac{\varepsilon}{2(d-c)}$$

herzustellen. Dann ist:

$$I_E^A(f) - \varepsilon < \int_{c1}^d F dy \leq \int_c^{d2} F dy < I_E^A(f) + \varepsilon,$$

also fallen die beiden mittleren Integralausdrücke zusammen, und es besteht die Reduktionsformel:

$$I_E^A(f) = \int_c^d dy \int_a^b f dx. \quad (1)$$

42. Die Voraussetzungen 1) bis 5) sollen nicht mehr im Rechteck E , sondern nur in dem Teile desselben gelten, welcher übrig bleibt, wenn man n bestimmte Gerade: $y = y_1, y = y_2, \dots, y = y_n$ zugleich mit n beliebig engen Parallelstreifen, in denen je eine enthalten ist, entfernt. Hingegen soll der Grenzwert $I_E^{A_0}(f)$ über das ganze Rechteck bestehen (darin liegt die Annahme, daß singuläre Punkte zweiter oder dritter Art nur auf den n Geraden vorkommen).

Für jedes der Rechtecke $\Delta_i: a \leq x \leq b, y_i + \delta \leq y \leq y_{i+1} - \delta'$, $[0 < \delta, \delta' < \frac{1}{2}(y_{i+1} - y_i)]$ gilt die bewiesene Reduktionsformel. Wenn δ und δ' gegen Null und dabei die Δ_i gegen die Rechtecksflächen E_i konvergieren, so nähert sich (man erkennt es durch eine der in Nr. 35 und 37 angestellten ähnliche Überlegung) der Grenzwert $I_{\Delta_i}^A(f)$ unbegrenzt dem Werte $I_{E_i}^{A_0}(f)$. Also besteht der Grenzwert und die Relation:

$$\lim_{\substack{\delta=0 \\ \delta'=0}} \sum_{i=0}^n \int_{y_i+\delta}^{y_{i+1}-\delta'} \int_a^b f dx = \int_c^d dy \int_a^b f dx = I_E^A(f), (y_0=c, y_{n+1}=d). \quad (2)$$

43. Wenn $b = +\infty$ ist, so genügen für die Reduktion folgende Voraussetzungen: 1) $I_E^{A_0}(f)$ besteht; 2) für jeden noch so großen, endlichen Wert b sind die Annahmen von Nr. 41 erfüllt;

3) zu jeder positiven Zahl ε gehört ein von y unabhängiger Wert B , derart, daß für jedes $b > B$ das Integral und die Ungleichung:

$$\left| \int_b^{\infty} f dx \right| < \varepsilon$$

besteht.

Man setzt in jedem Punkte, dessen Abszisse $\geq B$ ist, $f' = 0$, kann sodann den in Nr. 41 gegebenen Beweis der Reduktionsformel (1) fast unverändert hierher übertragen und erhält die Relation:

$$I_E^{d_0}(f) = \int_c^d dy \int_a^{\infty} f dx. \quad (3)$$

Auch wenn die Voraussetzungen 2) und 3) an Stellen des Intervalls cd in endlicher Anzahl hinfällig werden, bleibt diese Formel richtig; Beweis wie in Nr. 42.

Ist $d = +\infty$, besteht $I_E^{d_0}(f)$, und sind für jeden endlichen Wert von d die Voraussetzungen 1) bis 3) — abgesehen von Stellen des Intervalls cd in endlicher Anzahl — erfüllt, so läßt sich der Übergang zur Grenze $d = +\infty$ in der Formel (3) unmittelbar ausführen; man erhält das Resultat:

$$I_E^{d_0}(f) = \int_c^{\infty} dy \int_a^{\infty} f dx. \quad (4)$$

Die Folge der Integrationen ist umkehrbar, wenn die Voraussetzungen so ergänzt worden sind, daß sie hinsichtlich x und y symmetrisch lauten.

Diese Umkehrbarkeit ist bisher nur unter Annahmen von der Art bewiesen worden¹⁾, daß sämtliche Unstetigkeitsstellen der Funktion $f(x, y)$ auf jeder Parallelen zu einer der Achsen sich mit unendlich kleinen Strecken, deren Zahl und Lage sich von einer Parallelen zur anderen im allgemeinen stetig ändert, bedecken lassen. Nur wenn man sich auf die Existenz eines absolut konvergenten Doppelintegrals berufen konnte, waren solche Einschränkungen unnötig. Sie sind es, wie man sieht, auch in dem Falle der Existenz eines Doppelintegrals in weiterem Sinne.

¹⁾ Jordan, Cours, II, p. 67; de la Vallée-Poussin, l. c., p. 456.