# Note über analytische Functionen mehrerer Veränderlichen.

Von

W. F. Osgood in Cambridge (Mass.).

---

Satz: *Es möge $F(x, y)$ eine Function der unabhängigen Veränderlichen $x, y$ sein, die für jedes Werthepaar $(x, y)$ des Bereiches* (T): $|x| < R$, $|y| < S$ *eindeutig erklärt und, wie folgt, beschaffen ist:*

*a) für jeden festen im Kreise $|x| = R$ (resp. $|y| = S$) gelegenen Werth von $x$ (resp. $y$) soll $F(x, y)$ eine im Kreise $|y| = S$ (resp. $|x| = R$) analytische Function von $y$ (resp. $x$) sein;*

*b) $F(x, y)$ soll im Bereich* (T) *endlich bleiben; d. h. es soll*

$$|F(x, y)| < G$$

*bleiben, wobei $G$ eine von $x, y$ unabhängige positive Grösse bedeutet und das Werthepaar $(x, y)$ im Bereich* (T) *beliebig angenommen wird. Dann ist $F(x, y)$ eine analytische Function der unabhängigen Veränderlichen $x, y$**).

Der Beweis stützt sich auf einen allgemeinen Satz, den man für den vorliegenden Zweck in folgender Weise aussprechen kann: *Ist $s(x, \alpha)$ für jeden Werth $\alpha$, welcher einer (reellen oder complexen) Werthemenge mit Häufungsstelle $\bar{\alpha}$ angehört, eine im Innern des Kreises $|x| = R$ analytische Function von $x$, und convergirt $s(x, \alpha)$ gleichmässig gegen einen Grenzwerth, $\varphi(x)$, wenn $\alpha$ dem Werth $\bar{\alpha}$ zustrebt, so ist $\varphi(x)$ eine in diesem Kreise analytische Function von $x$.*

---

*) Die Frage, ob die Bedingung b) nicht von selbst erfüllt ist, ist noch nicht entschieden.

In der That lässt sich $F(x, y)$ zunächst in eine Potenzreihe nach $y$ entwickeln:

$$(1) \qquad F(x, y) = f_0(x) + f_1(x)y + f_2(x)y^2 + \cdots,$$

wobei $f_0(x) = F(x, 0)$ eine im Kreise $|x| = R$ analytische Function von $x$ ist und

$$|f_n(x)| < G S_1^{-n}, \qquad (0 < S_1 < S).$$

Aber auch alle weiteren Coefficienten $f_n(x)$ sind in demselben Kreise analytische Functionen von $x$. Man nehme an, dies gälte für die ersten $m$ Coefficienten und setze dann $(0 < |y| < S)$

$$\frac{F(x,y) - f_0(x) - f_1(x)y - \cdots - f_{m-1}(x)y^{m-1}}{y^m} = f_m(x) + f_{m+1}(x)y + \cdots.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist für jeden solchen Werth von $y$ eine im Kreise $|x| = R$ analytische Function von $x$, während die rechte Seite, $\psi(x, y)$, gleichmässig gegen den Werth $f_m(x)$ convergirt, wenn $y$ dem Werth Null zustrebt. Beschränkt man nämlich $y, y'$ auf das Innere des Kreises $|y| = s$, $(0 < s < S_1)$, so erhält man die Relation:

$$\psi(x, y') - \psi(x, y)$$

$$= (y' - y)\left\{f_{m+1}(x) + \sum_{i=2}^{\infty} f_{m+i}(x)\,(y'^{\,i-1} + y'^{\,i-2}y + \cdots + y^{i-1})\right\},$$

$$|\psi(x, y') - \psi(x, y)| \leqq |y' - y| \sum_{i=1}^{\infty} i\,|f_{m+i}(x)|\, s^{i-1}$$

$$< |y' - y| \frac{G}{S_1^{m+1}}\left(1 - \frac{s}{S_1}\right)^{-2}.$$

Daraus ergiebt sich die gleichmässige Convergenz und der Grenzwerth, $f_m(x)$, erweist sich somit als eine analytische Function von $x$.

Endlich convergirt die Reihe (1), deren Glieder analytische Functionen der unabhängigen Veränderlichen $x$, $y$ sind, im Bereich $|x| < R$, $|y| < s$ gleichmässig, denn

$$|f_n(x)y^n| < G\left(\frac{s}{S_1}\right)^n.$$

Daraus schliesst man, dass $F(x, y)$ im Bereich (T) eine analytische Function der unabhängigen Veränderlichen $x$, $y$ ist. Denn zur Cauchy'schen Definition genügt, ausser den Voraussetzungen des Satzes, die nun vorhandene Stetigkeit der Function $F(x, y)$ im Bereich (T), während andererseits die zur Weierstrass'schen Definition nothwendige Reihenentwicklung durch einen bekannten Weierstrass'schen Satz direct constatirt wird.

Der Verallgemeinerung des Satzes nebst Beweise auf den Fall, dass die Function $F(x_1, \ldots, x_k)$ von $k > 2$ Argumenten abhängt, stehen keine Schwierigkeiten im Wege.

Cambridge (Mass., U. S. A.), November 1898.