Die Lehre von den geometrischen Proportionen.

Von

J. MÖLLERUP in Kopenhagen.

Nachfolgende Lehre von den geometrischen Proportionen stützt sich auf die ebenen Axiome mit Ausnahme des Archimedischen.

1. Auf dem einen Schenkel eines rechten Winkels O werden die Punkte A und B , auf dem anderen C und D abgetragen; AC ist parallel zu BD . Diese Lage von den vier Strecken OA , OB , OC und OD wird durch die Gleichung

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD}$$

ausgedrückt; die einzelnen „Verhältnisse“ haben hier keine Bedeutung. Die Gleichung wird eine Proportion genannt. Man kann auch schreiben

$$\frac{OB}{OA} = \frac{OD}{OC}$$

oder

$$\frac{OC}{OD} = \frac{OA}{OB};$$

denn der Winkel ist nach einem der gewöhnlichen Congruenzaxiome seinem umgekehrten congruent.

Es ist einleuchtend, dass drei von den Gliedern der Proportion das vierte eindeutig bestimmen.

2. *In ähnlichen rechtwinkligen Dreiecken sind die entsprechenden Katheten proportional. Denn die Dreiecke können wie OAC und OBD gelegt werden.*

3. (Das commutative Gesetz). *Wenn die Proportion*

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

gilt, hat man auch

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}.$$

Beweis. Auf die Schenkel eines rechten Winkels O werden die

Strecken $OA = a$, $OB = b$, endlich $OD = d$ in entgegengesetzter Richtung von OA abgetragen.

Die Punkte A , B und D bestimmen alsdann einen Kreis, der zum zweiten Male von BO in C geschnitten wird. Zieht man nun die Strecken AC und BD , so findet man in den ähnlichen rechtwinkligen Dreiecken OAC und OBD

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD},$$

und mithin

$$OC = c.$$

Zieht man nunmehr die Strecken AB und CD , so findet man in den ähnlichen rechtwinkligen Dreiecken OAB und OCD

$$\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$$

oder

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d},$$

was zu beweisen war.

4. Wenn

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

und

$$\frac{a}{b} = \frac{e}{f},$$

dann ist

$$\frac{c}{d} = \frac{e}{f}.$$

Dieser Satz ist eine unmittelbare Folge des Satzes 3 und des Parallelenaxioms.

5. (Das distributive Gesetz). Wenn

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

dann ist auch

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}.$$

Beweis. OAC und ABD sind zwei ähnliche rechtwinklige Dreiecke: $OA = a$, $OC = c$, $AB = b$; AD muss dann gleich d sein. BD muss parallel zu AC sein. Werden BD und OC bis zum Schnittpunkte E verlängert, so erhält man

$$\frac{OB}{OA} = \frac{OE}{OC}$$

oder

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d},$$

was zu beweisen war.

6. Aus den eben bewiesenen Sätzen entnehmen wir: *Wenn*

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

dann ist

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}.$$

7. *In zwei ähnlichen Dreiecken sind die entsprechenden Seiten proportional.*

Beweis. Die entsprechenden Seiten seien a_1 und a_2 , b_1 und b_2 , c_1 und c_2 . Man halbiert die Winkel der beiden Dreiecke und vom Schnittpunkt der Winkelhalbierenden fällt man Lote auf die Seiten; in jedem Dreiecke erhält man dann auf den Seiten sechs Strecken, die paarweise congruent sind. Diese Strecken seien $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1 - \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$.

$$\alpha_1 + \beta_1 = c_1, \quad \beta_1 + \gamma_1 = a_1, \quad \gamma_1 + \alpha_1 = b_1;$$

$$\alpha_2 + \beta_2 = c_2, \quad \beta_2 + \gamma_2 = a_2, \quad \gamma_2 + \alpha_2 = b_2.$$

Die Lote sind in demselben Dreiecke congruent; sie werden r_1 und r_2 genannt. Aus den vorigen Sätzen entnehmen wir:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{\beta_1 + \gamma_1}{\beta_2 + \gamma_2} = \frac{\gamma_1 + \alpha_1}{\gamma_2 + \alpha_2} = \frac{\alpha_1 + \beta_1}{\alpha_2 + \beta_2}$$

oder

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2},$$

was zu beweisen war.

8. (Das associative Gesetz). *Wenn*

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

und

$$\frac{a}{e} = \frac{f}{d},$$

dann ist auch

$$\frac{b}{e} = \frac{f}{c}.$$

Man kann hier voraussetzen: $b > e > f$.

Beweis. Auf die Schenkel eines willkürlichen Winkels O werden die Strecken $OA = a$ und $OB = b$, endlich $OD = d$ in entgegengesetzter Richtung von OA abgetragen. Die Punkte A, B und D bestimmen einen Kreis, der zum zweiten Male von BO in C geschnitten wird; man findet nun in den ähnlichen Dreiecken OBD und OAC

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD},$$

mithin

$$OC = c.$$

Ein Kreisbogen mit O als Mittelpunkt und e als Radius schneidet den Kreis in E (wenn er den Kreis nicht schneite, würde ein Kreis durch

A , D und einen Punkt E im Abstände e von O zum zweiten Male von EO in F geschnitten werden, indem $OF=f$, wo F ausserhalb des ursprünglichen Kreises liegen würde, was der obengenannten Voraussetzung widerspräche); EO schneidet diesen zum zweiten Male in F . Man findet nunmehr aus den ähnlichen Dreiecken OAF und OED

$$\frac{OA}{OE} = \frac{OF}{OD},$$

mithin

$$OF = f.$$

Endlich findet man aus den ähnlichen Dreiecken OBf und OEC

$$\frac{OB}{OE} = \frac{OF}{OC}$$

oder

$$\frac{b}{e} = \frac{f}{c},$$

was zu beweisen war.

9. In den vorstehenden Sätzen ist die ganze Lehre von den Proportionen, die ohne Hülfe des Archimedischen Axioms begründet ist, enthalten. Der Satz 8 ist der sogenannte „Pascal'sche Satz“, den Professor Hilbert seiner Nicht-Archimedischen Geometrie zu Grunde gelegt hat; für diesen Satz habe ich also hier einen neuen Beweis geliefert. Die Aufgabe, die ich mir hier gestellt habe, ist früher in dem tiefsinnigen Werke: Grundlagen der Geometrie, des obengenannten Mathematikers, gelöst; ich habe aber einen anderen Weg eingeschlagen und, wie es mir scheint, das Ziel auf einfachere Weise erreicht.

Herr Professor Hilbert macht mich darauf aufmerksam, dass meine Vereinfachung des Beweises des commutativen Gesetzes auch in seiner Darstellung erreicht wird, wenn er das Streckenproduct ab mittelst eines Kreises definirt. Auf die Schenkel eines rechten Winkels O werden die Strecken $OA=a$ und $OC=1$, endlich $OB=b$ in entgegengesetzter Richtung von OA abgetragen. Die Punkte A , B und C bestimmen einen Kreis, der zum zweiten Male von CO in D geschnitten wird. OD wird dann dem Streckenproducte ab gleich gesetzt; dieses Product ist dann in den Factoren symmetrisch. Natürlicherweise ist der Beweis des Satzes 7 dem Hilbert'schen ganz analog.

Kopenhagen, Januar 1902.