Ueber eine Eigenschaft der Resultante.

Von

A. BRILL in München.

In einer früheren Note*) habe ich den Zusammenhang dargelegt, der zwischen dem Auftreten eines vielfachen Factors der *Discriminante* einer Gleichung und ihren Wurzeln besteht. Es existirt eine ähnliche Beziehung zwischen der *Resultante* mehrerer Gleichungen und den Lösungssystemen der *Componenten*, wie im Folgenden gezeigt werden soll.

Gegeben seien zwei algebraische Gleichungen:

$$f(x) = 0, \quad \varphi(x) = 0,$$

deren Coefficienten von Grössen $a, b, \dots$ so abhängen, dass, wenn eine bestimmte rationale Function derselben:

$$R(a, b, \dots),$$

die selbst nicht Potenz einer solchen ist, verschwindet, allemal nicht eine allein, sondern zugleich n Wurzeln beider Gleichungen übereinstimmen. Dann wird jedenfalls R Factor der Resultante von f und φ sein; ich will zeigen, dass er (mindestens) n -facher Factor ist.

Man sieht zunächst, dass die ersten Differentialquotienten R nach $a, b, \dots$ nicht für das ganze Werthegebiet $a, b, \dots$, für welches $R = 0$ ist, verschwinden können. Denn wäre dies z. B. mit: $\frac{\partial R}{\partial a}$ der Fall; so müsste R oder, was hier allein möglich, eine Wurzel aus R Factor dieses Differentialquotienten und R also Potenz einer rationalen Function der $a, b, \dots$ sein, was gegen die Voraussetzung ist.

Man bemerkt ferner, dass es genügen muss, wenn $f = 0, \varphi = 0$ gegeben, den Beweis der Behauptung für irgend ein specielles Werthsystem der $a, b, \dots$ zu führen, weil der Exponent des Factors R eine Function dieser Coefficienten nicht sein kann.

Wir wählen zu diesem Zweck ein Werthsystem $a + \delta a, b + \delta b, \dots$, welches einem solchen: $a, b, \dots$, sehr nahe benachbart ist, für das R , nicht aber sämtliche Differentialquotienten von R verschwinden. Die

*) Diese Annalen Bd. XII, p. 87.

Gleichungen $f=0$, $\varphi=0$ mögen dann beide die n Wurzeln $x_1, x_2, \dots$, die wir vorerst *verschieden* annehmen wollen, besitzen.

Die Variationen $\delta a, \delta b, \dots$, die alle zugleich verschwinden, kann man für sehr kleine Werthe einer von ihnen, etwa δl , proportional annehmen.

Hat man so:

$$\delta R \equiv \frac{\partial R}{\partial a} \delta a + \frac{\partial R}{\partial b} \delta b + \dots = R_1 \delta l,$$

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial a} \delta a + \frac{\partial f}{\partial b} \delta b + \dots = f_1 \delta l,$$

$$\delta \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial a} \delta a + \frac{\partial \varphi}{\partial b} \delta b + \dots = \varphi_1 \delta l,$$

so ist in Folge der über R gemachten Voraussetzungen R_1 eine von Null verschiedene endliche Grösse.

Die Variationen $\delta x_1, dx_1, \delta x_2, dx_2, \dots$ der Wurzeln bestimmen sich dann aus:

$$f_1(x_1) \delta l + f'(x_1) \delta x_1 = 0; \quad \varphi_1(x_1) \delta l + \varphi'(x_1) dx_1 = 0,$$

$$f_1(x_2) \delta l + f'(x_2) \delta x_2 = 0; \quad \varphi_1(x_2) \delta l + \varphi'(x_2) dx_2 = 0,$$

$$\dots \dots \dots$$

wo im Allgemeinen die $f_1(x)$, $\varphi_1(x)$ sowie die $f'(x)$, $\varphi'(x)$ von Null verschieden sind, und, wegen der Voraussetzung über die Wurzeln, $f'(x_i)$ mit $\varphi'(x_i)$ überhaupt nicht gleichzeitig Null werden kann. Die Resultante aus f und φ lässt sich nun darstellen als das Product der Functionen f , geschrieben in den Wurzeln der Gleichung $\varphi=0$. Der Beitrag, welchen hierzu die $x_1, x_2, \dots$ liefern, ist proportional mit:

$$(f_1(x_1) \delta l + f'(x_1) dx_1) (f_1(x_2) \delta l + f'(x_2) dx_2) \dots$$

$$= \frac{(\delta l)^n}{\varphi'(x_1) \varphi'(x_2) \dots} (f_1(x_1) \varphi'(x_1) - f'(x_1) \varphi_1(x_1)) (f_1(x_2) \varphi'(x_2) - f'(x_2) \varphi_1(x_2)) \dots$$

oder proportional mit der ganzen Function:

$$(\delta R)^n \cdot (f_1(x_1) \varphi'(x_1) - f'(x_1) \varphi_1(x_1)) (f_1(x_2) \varphi'(x_2) - f'(x_2) \varphi_1(x_2)) \dots,$$

also mit der n^{ten} Potenz derjenigen Grösse, welche bei unserer Annahme R vertritt. Q. e. d.

Wenn $f_1(x_i)$, $\varphi_1(x_i)$ gleichzeitig Null werden, erhöht sich diese Potenz, weil dann an die Stelle von δf und $\delta \varphi$ mit $(\delta l)^2$ oder einer höheren Potenz von δl proportionale Grössen treten.

Von den Wurzeln x_i können zwei oder mehrere einander gleich werden, ohne dass dies eine Erhöhung der Potenz zur Folge hat. Denn ist z. B. $x_1 = x_2$, so erscheinen in dem Factor von $(\delta l)^n$ die beiden Quotienten $f'(x_1) : \varphi'(x_1)$ und $f'(x_2) : \varphi'(x_2)$ lediglich in der unbestimmten Form $0:0$, deren wahrer Werth sich leicht ermitteln lässt.

Vorstehenden Beweis kann man unmittelbar auf den Fall von p Gleichungen mit $p - 1$ Veränderlichen:

$f(x, y, z, \dots) = 0$; $\varphi(x, y, z, \dots) = 0$; $\psi(x, y, z, \dots) = 0 \dots$ übertragen. Dieselben mögen gleichzeitig durch n verschiedene Werthsysteme erfüllt werden, wenn eine Function R der in den Coefficienten jener p Gleichungen auftretenden Grössen $a, b, \dots$, verschwindet. Vorausgesetzt ist noch, dass R selbst nicht Potenz ist. Alsdann hat die Resultante (R^n) zum Factor. Man zeigt nämlich wie oben, dass, wenn die $a, b, \dots$ in der Nähe eines solchen Werthsystems sich befinden, für das R verschwindet, die Resultante, als das Product der Werthe, die eine der Functionen $f, \varphi, \psi, \dots$ in den Lösungssystemen der übrigen geschrieben, erhält, den Factor $(\delta R)^n$ besitzt.

Eine Anwendung findet dieser Satz in der nachfolgenden Abhandlung über Singularitäten. In § 6. wird gezeigt, dass die Bedingung für das Auftreten eines Selbstberührungspunktes auf einer rationalen Curve sich durch das gleichzeitige Bestehen von drei Gleichungen zwischen den Parametern λ, λ_1 ausdrückt, welche den sich berührenden Zweigen angehören. Weil diese Gleichungen die Vertauschung von λ mit λ_1 zulassen, so dass ihnen gleichzeitig die beiden Werthepaare λ, λ_1 und λ_1, λ genügen, wenn *eines* genügt, so ist die Resultante das vollständige Quadrat eines rationalen Ausdrucks derjenigen Grössen, aus denen die Coefficienten jener drei Gleichungen gebildet sind.

München, im December 1879.