p', q', s' lassen sich aus den Elementen der zweiten Näherung mit einem Fehler der zweiten Ordnung finden. Für f''''', g''''', h''''' erhält man auf dieselbe Weise, wie oben:

$$\left. \begin{aligned} f'''' + f \left[4(f'f'''' + g'g'''' + h'h''') + 3([f'']^2 + [g'']^2 + [h'']^2) \right] - \frac{f}{\varrho} [fp' + gq' + hs'] + \frac{p'}{\varrho} &= 0 \\ g'''' + g \left[4(f'f'''' + g'g'''' + h'h''') + 3([f'']^2 + [g'']^2 + [h'']^2) \right] - \frac{g}{\varrho} [fp' + gq' + hs'] + \frac{q'}{\varrho} &= 0 \\ h'''' + h \left[4(f'f'''' + g'g'''' + h'h''') + 3([f'']^2 + [g'']^2 + [h'']^2) \right] - \frac{h}{\varrho} [fp' + gq' + hs'] + \frac{s'}{\varrho} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Hieraus bestimmt man f''''', g''''', h''''' . Ferner hat man die Grössen p, q, s mit den Elementen der zweiten Näherung nochmals zu berechnen, um dann aus (7) f''''', g''''', h''''' mit einem Fehler der dritten Ordnung zu finden. Diese Werthe setze man wieder in die Gleichungen (6) ein und verfähre weiter, wie bei der ersten Näherung. Man erhält dann die Elemente mit einem Fehler der vierten Ordnung.

So kann man beliebig weit in der Näherung fortgehen.

Die Differentialquotienten von $\frac{\varrho \cdot f}{r^3} + XP$ wird man am besten nicht direkt berechnen, sondern sie durch Interpolation aus einer Reihe von Werthen dieser Grösse be-

Frankfurt a.M., 1890 Jan. 8.

stimmen. Eine bedeutende Vereinfachung erhält die Rechnung noch, wenn man in den Gleichungen (6) für t das Mittel aus den drei Beobachtungszeiten t_1, t_2, t_3 nimmt. Man findet dann nämlich gleich in der ersten Näherung f'', g'', h'' nur mit einem Fehler der dritten Ordnung, den nun auch die Elemente erhalten. Daher darf man jetzt die zweite Näherung überspringen und sofort auf die dritte übergehen. Mit den Elementen der ersten Näherung wird man die Verbesserungen der Beobachtungen für Parallaxe etc. berechnen, zumal da die hier nothwendigen Grössen sehr gut zur Bestimmung von p, q, s zu gebrauchen sind. Was die Genauigkeit der Elemente anbelangt, so wird sie für die dritte Näherung ungefähr $k^3 = 0.00003$, d. h. eine fünfstellige sein.

K. Schwarzschild.

Methode zur Bahnbestimmung der Doppelsterne.

Von K. Schwarzschild.

Die Bruns'sche Bahnbestimmungsmethode für Planeten und Cometen führte mich durch Analogie zu folgender Methode zur Bahnbestimmung bei Doppelsternen.

Das Hauptziel der meisten Methoden zur Bahnbestimmung bei Planeten ist die Aufstellung einer Gleichung für die Entfernung des Planeten von der Erde oder Sonne. Entsprechend kann man sich bei Doppelsternen die Aufgabe stellen, eine Gleichung für die wahre Distanz des Nebensterne vom Hauptstern zu ermitteln.

Man lege ein rechtwinkliges Coordinatensystem durch den Hauptstern, die Axen der x und y in die durch den Hauptstern gehende Tangentialebene an der Himmelskugel und zwar die Axe der x in die Richtung nach Norden, die der y in die Richtung nach Osten. Die Axe der z lege man in die Richtung nach der Erde resp. Sonne. In dem Doppelsternsystem gelten die bekannten Bewegungsgleichungen:

$$x'' + \frac{k^2 x}{r^3} = 0; \quad y'' + \frac{k^2 y}{r^3} = 0; \quad z'' + \frac{k^2 z}{r^3} = 0$$

wo $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ und k^2 die Gauss'sche Constante für das Doppelsternsystem ist. Die Accente bezeichnen die Differentiation nach der Zeit.

Setzt man nun: $\frac{r^3}{k^2} = p^3$, so erhält man an Stelle der Bewegungsgleichungen:

$$\frac{x''}{x} = \frac{y''}{y} = \frac{z''}{z} = -\frac{1}{p^3} \quad (1)$$

Durch Differentiation der Gleichung $\frac{r^3}{k^2} = p^3$ ergibt sich:

$$\frac{r'}{r} = \frac{p'}{p} \quad (2)$$

durch Differentiation der Gleichung $r^2 = \varrho^2 + z^2$, wo ϱ die scheinbare Distanz der beiden Sterne bezeichnet, findet man:

$$rr' = \varrho\varrho' + zz' \quad (3)$$

$$rr'' + (r')^2 = \varrho\varrho'' + (\varrho')^2 + zz'' + (z')^2$$

Hier ersetze man r', r'', z, z' und z'' durch die aus den vorhergehenden Gleichungen folgenden Werthe. Dann erhält man:

$$r^2 \frac{p''}{p} + r^2 \left(\frac{p'}{p} \right)^2 = \varrho\varrho'' + (\varrho')^2 - \frac{r^2 - \varrho^2}{p^3} + \frac{r^4 \left(\frac{p'}{p} \right)^2 - 2r^2 \varrho\varrho' \frac{p'}{p} + \varrho^2 (\varrho')^2}{r^2 - \varrho^2}$$

Durch Multiplication mit $r^2 - \varrho^2$ ergibt sich schliesslich:

$$r^3 \left[\frac{p''}{p} + \frac{1}{p^3} \right] - r^2 \varrho^2 \left[\left(\frac{p''}{p} + \frac{1}{p^3} \right) + \left(\frac{\varrho'}{\varrho} - \frac{p'}{p} \right)^2 + \left(\frac{\varrho''}{\varrho} + \frac{1}{p^3} \right) \right] + \varrho^4 \left[\frac{\varrho''}{\varrho} + \frac{1}{p^3} \right] = 0. \quad (4)$$

Dies ist die gesuchte Gleichung für r , da man ϱ' , p , p' , p'' leicht aus beobachteten Grössen bestimmen kann.

Ich nehme zunächst an, die Beobachtungen seien in rechtwinkligen Coordinaten gegeben oder auf solche reducirt. Dann suche man die beobachteten Werthe von x und y durch Reihen nach Potenzen der Zeit darzustellen, indem man je nach der Zahl der Beobachtungen von einer bestimmten Potenz der Zeit an die höheren Potenzen ver-

nachlässigt. Doch die Beobachtungen müssen hinreichend sein, um die vierte Potenz der Zeit mit berücksichtigen zu können. Aus den Coefficienten der erhaltenen Reihen findet man leicht die Differentialquotienten von x und y .

Nun findet man p aus der Gleichung:

$$-\frac{1}{p^3} = \frac{x''}{x} = \frac{y''}{y}.$$

Ferner die Differentialquotienten von p aus:

$$3 \frac{p'}{p} = \frac{x'}{x} - \frac{x'''}{x''} = \frac{y'}{y} - \frac{y'''}{y''}$$

$$3 \frac{p''}{p} - 3 \left(\frac{p'}{p} \right)^2 = \frac{x''}{x} - \left(\frac{x'}{x} \right)^2 + \left(\frac{x'''}{x''} \right)^2 - \frac{x''''}{x'''} = \frac{y''}{y} - \left(\frac{y'}{y} \right)^2 + \left(\frac{y'''}{y''} \right)^2 - \frac{y''''}{y'''}.$$

Den Werth von ϱ , ϱ' , ϱ'' erhält man aus den Gleichungen:

$$\varrho^2 = x^2 + y^2; \quad \varrho \varrho' = x x' + y y'; \quad \varrho \varrho'' + (\varrho')^2 = x x'' + y y'' + (x')^2 + (y')^2.$$

Nunmehr kann man die Gleichung (4) aufstellen und aus dieser r bestimmen. Dabei bleibt das Vorzeichen von r unbestimmt, was natürlich ist, da man nicht angeben kann, ob der Begleiter näher oder weiter von der Erde ist, als der Hauptstern. Mit Hülfe von r erhält man z und dann aus (2) r' und aus (3) z' . Da man nun für einen Zeitpunkt x , y , z , und x' , y' , z' kennt, kann man auf bekannte Weise die Elemente berechnen.

Wenn Positionswinkel ohne zugehörige Distanzen gegeben sind, so bestimme man die letzteren mit Hülfe des Gesetzes, dass auch in der scheinbaren Bahn die Flächengeschwindigkeit constant ist. Dieses Gesetz liefert die Gleichung:

$$\varrho^2 v' = c^2,$$

wo v' die scheinbare Winkelgeschwindigkeit ist und c^2 eine Constante bezeichnet, die man mit Hülfe eines einzigen gegebenen Werthes von ϱ und der zugehörigen Winkelgeschwindigkeit finden kann. Da sich v' für jede Zeit durch Interpolation aus einer Anzahl benachbarter Positionswinkel bestimmen lässt, erhält man die zu einem Positionswinkel zugehörige Distanz aus der Gleichung: $\varrho = \frac{c}{\sqrt{v'}}$.

Nunmehr kann man die Reduction auf rechtwinklige Coordinaten ausführen und weiter wie oben verfahren.

Frankfurt a. M., 1890 Febr. 3.

K. Schwarzschild.

Beobachtungen des Mondes und der Mondsterne.

Von Dr. *Boy Matthiessen*, Assistent der Karlsruher Sternwarte.

Nachstehende Beobachtungen sind am 2.5 zölligen, Bamberg'schen Passageninstrument der Karlsruher Sternwarte angestellt; die Durchgänge sind, fast ohne Ausnahme an allen 15 Fäden des Netzes, registrirt worden, und zwar beträgt nach dem Mittel aus einer Anzahl beliebig herausgegriffener Abende:

der wahrscheinliche Fehler eines Fadenantritts eines Sterns	± 0.054
» » » des Mittels aus 15 Fäden für einen Stern	± 0.014
» » » eines Fadenantritts des Mondrandes	± 0.076
» » » des Mittels aus 15 Fäden für den Mondrand	± 0.019

Die dritte Columnne der ersten Tafel giebt die Durchgangszeit durch den Meridian für die betreffenden Sterne und Mondränder nach der in den Strom eingeschalteten Uhr Hohwü 41; darauf folgen hinter den Mondsternen die auf den Rectascensionen des Nautical Almanac beruhenden Uhrstände. Die eingeklammerten Werthe von Δt sind nicht mit verwendet; nur in einem Fall, am 19. Sept. 1888 ist der Ort eines Sterns, nämlich der von 27 Piscium nach Loewy »Ephémérides des Etoiles de Culmination Lunaire et de Longitude pour 1888« um -0.540 verbessert worden.

An denjenigen Abenden wo zugleich eine Zeitbestimmung gemacht wurde, geschah die Berechnung des für den Mondort angewendeten Uhrstandes unter Berücksichtigung aller Sterne; an den übrigen Abenden wurden die kleinen und ziemlich constanten Fehler des Instruments in Azimut und Collimation nicht neu berechnet sondern interpolirt.

Eine Vergleichung der aus den Beobachtungen der Ränder sich ergebenden Rectascensionen des Mondcentrums mit der stündlichen Ephemeride des Nautical Almanac lieferte