Sur l'équation de Lamé

(extrait d'une lettre à Mr. Brioschi).

(Par Mr. C. HERMITE, à Paris.)

.
 Vous ne serez donc pas surpris que je sois parvenu de mon côté à l'équation différentielle du 3^{me} ordre :

$$z''' + 3pz'' + (p' + 2p^2 + 4q)z' + 2(q' + 2pq)z = 0$$

dont les solutions sont les produits de deux solutions de l'équation du second ordre :

$$y'' + py' + qy = 0;$$

mais je l'obtiens sous une forme un peu différente, en prenant pour point de départ, l'équation :

$$2Ay'' + A'y' = By. \tag{1}$$

Un calcul facile me donne :

$$2Az''' + 3A'z'' + A''z' = 4Bz' + 2B'z \tag{2}$$

et voici les conséquences que j'en tire. Faisant dans l'équation de LAMÉ, $sn^2x = t$, on obtiendra pour transformée l'équation (1), on l'on prendra :

$$A = t(1-t)(1-k^2t)$$

$$2B = n(n+1)k^2t + h.$$

Les fonctions A et B étant ainsi de simples polynômes, du troisième et du premier degré en t , la différentiation d'ordre p de l'équation (2), donne :

$$2Az^{p+3} + (2p+3)A'z^{p+2} + \left[\frac{5p(p+1)+2}{2} A'' - 2B \right] z^{p+1} \\
+ [2p(p-1)(p-2) + 9p(p-1) + 6p - (2p+1)(n^2+n)] k^2 z^p = 0;$$

or on peut mettre le coefficient de z^p , sous la forme :

$$(2p+1)(p-n)(p+n+1);$$

il s'annule donc en faisant $p=n$, et en adoptant cette valeur, l'équation est satisfaite si l'on pose $z^p = \text{const.}$ L'équation (2) par conséquent admet pour solution un polynôme entier en t de degré n , $z = F(t)$, et les conclusions auxquelles vous êtes parvenu pour $n=1$, s'étendent d'elles mêmes au cas où n est quelconque. En effet, deux solutions y_1 et y_2 de l'équation (1) sont liées par la relation :

$$y_2 \frac{dy_1}{dt} - y_1 \frac{dy_2}{dt} = \frac{C}{\sqrt{A}}$$

ou C est une constante, et en y joignant la condition :

$$\frac{d(y_1 y_2)}{dt} = y_2 \frac{dy_1}{dt} + y_1 \frac{dy_2}{dt} = F'(t)$$

on en déduira :

$$y_2 \frac{dy_1}{dt} = \frac{1}{2} \left[F'(t) + \frac{C}{\sqrt{A}} \right], \quad y_1 \frac{dy_2}{dt} = \frac{1}{2} \left[F'(t) - \frac{C}{\sqrt{A}} \right]$$

et par suite :

$$\frac{1}{y_1} \frac{dy_1}{dt} = \frac{1}{2} \left[\frac{F'(t)}{F(t)} + \frac{C}{\sqrt{A} F(t)} \right], \quad \frac{1}{y_2} \frac{dy_2}{dt} = \frac{1}{2} \left[\frac{F'(t)}{F(t)} - \frac{C}{\sqrt{A} F(t)} \right]$$

d'où enfin :

$$y = G e^{\frac{1}{2} \int \left[\frac{F'(t)}{F(t)} + \frac{C}{\sqrt{A} F(t)} \right] dt} + G' e^{\frac{1}{2} \int \left[\frac{F'(t)}{F(t)} - \frac{C}{\sqrt{A} F(t)} \right] dt} \quad (3)$$

en désignant par G et G' deux constantes arbitraires.

Voici maintenant à l'égard de la constante C , une remarque essentielle. On tire aisément de l'équation (2), la suivante :

$$A(2zz'' - z'^2) + A'zz' = 2Bz^2 - N, \quad (4)$$

et en résultat se vérifie sur le champ en différentiant et divisant les deux membres par z . Mais à la solution spéciale de cette équation qui est donnée en prenant pour z le polynôme $F(t)$, correspond une valeur entièrement déterminée de N . Qu'on attribue en effet à la variable t pour valeur particulière une racine de l'équation $y_1 = 0$, nous aurons en même temps, $z = 0$, $z' = y'_1 y_2$,

donc: $N = A(y'_1 y_2)^2$. Or en attribuant cette même valeur à t , dans l'équation

$$y_2 \frac{dy_1}{dt} - y_1 \frac{dy_2}{dt} = \frac{C}{\sqrt{A}},$$

vous voyez qu'on en conclut: $C = \sqrt{A} y'_1 y_2$; nous parvenons par suite à cette expression $C = \sqrt{N}$, et tout se trouve par conséquent déterminé dans la formule (3) qui donne ainsi la solution complète de l'équation de LAMÉ.

Vous reconnaîtrez maintenant sans peine, qu'en posant $N = 0$ on a les valeurs particulières de h aux quelles correspondent les solutions qui, à l'égard de la variable x , sont des fonctions doublement périodiques, mais en laissant de côté, ce point, je vous indiquerai une dernière remarque. L'équation (4) montre qu'en supposant N différent de zéro, il est impossible d'avoir à la fois: $F(t) = 0$, et $F'(t) = 0$, de sorte que la première équation n'a que des racines simples. Soit: $t = \tau$ l'une quelconque de ces racines, et faisons:

$$\frac{1}{F(t)} = \sum \frac{1}{F'(\tau)(t - \tau)}.$$

Si nous désignons par T la valeur de A pour $t = \tau$, de sorte que l'équation (4), donne:

$$TF'^2(\tau) = N$$

on en conclura:

$$\frac{\sqrt{N}}{F(t)} = \sum \frac{\sqrt{N}}{F'(\tau)(t - \tau)} = \sum \frac{\sqrt{T}}{t - \tau}$$

et par conséquent:

$$\frac{F'(t)}{F(t)} + \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{A}F(t)} = \sum \left[\frac{1}{t - \tau} + \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{A}(t - \tau)} \right] = \sum \frac{\sqrt{A} + \sqrt{T}}{\sqrt{A}(t - \tau)}.$$

Cette formule conduit de la manière la plus facile à l'expression de l'intégrale qui figure en exponentielle dans l'équation (3). Faisant en effet: $t = sn^2 x$, $\tau = sn^2 \omega$, on a:

$$\frac{1}{2} \int \frac{\sqrt{A} + \sqrt{T}}{t - \tau} dt = \int \frac{snx cnx dn x + sn\omega cn\omega dn\omega}{sn^2 x - sn^2 \omega} dx = \int \left[\frac{H'(x - \omega)}{H(x - \omega)} - \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)} + \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)} \right] dx.$$

(voyez C. R., pag. 1086). Soit pour plus de clarté: $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ les n détermination de ω qui correspondent aux diverses racines τ , et qui ont été choisies de telle sorte qu'on ait: $\sqrt{T} = sn\omega cn\omega dn\omega$, en excluant comme vous voyez

la supposition: $\sqrt{T} = -sn\omega cn\omega dn\omega$, nous parvenons à ce résultat:

$$e^{\frac{1}{2} \int \left[\frac{F'(t)}{F(t)} + \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{AF(t)}} \right] dt} = \frac{H(x - \omega_1) H(x - \omega_2) \cdots H(x - \omega_n)}{\Theta^n(x)} e^{x \sum \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)},}$$

et il est clair qu'on aurait semblablement:

$$e^{\frac{1}{2} \int \left[\frac{F'(t)}{F(t)} - \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{AF(t)}} \right] dt} = \frac{H(x + \omega_1) H(x + \omega_2) \cdots H(x + \omega_n)}{\Theta^n(x)} e^{-x \sum \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}}.$$

Cette méthode pour intégrer l'équation de LAMÉ se trouve dans les feuilles lithographiées de mon cours de 1872 à l'Ecole Polytechnique

17 décembre 1877.