Über infinitesimale Transformationen der Ebene, welche gewissen geometrischen Bedingungen genügen.

Von K. Żorawski in Krakau.

In dieser Abhandlung wollen wir einige Fragen in Betrachtung ziehen, welche das Verhalten der Länge und Richtung der Linien-elemente bei der Ausführung von infinitesimalen Transformationen der Ebene betreffen.

Wir setzen voraus, dass es sich um Linienelemente handelt, welche einer vorgelegten Curvenschar:

$$(1) \quad \Omega(x, y) = \text{const.}$$

zugehören, wo x, y Cartesische Coordinaten bezeichnen. Eine infinitesimale Transformation der Ebene kann in der Form:

$$(2) \quad Uf = \frac{\delta f}{\delta t} = \xi(x, y) \frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial f}{\partial y}$$

geschrieben werden und wenn wir die Größen:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

$$\varphi = \arctg \frac{dy}{dx}$$

dieser Transformation unterziehen, so folgt:

$$\frac{1}{ds} \frac{\delta(ds)}{\delta t} = \frac{\frac{\partial \xi}{\partial x} dx^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) dx dy + \frac{\partial \eta}{\partial y} dy^2}{dx^2 + dy^2},$$

$$\frac{\delta \varphi}{\delta t} = \frac{\frac{\partial \eta}{\partial x} dx^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) dx dy - \frac{\partial \xi}{\partial y} dy^2}{dx^2 + dy^2}.$$

Wir beschäftigen uns im Folgenden mit zwei Aufgaben:

I. Solche infinitesimale Transformationen (2) zu finden, welche die Schar (1) invariant lassen und den Längen der Linien-elemente dieser Schar den Zuwachs:

$$\frac{\delta(ds)}{\delta t} = \omega(x, y) ds$$

ertheilen, wo ω eine vorgelegte Function von x, y bezeichnet.

II. Solche infinitesimale Transformationen (2) zu bestimmen, welche wiederum die Schar (1) invariant lassen und der Richtung φ der Linienelemente dieser Schar den Zuwachs:

$$\frac{\delta \varphi}{\delta t} = \Theta(x, y)$$

ertheilen, wo Θ eine gegebene Function von x, y ist.

1. Wir betrachten zunächst die Länge ds . Für die Linienelemente, welche hierher in Betracht kommen, hat man:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} dx + \frac{\partial \Omega}{\partial y} dy = 0.$$

Die erste Aufgabe besteht also darin, die Unbekannten ξ und η aus den Gleichungen:

$$(3) \quad \xi \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \eta \frac{\partial \Omega}{\partial y} = \Phi(\Omega),$$

$$\left(\frac{\partial \Omega}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial \Omega}{\partial y} \frac{\partial \Omega}{\partial x} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial \eta}{\partial y} = \omega \left[\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y} \right)^2 \right]$$

zu finden, wo Φ eine willkürliche Function bezeichnet. Aus diesen Gleichungen kann eine der Unbekannten eliminiert werden; wenn man nämlich die erste der Gleichungen (3) nach x und y differenziert, so folgt:

$$(4) \quad \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} \xi + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y} \eta + \frac{\partial \Omega}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \Omega}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \Phi'(\Omega) \frac{\partial \Omega}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y} \xi + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} \eta + \frac{\partial \Omega}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \Omega}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \Phi'(\Omega) \frac{\partial \Omega}{\partial y}$$

und wenn man zunächst voraussetzt: $\frac{\partial \Omega}{\partial y} \neq 0$, so bekommt man für ξ die Gleichung

$$(5) \quad \frac{\partial \Omega}{\partial x} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \Omega}{\partial x} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} \right) \Phi(\Omega) + \left[\left(\frac{\partial \Omega}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial \Omega}{\partial y} \frac{\partial \Omega}{\partial x} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y} + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} \right] \xi + \frac{\partial \Omega}{\partial y} \left[\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial \Omega}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \Omega}{\partial y} \omega \right) = 0.$$

Wenn ferner $\frac{\partial \Omega}{\partial x}$ von Null verschieden ist, so bekommt man für η die Gleichung:

$$(6) \quad \frac{\partial \Omega}{\partial y} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \Omega}{\partial x} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} \right) \Phi(\Omega) + \left[\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial \Omega}{\partial x} \frac{\partial \Omega}{\partial y} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y} + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} \right] \eta + \frac{\partial \Omega}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \Omega}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \Omega}{\partial x} \omega \right) = 0.$$

Wenn der Ausdruck:

$$\Omega'^2 = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y}\right)^2$$

von Null verschieden ist, so ist jede dieser Gleichungen eine Differentialgleichung und die Integration derselben verlangt nur Quadraturen, weil die Differentialgleichung:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial \Omega}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

mit $f = \Omega$ befriedigt wird. Dabei muss bemerkt werden, dass die Functionen ξ und η sich in der Form:

$$(7) \quad \begin{aligned} \xi &= \xi_1 \Phi(\Omega) + \xi_2 \Psi(\Omega) + \xi_3, \\ \eta &= \eta_1 \Phi(\Omega) + \eta_2 \Psi(\Omega) + \eta_3 \end{aligned}$$

ergeben, wo $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \eta_1, \eta_2, \eta_3$ vollständig bestimmte Functionen von x und y bezeichnen, und Ψ eine neue willkürliche Function ist.

Für den Ausnahmefall $\frac{\partial \Omega}{\partial y} = 0$, d. h. für die Schar der Parallelgeraden der y -Achse hat man:

$$(8) \quad \xi = \Phi(x), \quad \eta = \int \omega dy + \Psi(x),$$

und für den Ausnahmefall $\frac{\partial \Omega}{\partial x} = 0$, d. h. für die Schar der Parallelgeraden der x -Achse:

$$(9) \quad \xi = \int \omega dx + \Psi(y), \quad \eta = \Phi(y),$$

wo Φ und Ψ wiederum willkürliche Functionen bezeichnen.

Analoge Betrachtungen für die Veränderung der Richtung führen auf die Gleichungen:

$$(10) \quad \begin{aligned} \xi \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \eta \frac{\partial \Omega}{\partial y} &= \Phi(\Omega), \\ \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \Omega}{\partial x} \frac{\partial \Omega}{\partial y} \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial \xi}{\partial y} &= \Theta \left[\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y}\right)^2 \right] \end{aligned}$$

und wenn man die Gleichungen (4) in entsprechender Weise ausnutzt, so wird man die zweite Gleichung in der einfacheren Form:

$$(11) \quad \begin{aligned} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \Omega}{\partial y} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2}\right) \xi - \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y} - \right. \\ \left. - \frac{\partial \Omega}{\partial x} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2}\right) \eta &= \Theta \left[\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y}\right)^2 \right] \end{aligned}$$

schreiben können, woraus die Thatsache folgt, dass ξ und η durch endliche Gleichungen bestimmt werden. In der Folge wird sich

ergeben, dass man dieses Resultat voraussehen könnte. Die Determinante der ersten der Gleichungen (10) und der Gleichung (11) ist:

$$\Delta = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial \Omega}{\partial y} \frac{\partial \Omega}{\partial x} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2}$$

und sobald diese Determinante von Null verschieden ist, bekommt man vollständig bestimmte Werte für ξ und η , welche die Form besitzen:

$$\xi = \xi_4 \Phi(\Omega) + \xi_5, \quad \eta = \eta_4 \Phi(\Omega) + \eta_5.$$

Die Bedeutung des Ausnahmefalles $\Delta = 0$ wird im Weiteren besprochen.

2. Nach (7) können wir nun die allgemeinste infinitesimale Transformation Uf , welche die Längen ds der Schar (1) in besprochener Weise transformiert, in der Form:

$$Uf = \Phi(\Omega) U_1 f + \Psi(\Omega) U_2 f + U_3 f$$

schreiben, wo

$$U_k f = \xi_k(x, y) \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_k(x, y) \frac{\partial f}{\partial y}$$

ist. Man kann sagen, dass die allgemeine Transformation Uf aus den speciellen Transformationen $U_k f$ besteht und es fragt sich, was für eine Rolle diesen speciellen Transformationen zukommt. Um diese Frage zu beantworten, muss man die Werte (7) in die Gleichungen (3) wieder einsetzen, und wenn man beachtet, dass Φ und Ψ willkürliche Functionen sind, so ergeben sich drei Systeme von Gleichungen, nämlich:

$$(12) \quad \begin{aligned} & \xi_1 \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \eta_1 \frac{\partial \Omega}{\partial y} = 1, \\ & \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial \xi_1}{\partial x} - \frac{\partial \Omega}{\partial y} \frac{\partial \Omega}{\partial x} \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial y} + \frac{\partial \eta_1}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial \eta_1}{\partial y} = 0, \end{aligned}$$

$$(13) \quad \begin{aligned} & \xi_2 \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \eta_2 \frac{\partial \Omega}{\partial y} = 0, \\ & \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial \xi_2}{\partial x} - \frac{\partial \Omega}{\partial y} \frac{\partial \Omega}{\partial x} \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial y} + \frac{\partial \eta_2}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial \eta_2}{\partial y} = 0, \end{aligned}$$

$$(14) \quad \begin{aligned} & \xi_3 \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \eta_3 \frac{\partial \Omega}{\partial y} = 0, \\ & \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial \xi_3}{\partial x} - \frac{\partial \Omega}{\partial y} \frac{\partial \Omega}{\partial x} \left(\frac{\partial \xi_3}{\partial y} + \frac{\partial \eta_3}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial \eta_3}{\partial y} = \omega \left[\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Aus dem Systeme (12) folgt, dass durch $U_1 f$ die Curven der Schar (1) in einander verborgen werden. Das System (13) besagt, dass die Transformation $U_2 f$ eine

Verbiegung der Curven der Schar (1) in sich selbst verursacht. Endlich aus dem System (14) folgt, dass durch $U_3 f$ die Längen ds der Linienelemente jeder der Curven (1) in die Längen $ds + \omega ds \delta t$ der Linienelemente derselben Curve transformiert werden. Die Transformationen $\Phi U_1 f + \Psi U_2 f$, $\Psi U_2 f$ sind die allgemeinsten, welche die Verbindung der Curven (1) in einander beziehungsweise die Verbiegung dieser Curven in sich selbst hervorbringen.

Aus den Gleichungen (10) und (11) folgt eine Transformation von der Form:

$$Uf = \Phi(\Omega) U_4 f + Uf_5.$$

Auf dieselbe Weise wie vorhin, kommt man auf die Systeme:

$$\begin{aligned}\xi_4 \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \eta_4 \frac{\partial \Omega}{\partial y} &= 1, \\ \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial \eta_4}{\partial x} - \frac{\partial \Omega}{\partial y} \frac{\partial \Omega}{\partial x} \left(\frac{\partial \eta_4}{\partial y} - \frac{\partial \xi_4}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial \xi_4}{\partial y} &= 0, \\ \xi_5 \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \eta_5 \frac{\partial \Omega}{\partial y} &= 0, \\ \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial \eta_5}{\partial x} - \frac{\partial \Omega}{\partial y} \frac{\partial \Omega}{\partial x} \left(\frac{\partial \eta_5}{\partial y} - \frac{\partial \xi_5}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial \xi_5}{\partial y} &= \Theta \left[\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y}\right)^2 \right],\end{aligned}$$

aus welchen folgt, dass $U_4 f$ die Linienelemente jeder Curve der Schar (1) in parallelgerichtete Elemente einer anderen Curve dieser Schar transformiert und dass $U_5 f$ die Linienelemente jeder dieser Curven in diejenigen Elemente derselben Curve überführt, welche gegen die Ursprünglichen um die Winkel $\Theta \delta t$ geneigt sind. $\Phi U_4 f$ ist die allgemeinste Transformation, welche die Linienelemente der Schar (1) in parallelgerichtete Linienelemente dieser Schar überführt.

Für die Ausnahmefälle $\Delta = 0$, $\Omega' = 0$ gelten diese Betrachtungen nicht sämtlich, und diese Fälle sollen später besonders betrachtet werden.

3. Um weitere Schlüsse in Bezug auf die Natur unserer infinitesimalen Transformationen abzuleiten, wollen wir die Formeln des Artikels 1 in einer anderen Gestalt darstellen.

Zu dem Zwecke wollen wir die Formeln:

$$(15) \quad \frac{\partial \Omega}{\partial x} = \Omega' \cos \alpha, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial y} = \Omega' \sin \alpha$$

benützen, wo Ω' die Ableitung von Ω nach der Normale zur $\Omega = \text{const.}$ und α den Winkel dieser Normale mit der x -Achse bezeichnet. In Bezug auf diese beiden Formeln bemerke man, dass

sie denselben Wert für $\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y}$ liefern müssen, dass also die Beziehung:

$$(16) \quad \cos \alpha \frac{\partial \Omega'}{\partial y} - \sin \alpha \frac{\partial \Omega'}{\partial x} = \Omega' \left(\cos \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \sin \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right)$$

stattfindet.

Ferner bemerke man, dass die Ableitungen einer Function $\varphi(x, y)$ nach der Bogenlänge s von $\Omega = \text{const.}$ und nach der Normale n dieser Curve, bei einer geeigneten Winkelzählung aus den Formeln:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial s} &= \cos \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \sin \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n} &= \cos \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \sin \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{aligned}$$

zu berechnen sein werden. Aus diesen Formeln folgt durch Auflösung die andere Gestalt derselben:

$$(17) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \cos \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \sin \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial s}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \cos \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial s} + \sin \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial n}. \end{aligned}$$

Wenn man nun diese Formeln für $\varphi = \alpha$ aufschreibt, so hat man:

$$(18) \quad \begin{aligned} K &= \frac{\partial \alpha}{\partial s} = \cos \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial y} - \sin \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial x}, \\ \alpha' &= \frac{\partial \alpha}{\partial n} = \cos \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \sin \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial y} \end{aligned}$$

und auch:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial x} &= \alpha' \cos \alpha - K \sin \alpha, \\ \frac{\partial \alpha}{\partial y} &= K \cos \alpha + \alpha' \sin \alpha, \end{aligned}$$

wo K die Krümmung der Curve $\Omega = \text{const.}$ bezeichnet. Diese Formeln in Verbindung mit den früheren gestatten die Beziehung (16) in der einfachen Form:

$$(19) \quad \frac{\partial \Omega'}{\partial s} = \alpha' \Omega'$$

darzustellen.

Auf Grund dieser Formeln findet man nun durch eine einfache Rechnung:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Omega}{\partial x} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \Omega}{\partial y} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} &= \Omega'^2 \frac{\partial \alpha}{\partial x}, \\ \frac{\partial \Omega}{\partial y} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \Omega}{\partial x} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} &= -\Omega'^2 \frac{\partial \alpha}{\partial y}, \\ \Delta &= \Omega'^3 K\end{aligned}$$

und man kann die Gleichungen (5) und (6) auf die einfachere Form:

$$(20) \quad \frac{\partial \xi}{\partial s} = \cotg \alpha \left[K \xi - \frac{\Phi(\Omega)}{\Omega'} (K \cos \alpha + \alpha' \sin \alpha) \right] - \omega \sin \alpha,$$

$$(21) \quad \frac{\partial \eta}{\partial s} = \tg \alpha \left[-K \eta + \frac{\Phi(\Omega)}{\Omega'} (K \sin \alpha - \alpha' \cos \alpha) \right] + \omega \cos \alpha$$

bringen.

In derselben Weise wird man die entsprechenden Bedingungengleichungen für die Richtung in der Form:

$$(22) \quad \begin{aligned}\xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha &= \frac{\Phi(\Omega)}{\Omega'}, \\ \xi \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \eta \frac{\partial \alpha}{\partial y} &= \Theta\end{aligned}$$

schreiben können, und wenn man diese Gleichungen nach ξ und η auflöst, so folgt:

$$(23) \quad \begin{aligned}\xi &= \frac{\Phi(\Omega)}{\Omega'} \cos \alpha + \frac{\Phi(\Omega) \alpha' - \Theta \Omega'}{K \Omega'} \sin \alpha, \\ \eta &= \frac{\Phi(\Omega)}{\Omega'} \sin \alpha - \frac{\Phi(\Omega) \alpha' - \Theta \Omega'}{K \Omega'} \cos \alpha.\end{aligned}$$

Man bemerke, dass die zweite der Gleichungen (22) in der Form:

$$(24) \quad U(\alpha) = \Theta$$

geschrieben werden könnte. Ein solches Resultat könnte vorausgesehen werden, weil sobald eine Richtung in eine andere Richtung übergeht, welche durch dieselbe Function bestimmt wird, wie dies mit der Richtung α der Fall ist, so muss die Winkelgeschwindigkeit Θ der Relation (24) Genüge leisten.

Ferner sollten die Ausnahmefälle in Betracht gezogen werden.

Zuerst bemerke man, dass unsere Entwicklungen ungiltig sind, wenn

$$\Omega'^2 = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y} \right)^2 = 0$$

ist. Diese Gleichung besteht für die Schar der Minimalgeraden:

$$x \pm iy = \text{const.}$$

Die infinitesimalen Transformationen, welche die Schar der Minimalgeraden invariant lassen, werden durch die Gleichung:

$$\xi \pm i \eta = \Psi (x \pm i y)$$

bestimmt, wo Ψ eine willkürliche Function bezeichnet. Dies sind die conformen Transformationen, bei welchen sowohl die Länge der Linienelemente der Minimalgeraden wie auch die Richtung derselben unverändert bleiben. Wir wollen im Folgenden stets voraussetzen, dass $\Omega = \text{const.}$ nicht eine Schar von Minimalgeraden ist.

Die Formeln (20) und (21) sind theilweise illusorisch, wenn beziehungsweise $\sin \alpha$, oder $\cos \alpha$ verschwindet. Dann aber nach (8) und (9) erhält man das Ergebnis, dass beziehungsweise $\frac{\partial \xi}{\partial s}$ und $\frac{\partial \eta}{\partial s}$ gleich Null sind.

Endlich für $K=0$, d. h. für eine Schar von geraden Linien, sind die Formeln (23) ungiltig. In diesem Falle ist die Auffindung von ξ und η nur dann möglich, wenn sich die Gleichungen (22) auf eine einzige Gleichung reducieren. Weil nun in diesem Falle α eine Function von Ω allein ist:

$$\alpha = F(\Omega),$$

so muss Θ die Beziehung:

$$F''(\Omega) \Phi(\Omega) = \Theta$$

befriedigen, d. h. auch von Ω allein abhängig sein, was im Übrigen geometrisch ohne Weiteres klar ist. In diesem Falle werden ξ und η nur durch eine einzige Relation miteinander verbunden.

4. Wir wollen nun die fünf Typen von infinitesimalen Transformationen, welche im Artikel 2 auseinandergesetzt wurden, wirklich aufstellen.

Zu dem Zwecke bemerke man zuerst, dass für $k=2, 3, 5$

$$\xi_k \cos \alpha + \eta_k \sin \alpha = 0$$

und für $k=1, 4$:

$$\xi_k \cos \alpha + \eta_k \sin \alpha = \frac{1}{\Omega},$$

ist.

Indem man diese Rechnungen mit der Bestimmung von $U_2 f$ anfängt, so ist die Differentialgleichung:

$$\frac{\partial \xi_2}{\partial s} = K \xi_2 \cotg \alpha$$

zu integrieren, und wenn man die Bedeutung von K in Erinnerung bringt, so sieht man, dass

$$\xi_2 = -\sin \alpha \text{ und demgemäß } \eta_2 = \cos \alpha$$

genommen werden kann, dass man also $U_2 f$ in der einfachen Form:

$$U_2 f = \cos \alpha \frac{\partial f}{\partial y} - \sin \alpha \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial s}$$

darstellen kann. Diese Form ist im Übrigen eine unmittelbare Folge der geometrischen Bedeutung von $U_2 f$. Andererseits, sobald man die Bezeichnungen des Artikels 1 benützt, so kommt:

$$U_2 f = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y}\right)^2}} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial \Omega}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x} \right).$$

Für $U_1 f$ hat man die Differentialgleichung:

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial s} = \cotg \alpha \left[K \xi_1 - \frac{1}{\Omega'} (K \cos \alpha + \alpha' \sin \alpha) \right]$$

und dieselbe kann vermöge einer einzigen Quadratur gelöst werden. Wenn man nämlich die Identität (19) in Anwendung bringt, so folgt:

$$\xi_1 = \frac{\cos \alpha}{\Omega'} + \sin \alpha \int \frac{K}{\Omega'} ds$$

und demgemäß

$$\eta_1 = \frac{\sin \alpha}{\Omega'} - \cos \alpha \int \frac{K}{\Omega'} ds.$$

Wenn man ferner bemerkt, dass anstatt $K ds$ einfach $d\alpha$ genommen werden kann, so erhält man:

$$U_1 f = \frac{1}{\Omega'} \left(\cos \alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \sin \alpha \frac{\partial f}{\partial y} \right) - \left(\cos \alpha \frac{\partial f}{\partial y} - \sin \alpha \frac{\partial f}{\partial x} \right) \int \frac{d\alpha}{\Omega'}$$

und man sieht leicht, dass diese Transformation in der einfachen Form:

$$(25) \quad U_1 f = \frac{\partial f}{\partial n} \cdot \frac{1}{\Omega'} - \frac{\partial f}{\partial s} \int \frac{d\alpha}{\Omega'}$$

geschrieben werden kann.

Um den geometrischen Sinn dieser infinitesimalen Transformation klarzustellen, bemerke man, dass:

$$\frac{\delta t}{\Omega'} \text{ und } - \int \frac{d\alpha}{\Omega'} \delta t$$

die Projectionen der Fortschreitungsstrecke beziehungsweise auf die Normale und auf die Tangente von $\Omega = \text{const.}$ sind. Der erste

dieser Ausdrücke ist eine unmittelbare Folge von $U_1 \Omega = 1$. In Bezug auf den zweiten Ausdruck beachte man, dass

$$(26) \quad W = \int \frac{d\alpha}{\Omega'}$$

als ein Bogenlängeintegral betrachtet werden kann. In der That, wenn wir durch einen Punkt der Ebene parallele Geraden zu den Normalen der Curve $\Omega = \text{const.}$ führen und auf denselben von dem festen Punkte die bezüglichen Längen $\frac{1}{\Omega'}$ ablegen, so beschreiben die anderen Enden dieser Längen eine Curve deren Bogenlänge durch das Integral (26) berechnet wird. In diesem Integral kann für die Integrationsconstante eine beliebige Function von Ω gewählt werden. Wählt man dieselbe in der Weise, dass das Integral für den Punkt $s = s_0$ gleich Null ist, wo für s_0 eine Function von Ω genommen werden kann, so hat dies eine solche Bedeutung, dass der Punkt $s = s_0$ der Curve $\Omega = C + \delta t$, welcher vermöge der Transformation dem Punkte $s = s_0$ entspricht, auf der Normale zur $\Omega = C$ im Punkte $s = s_0$ gelegen ist. Die Entfernung der Punkte $\overline{s_0}$ und s_0 ist $\frac{\delta t}{\Omega'}$, man sieht aber ohne Weiteres, dass, wenn man auf den Normalen in allen anderen Punkten der Curve $\Omega = C$ die bezüglichen Werte $\frac{\delta t}{\Omega'}$ ablegt, man im Allgemeinen nicht diejenige Curve bekommt, welche durch unsere infinitesimale Transformation aus der Curve $\Omega = C$ hervorgeht. Die Curve, welche auf diese Weise auf den Normalstrecken gebaut ist, ist nämlich um den Bogen $W \delta t$ länger als die Curve $\Omega = \text{const.}$ Es ist also klar, dass, sobald die einander entsprechenden Bogen gleich sein müssen, die Bogenlänge um $W \delta t$ vermindert wird, was auch in $U_2 f$ der Fall ist.

Die gefundene Transformation kann man nun nach den Bezeichnungen des Artikels 1 in der Form:

$$U_1 f = \frac{1}{\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y}\right)^2} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial \Omega}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y} \right) - \\ - \frac{W}{\sqrt{\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y}\right)^2}} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial \Omega}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x} \right)$$

schreiben, wo W im Falle $\frac{\partial \Omega}{\partial y} \neq 0$ durch die Formel:

$$W = - \int \frac{\left(\frac{\partial \Omega}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial \Omega}{\partial y} \frac{\partial \Omega}{\partial x} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2}}{\left[\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y}\right)^2\right]^{3/2} \frac{\partial \Omega}{\partial y}} dx$$

und im Falle $\frac{\partial \Omega}{\partial x} \neq 0$ durch die Formel:

$$W = \int \frac{\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial \Omega}{\partial x} \frac{\partial \Omega}{\partial y} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2}}{\left[\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y}\right)^2\right]^{3/2} \frac{\partial \Omega}{\partial x}} dy$$

berechnet werden kann. Im ersten Falle soll die Integration in der Weise ausgeführt werden, dass man zuerst y vermöge $\Omega(x, y) = C$ eliminiert, und nach der Berechnung des Integrals wieder den Wert von C einsetzt. Im zweiten Falle soll auf diese Weise x eliminiert werden.

Für die Aufstellung der Transformation $U_3 f$ hat man die Differentialgleichung:

$$\frac{\partial \xi_3}{\partial s} = \cotg \alpha K \xi_3 - \sin \alpha \cdot \omega,$$

welche durch die Function:

$$\xi_3 = -\sin \alpha \int \omega ds$$

befriedigt wird. Demgemäß ist:

$$\eta_3 = \cos \alpha \int \omega ds,$$

also ist die infinitesimale Transformation:

$$U_3 f = \left(\cos \alpha \frac{\partial f}{\partial y} - \sin \alpha \frac{\partial f}{\partial x} \right) \int \omega ds = \frac{\partial f}{\partial s} \int \omega ds.$$

In dem Integral:

$$S = \int \omega ds$$

ist die Integrationsconstante eine beliebige Function von Ω . Dieselbe kann in der Weise gewählt werden, dass für einen Punkt s_0 , wo s_0 im Allgemeinen eine Function von Ω ist, der Wert des Integrals gleich Null ist. Bei einer solchen Wahl ist $S \delta t$ für einen Punkt s , derjenige Zuwachs, welchen die Länge $s - s_0$ zufolge der infinitesimalen Transformation erfährt.

In den Bezeichnungen des Artikels 1 kann die gefundene Transformation in der Form:

$$U_3 f = \frac{S}{\sqrt{\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y}\right)^2}} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial \Omega}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x} \right)$$

geschrieben werden, wo im Falle $\frac{\partial \Omega}{\partial y} \neq 0$ nach der Formel:

$$S = \int \frac{\omega}{\frac{\partial \Omega}{\partial y}} \sqrt{\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y}\right)^2} dx$$

und im Falle $\frac{\partial \Omega}{\partial x} = 0$ nach der Formel:

$$S = - \int \frac{\omega}{\frac{\partial \Omega}{\partial x}} \sqrt{\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y}\right)^2} dy$$

in derselben Weise wie W berechnet wird.

Für das Verhalten der Richtung werden die Transformationen $U_4 f$ und $U_5 f$ ohne Integration gefunden.

Man bekommt nämlich für $U_4 f$, d. h. für die parallele Verschiebung der Linienelemente:

$$(27) \quad U_4 f = \frac{1}{K \Omega'} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} \right),$$

was in der Form:

$$(28) \quad U_4 f = \frac{1}{\Omega'} \frac{\partial f}{\partial n} - \frac{\alpha'}{K \Omega'} \frac{\partial f}{\partial s},$$

oder auch in der Form:

$$U_4 f = \frac{1}{\Delta} \left[\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} - \frac{\partial \Omega}{\partial y} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y} \right) \frac{\partial f}{\partial y} + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} - \frac{\partial \Omega}{\partial x} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y} \right) \frac{\partial f}{\partial x} \right],$$

wo

$$\Delta = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial \Omega}{\partial y} \frac{\partial \Omega}{\partial x} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2},$$

geschrieben werden kann.

Aus der Formel (28) folgt, dass die Projectionen der Fortschreitungsstrecke der infinitesimalen Transformation auf die Normale und die Tangente von $\Omega = \text{const.}$:

$$\frac{\partial t}{\Omega'} \quad \text{und} \quad - \frac{\alpha' \partial t}{K \Omega'}$$

sind. Um die Bedeutung des zweiten dieser Ausdrücke zu erklären, beachte man, dass, sobald man auf der Normale um die Länge $\frac{\partial t}{\Omega'}$ fortschreitet, sich der Winkel α um $\frac{\alpha'}{\Omega'} \partial t$ vergrößert. Der Vergrößerung des Winkels α um $\frac{\alpha'}{\Omega'} \partial t$ entspricht aber eine

Vergrößerung der Bogenlänge um $\frac{\alpha' \partial t}{K \Omega'}$. Es ist also klar, dass eine Transformation, welche die Linienelemente der Curven $\Omega = \text{const.}$ in parallele Linienelemente überführt, die Bogenlänge um dieselbe Größe vermindern muss.

Aus der Formel (27) sieht man, dass die Curven

$$\alpha = \text{const.}$$

die Bahncurven der infinitesimalen Transformation sind. Es sind diejenigen Curven, welche geometrische Örter der einander parallelen Linienelemente von $\Omega = \text{const.}$ sind.

Die Transformation $U_5 f$ endlich ist die folgende:

$$U_5 f = \frac{\Theta}{K} \left(\cos \alpha \frac{\partial f}{\partial y} - \sin \alpha \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\Theta}{K} \frac{\partial f}{\partial s},$$

was man auch in der Form:

$$U_5 f = \frac{\Theta}{\Delta} \left[\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial \Omega}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x} \right)$$

schreiben kann. Diese Transformation führt die Linienelemente jeder Curve $\Omega = \text{const.}$ in solche Linienelemente derselben Curve über, welche gegen die Ursprünglichen um den Winkel $\Theta \delta t$ geneigt sind.

5. Für unsere infinitesimale Transformationen lassen sich noch einige einfache Formeln ableiten.

Wir setzen:

$$(29) \quad \xi = \rho \cos \lambda, \quad \eta = \rho \sin \lambda$$

wo also $\rho \delta t$ die Fortschreitungsstrecke der infinitesimalen Transformation und λ den Winkel derselben mit der x -Axe bezeichnen. Mit Benutzung dieser Bezeichnungen wird man die erste der Bedingungen (3) oder (10) in der Form:

$$(30) \quad \Omega' \rho \cos (\lambda - \alpha) = \Phi (\Omega)$$

schreiben können. Ferner hat man durch Differentiation der Formeln (29):

$$(31) \quad \frac{\partial \xi}{\partial s} = \cos \lambda \frac{\partial \rho}{\partial s} - \rho \sin \lambda \frac{\partial \lambda}{\partial s}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial s} = \sin \lambda \frac{\partial \rho}{\partial s} + \rho \cos \lambda \frac{\partial \lambda}{\partial s}$$

und die zweite der Bedingungen (3) kann vermöge dieser Formeln (31) und der früher angegebenen (15) und (17) auf die einfache Form:

$$(32) \quad \sin (\lambda - \alpha) \frac{\partial \rho}{\partial s} + \rho \cos (\lambda - \alpha) \frac{\partial \lambda}{\partial s} = \omega$$

gebracht werden. In derselben Weise kann man die zweite der Bedingungen (10) in der Form:

$$(33) \quad -\cos (\lambda - \alpha) \frac{\partial \rho}{\partial s} + \rho \sin (\lambda - \alpha) \frac{\partial \lambda}{\partial s} = \theta$$

schreiben. Wenn man noch die Beziehung (30) nach s differentiiert und dabei die Relation (19) berücksichtigt, so folgt:

$$-\cos(\lambda - \alpha) \frac{\partial \rho}{\partial s} + \rho \sin(\lambda - \alpha) \frac{\partial \lambda}{\partial s} = \rho [\alpha' \cos(\lambda - \alpha) + K \sin(\lambda - \alpha)],$$

woraus mit Benutzung der Relationen (18) die Beziehung:

$$(34) \quad -\cos(\lambda - \alpha) \frac{\partial \rho}{\partial s} + \rho \sin(\lambda - \alpha) \frac{\partial \lambda}{\partial s} = \rho \left(\cos \lambda \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \sin \lambda \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right)$$

hervorgeht. Diese Beziehung kann noch anders geschrieben werden. Die Curven:

$$(35) \quad \alpha = \text{const.}$$

sind diejenigen, welche die parallelen Linienelemente der Curvenschar (1) miteinander verbinden, und wenn wir noch für diese Curvenschar die Bezeichnungen:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = A' \cos \sigma, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial y} = A' \sin \sigma$$

einführen, wo also σ der Winkel der Normale von (35) mit der x -Axe und A' die Ableitung der Function α nach dieser Normale ist, so kann man die Beziehung (34) in der Form:

$$-\cos(\lambda - \alpha) \frac{\partial \rho}{\partial s} + \rho \sin(\lambda - \alpha) \frac{\partial \lambda}{\partial s} = \rho A' \cos(\lambda - \sigma)$$

schreiben, und vermöge derselben aus (32) und (33) die Bedingungen:

$$(36) \quad \rho \frac{\partial \lambda}{\partial s} = \rho A' \sin(\lambda - \alpha) \cos(\lambda - \sigma) + \omega \cos(\lambda - \alpha),$$

$$(37) \quad \frac{\partial \rho}{\partial s} = -\rho A' \cos(\lambda - \alpha) \cos(\lambda - \sigma) + \omega \sin(\lambda - \alpha),$$

$$(38) \quad \rho A' \cos(\lambda - \sigma) = \theta$$

ableiten. Die erste derselben kann noch durch einfache Umformung auf die Gestalt:

$$(39) \quad \rho \frac{\partial(\lambda - \alpha)}{\partial s} = \cos(\lambda - \alpha) [\rho A' \sin(\lambda - \sigma) + \omega]$$

gebracht werden.

Diese Formeln geben nun zu gewissen Bemerkungen Anlass, welche wir jetzt anführen wollen. Dabei lassen wir den Fall $A' = 0$, d. h. den Fall einer Schar (1) von parallelen Geraden vollständig bei Seite.

Zuerst bemerke man, dass die Formel (38) eine unmittelbare Folge von (24) ist und dass man dieselbe auf folgende Weise geometrisch interpretieren kann. Der Winkelzuwachs $\theta \delta t$ ist gleich demjenigen Zuwachse des Winkels α , welcher zustande kommt, wenn man auf der Normale zur Curve $\alpha = \text{const}$ um diejenige

Strecke fortschreitet, welche die Projection der Fortschreitungsstrecke der infinitesimalen Transformation auf diese Normale ist.

Die Formeln (36), (37), (39) erlauben sogleich die Fälle zu charakterisieren, in welchen für jeden Punkt einer Curve der Schar (1), der Winkel λ , die Fortschreitungsstrecke $\rho \delta t$, endlich der Winkel $\lambda - \alpha$ denselben Wert besitzt, d. h. in welchen entweder der Winkel der Fortschreitungsstrecke und der x -Achse, oder die Größe der Fortschreitungsstrecke, oder der Winkel dieser Strecke mit der genannten Curve nur von Ω abhängig ist.

Soll λ nur von Ω abhängig sein, so sind zwei Fälle zu unterscheiden. Entweder sind die Curven (1) keine Bahncurven der infinitesimalen Transformation, oder dies ist der Fall. Bei der ersten Voraussetzung hat man:

$$(40) \quad \omega = -\rho A' \operatorname{tg}(\lambda - \alpha) \cos(\lambda - \sigma).$$

wo λ bloß von Ω abhängig ist. Wenn man in einem vorgelegten Falle diese Function λ willkürlich wählt, so kann man ρ auf Grund der Formel (30) berechnen, wobei

$$\frac{\partial \rho}{\partial s} = -\rho A' \frac{\cos(\lambda - \sigma)}{\cos(\lambda - \alpha)}$$

und dann hat man ω nach (40) zu bestimmen.

Damit insbesondere diese Rechnung das Resultat $\omega = 0$ liefern könne, d. h. damit für ein λ , welches bloß von Ω abhängig ist, eine Biegung zustande komme, müssen nach (40) die Bahncurven entweder orthogonal gegen die Curven (1) sein, oder die einander parallelen Linienelemente dieser Curvenschar verbinden. Also ist die Curvenschar der Bedingung unterworfen, im Falle der Orthogonalität aus geraden Linien zu bestehen, und im zweiten Falle die Eigenschaft zu besitzen, dass die Richtung gegen die x -Achse derjenigen Curven, welche parallel gerichtete Linienelemente mit einander verbinden, bloß von Ω abhängig ist.

Bei der zweiten Voraussetzung, d. h. wenn die Curven (1) Bahncurven der infinitesimalen Transformation sind, müssen dieselben geradlinig sein.

Wenn ρ eine Function eines einzigen Argumentes Ω sein soll, so sind ebenfalls zwei Möglichkeiten auseinander zu halten. Entweder sind die Bahncurven keine orthogonalen Trajectorien von (1) oder dies ist der Fall. Die erste Voraussetzung liefert die Formel:

$$(41) \quad \omega = \rho A' \cotg(\lambda - \alpha) \cos(\lambda - \sigma),$$

wo ρ bloß von Ω abhängig ist. λ wird dann nach (30) zu berechnen sein, wobei

$$(42) \quad \frac{\partial \lambda}{\partial s} = A' \frac{\cos(\lambda - \sigma)}{\sin(\lambda - \alpha)}$$

ist. Wenn die Formel (41) den Wert $\omega = 0$ liefern soll, so müssen die Bahncurven entweder die Curven (1) selbst oder diejenigen

Curven sein, welche die gegen einander parallelen Linienelemente verbinden. Im ersten Falle liefert jede Wahl von ρ als einer Function von Ω eine Verbiegung der Curven (1) in sich selbst. Im zweiten Falle wird dabei auch λ nur von Ω abhängig sein, es müssen also die Curven der parallelen Linienelemente wiederum die früher genannte Eigenschaft besitzen.

Bei der zweiten Möglichkeit, d. h. wenn die Bahncurven orthogonale Trajectorien der Schar (1) sind, müssen für $\frac{\partial \rho}{\partial s} = 0$ auch die geometrischen Örter der parallelen Linienelemente gegen die Schar (1) orthogonal sein, d. h. muss die Schar (1) eine Schar von parallelen Curven sein.

Betrachtet man nun die Formeln (36) und (37) gleichzeitig, so findet man leicht den folgenden Satz:

Damit die Curven der Schar (1) vermöge einer Transformation, deren ρ und λ nur von Ω abhängig sind, in einander verbogen werden können, ist nothwendig und hinreichend, dass die Richtung der geometrischen Örter der parallelen Linienelemente dieser Schar gegen die x -Achse auch nur von Ω abhängig ist. Die genannten geometrischen Örter sind Bahncurven der infinitesimalen Transformation.

Man bemerke ferner, dass sobald die Richtung der Curven $\alpha = \text{const}$ nur von Ω abhängig ist, so sind die Curven $\Omega = \text{const}$. diejenigen, welche die parallelen Linienelemente der Curven $\alpha = \text{const}$ miteinander verbinden. Auf Grund dieser Bemerkung und des eben aufgeführten Satzes, bekommt man noch den folgenden Reciprocitätssatz:

Wenn die Curven einer Curvenschar so ineinander vermöge einer infinitesimalen Transformation gebogen werden können, dass alle Punkte jeder Curve gleichgroße und gleichgerichtete unendlich kleine Wege beschreiben, so besitzt die Schar von Bahncurven dieser infinitesimalen Transformation dieselbe Eigenschaft und diese Biegung der Letzteren besteht längs der Curven der ursprünglichen Schar.

Wenn endlich der Winkel $\lambda - \alpha$ nur von Ω abhängig sein soll, so muss:

$$(43) \quad \omega = -\rho A' \sin(\lambda - \alpha)$$

sein, sobald die Bahncurven nicht mit den Curven (1) zusammenfallen, was hier gerade trivial ist. Für die Biegung gibt nun die Formel (43) die Bedingung, dass jede Curve $\alpha = \text{const}$. mit einer Curve der Schar (1) einen Winkel bilden muss, welcher nur von Ω abhängig ist und dass die Bahncurven der infinitesimalen Transformation orthogonale Trajectorien der Curven $\alpha = \text{const}$. sein müssen.

6. Um unsere Betrachtungen an einem einfachen Beispiele zu illustrieren, nehme man:

$$\Omega^2 = x^2 + y^2 = R^2,$$

d. h. betrachte man die Schar der concentrischen Kreise, deren Gleichung man auch in der Form:

$$x = R \cos \alpha, \quad y = R \sin \alpha$$

schreiben kann.

Die fünf Typen der infinitesimalen Transformationen haben die folgende Form:

$$U_2 f = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left(x \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{1}{R} \frac{\partial f}{\partial \alpha},$$

$$U_1 f = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left(x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} \right) - \frac{\operatorname{arctg} \frac{y}{x}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left(x \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \\ = \frac{\partial f}{\partial R} - \frac{\alpha}{R} \frac{\partial f}{\partial \alpha},$$

$$U_3 f = \frac{S}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left(x \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{S}{R} \frac{\partial f}{\partial \alpha},$$

$$S = \int \omega(x, y) ds = R \int \omega(R \cos \alpha, R \sin \alpha) d\alpha,$$

$$U_4 f = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left(x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial f}{\partial R},$$

$$U_5 f = \Theta \left(x \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \Theta \frac{\partial f}{\partial \alpha}.$$

$U_2 f$ ist eine solche infinitesimale Transformation der Ebene, vermöge welcher jeder Kreis um den Winkel $\delta \alpha = \frac{1}{R} \delta t$ in sich selbst gedreht wird.

$U_1 f$ bringt die Verbiegung der Kreise in einander hervor. Diese Transformation ist in der Weise gewählt worden, dass bei derselben die Halbgerade $\alpha = 0$ in sich selbst übergeht. Die Bahn-curven dieser infinitesimalen Transformation sind:

$$R \alpha = \text{const.},$$

d. h. bilden eine Schar von hyperbolischen Spiralen. Durch unendlichmalige Ausführung dieser infinitesimalen Transformation kann jeder Kreis der Schar in jeden anderen verbogen werden. Um diese Zuordnung genau zu begreifen, kann man sich vorstellen, dass nach Bedürfnis der ganze kleinere Kreis oder ein Theil desselben mehrfach überdeckt ist. Im Übrigen ist klar, dass man anstatt der Halbgeraden $\alpha = 0$ irgend eine andere invariante Curve wählen könnte, und also eine andere Art der Verbiegung von concentrischen Kreisen erhalten könnte.

Vermöge der Transformation $U_3 f$ werden die Punkte eines jeden Kreises so miteinander vertauscht, dass jedes Linienelement dieser Kreise um $\omega ds \delta t$ wächst.

Die infinitesimale Transformation $U_4 f$ führt die Kreise der Schar (1) in solcher Weise ineinander über, dass die parallelen Linienelemente in einander übergehen und dass $\delta R = \delta t$ ist.

Endlich, die infinitesimale Transformation $U_5 f$ vertauscht die Punkte eines jeden Kreises in der Weise, dass der Winkel α eines jeden Punktes um $\delta \alpha = \Theta \delta t$ sich vergrößert.

Auch die Formeln des Artikels 5 werden für unseren speciellen Fall bedeutend einfacher. Aus denselben folgt unter Anderem, dass eine Verbiegung von concentrischen Kreisen in einander vermöge einer Transformation, bei welcher eine oder mehrere von Größen $\lambda, \rho, \lambda - \alpha$ nur von R abhängen, unmöglich ist.