LE LINEE ISOFOTE DELLE RIGATE ALGEBRICHE;

Nota di **Cesare Burali-Forti**, in Torino.

Adunanza del 26 gennaio 1890.

È noto che l'intensità luminosa i di un elemento di una superficie — essendo la sorgente della luce posta a distanza infinita — è proporzionale al seno dell'angolo w che il raggio luminoso l fa con quell'elemento. I punti (semplicemente infiniti) di una superficie Σ che hanno una data illuminazione i , formano la *linea isofota* di intensità i di Σ , e questa linea non è altro che la curva di contatto della sviluppabile Σ' , di costante pendenza $w = \arcsin i$ rispetto ad l , circoscritta a Σ .

Mi propongo in questa breve Nota di studiare le principali proprietà delle isofote di una rigata algebrica.

1. Indicheremo con Σ_i la sviluppabile di costante pendenza $w = \arcsin i$ circoscritta alla rigata Σ ; con η_i la linea di contatto di Σ_i con Σ , cioè la isofota di intensità i ; con G_i la direttrice all'infinito di Σ_i , e con l la direzione dei raggi luminosi.

Le G_i formano un fascio di coniche che si toccano nei punti ciclici D_1, D_2 del piano normale ad l , ed hanno per tangenti nei punti D_1, D_2 , le rette $G_0 D_1, G_0 D_2$.

Per il punto H all'infinito di una generatrice (ordinaria) g di Σ possono condursi a G_i due tangenti, rette all'infinito di due piani uscenti da g che toccano Σ in due punti A e B di intensità lumi-

nosa i . Le coppie di tangenti condotte da H alle coniche G_i , sono coppie di raggi di un'involuzione le cui rette doppie sono HG_0 e la tangente in H alla conica G_j che passa per H . Da H non possiamo condurre alle coniche G_r , $r > j$, tangenti reali e quindi j è la massima (relativa) intensità luminosa che possono avere i punti di g . Dunque:

I. — *Le isofote η_i di Σ tagliano ogni sua generatrice in coppie di punti coniugati in un'involuzione I_g che ha per punti doppi, il punto di minima (assoluta — indice zero) e il punto di massima (relativa) intensità luminosa della generatrice che si considera (*)*.

Sieno i, i', i'' , gl' indici della massima (relativa) intensità luminosa di tre generatrici (ordinarie), g, g', g'' infinitamente vicine. I tre numeri i, i', i'' , sono evidentemente diseguali, e quindi uno di essi, p.e. i' , è compreso fra gli altri due i, i'' e conseguentemente il punto di H all'infinito di g , p.e. sarà esterno alla conica $G_{i'}$ e il punto H'' interno; allora in g sono reali i punti di intensità luminosa i' e immaginari in g'' . Dunque:

II. — *Se in una generatrice g di Σ il punto P di massima (relativa) intensità luminosa è di indice i la η_i è tangente in P alla generatrice g .*

2. Supponiamo che la rigata Σ sia dell'ordine n e del genere p . La sua direttrice ρ all'infinito è di ordine n e classe $k = 2(n + p - 1)$. A ρ e alla conica G_i possiamo condurre $2k$ tangenti comuni; la η_i ha dunque $2k$ punti all'infinito, cioè è di ordine $2k$.

Se in η_i vi è un punto doppio esso deve esser doppio per l'involuzione I_g della generatrice g che passa per esso, quando però tale involuzione non sia degenera. Se I_g non è degenera uno dei suoi punti doppi appartiene ad η_0 e nell'altro è tangente la η_i essendo i l'indice di massima intensità luminosa di g ; nelle generatrici ordinarie di

(*) Questo teorema dà il modo di costruire le η_i di Σ (per un determinato sistema di valori di i) qualunque sia il sistema di rappresentazione di cui si fa uso. Per ciò che riguarda la costruzione dei con circolari aventi G_i per direttrici si veggia Fiedler « *Geometria descrittiva* » per la proiezione centrale e sistema Monge. Tessari « *Teoria delle ombre e del chiaro scuro* » per la sola rappresentazione Monge.

Σ dunque la η_i non ha punti doppi. In ogni generatrice singolare di Σ l'involuzione I_g è degenera e per ogni cuspidale passano con due rami tutte le η_i . Le η_i hanno dunque un punto doppio in ogni cuspidale di Σ .

Dalla nota relazione (*) che lega l'ordine e il genere di una curva della rigata con l'ordine e il genere della rigata stessa, osservando che $2(n + 2p - 2)$ sono le cuspidi di Σ (**) e quindi $2(n + 2p - 2)$ i punti doppi di η_i , avremo per il genere π di η_i

$$\pi = n + 2p - 1.$$

Una curva che incontri h volte ogni generatrice di Σ e sia di genere π ha $2(\pi - 1) - 2h(p - 1)$ (***) generatrici tangenti e quindi esistono $2n$ generatrici di Σ tangenti a η_i . (Ciò poteva dedursi anche osservando che G_i taglia ρ in $2n$ punti; ne risulta come caso particolare il numero dei punti cuspidali di Σ).

Le rette che da G_0 vanno ai punti ciclici D_1, D_2 del piano normale ad l , sono rette all'infinito di $2n$ piani tangenti a Σ in $2n$ punti immaginari, nei quali, evidentemente, si toccano tutte le η_i .

Dunque:

III.—La η_i è dell'ordine $4(n + p - 1)$ e del genere $n + 2p - 1$ (****); è tangente a $2n$ generatrici e tangente a tutte le altre η in $2n$ punti fissi immaginari nei quali il piano tangente alla rigata è parallelo ad l ; ha infine un punto doppio in ciascuno dei $2(n + 2p - 2)$ punti cuspidali di Σ .

La η_0 è di ordine $k = 2(n + p - 1)$ poichè da G_0 non possono

(*) C. Segre: « *Intorno alla geometria su di una rigata algebrica* », Rendiconti R. Accademia Lincei 1887 — Oppure « *Recherches générales sur les courbes et les surfaces réglées algébriques* », Mathematische Annalen, B. XXXII.

(**) Questo numero mi fu gentilmente comunicato dal ch.^{mo} prof. C. Segre. Si può determinare in modo assai semplice osservando che le curve di contatto con Σ di due coni di vertici V e V' (non situati in Σ) circoscritti a Σ , si tagliano in $2k - n$ punti, e poichè per la retta VV' non si possono condurre a Σ che n piani tangenti $2k - 2n = 2(n + 2p - 2)$ è il numero delle cuspidi di Σ .

(***) Zeuthen, Math. Annalen, III, p. 152.

(****) La η_i non può dunque essere di genere zero.

condursi a ρ che k tangenti. Essa incontra una sol volta ogni generatrice di Σ e passa semplicemente per i $2(n + p - 2)$ punti cuspidali di Σ ; incontra ogni η_i ($i \leq 0$) in $2n$ punti (*), oltre i $2(n + 2p - 2)$ punti cuspidali, i quali punti sono evidentemente quelli nei quali tutte le η_i si toccano.

I punti di massima assoluta (indice 1) intensità luminosa sono n e giacciono in quelle generatrici che hanno il punto all'infinito sulla retta G_1 .

3. La direttrice G_i all'infinito di Σ_i è multipla secondo n per Σ_i , e quindi per la classe N di Σ_i abbiamo

$$N = 2n.$$

Nel piano all'infinito vi sono $2k$ generatrici di Σ_i , cioè le tangenti comuni a G_i e a ρ ; quindi per il rango R di Σ_i abbiamo

$$R = 2(n + k).$$

Essendo $n + 2p - 1 = p + \frac{1}{2}k$ il genere di Σ_i ($i \geq 0$) è nullo il numero dei piani stazionari di Σ_i , quindi per l'ordine dello spigolo di regresso di Σ_i abbiamo

$$M = 6k$$

e quindi η_i non può mai coincidere con un'asintotica di Σ .

4. Indichiamo con σ la linea e con Σ_σ la sviluppabile di stringimento di Σ ; con ρ'' la curva all'infinito di Σ_σ e con ρ' la polare reciproca della curva all'infinito ρ di Σ rispetto alla conica assoluta. I punti delle due curve sono in corrispondenza (1, 1) ed è pure noto

(*) È noto che due curve di Σ di ordini v e v' che incontrino h e h' volte ogni generatrice di Σ hanno $vh' + v'h - nhb'$ punti comuni.

che essendo ρ dell'ordine n e della classe k , ρ' è dell'ordine k e della classe n ; l'involuppo ρ'' delle rette che congiungono le coppie corrispondenti di ρ e ρ' è della classe $n + k$ (*)

Affinchè la linea di stringimento σ di Σ coincida con una delle η_i , è necessario e sufficiente che ρ'' coincida con G_i , si dovrà quindi avere $n + k = 2n$. Dunque:

IV.—*Le sole quadriche rigate possono avere la linea di stringimento coincidente con una delle linee isofote. Se la η_0 coincide con σ , Σ_σ è un cilindro le cui generatrici sono parallele ai raggi luminosi.*

Da G_0 possono condursi $n + k$ tangenti a ρ'' ; ρ'' e G_i ammettono $2(n + k)$ tangenti comuni. Dunque:

V.—*La η_i taglia la linea di stringimento (fuori dei punti cuspidali) in $2(n + k)$ punti, e taglia la η_0 in $n + k$ punti.*

La linea di stringimento σ incontra una sol volta ogni generatrice di Σ e passa semplicemente per i $2(k - n)$ punti cuspidali di Σ . Allora se x è l'ordine di σ dovremo avere:

$$2x + 2k - 2n - 4(k - n) = 2(n + k)$$

da cui $x = 2k$; cioè è $4(n + p - 1)$ l'ordine della linea di stringimento di una rigata di ordine n e genere p (**).

5. È noto che delle coniche G_i ne esistono $2(2n + p - 1) = k + 2n$

(*) È noto che se tra i punti di due curve γ e γ' di ordini n e n' si stabilisce una corrispondenza (h, h') , la classe dell'involuppo delle rette che congiungono le coppie di punti corrispondenti di γ e γ' è $nh' + n'h$.

(**) In generale. Se γ è una linea semplice di Σ di ordine v che incontra h volte ogni generatrice ed ha un punto r -plo (ordinario) in ciascuno dei punti cuspidali di Σ senza avere altri punti doppi, è facile vedere che per la classe N della sviluppabile Σ_γ circoscritta a Σ lungo γ si ha

$$N = v + (h - 2r)(n + 2p - 2)$$

e per il rango R , essendo α il numero dei punti stazionari di Σ_γ , e π il genere di γ

$$R = 2\{\pi - 1 + v + (h - 2r)(n + 2p - 2)\} - \alpha.$$

Da queste formule si ottengono di nuovo i risultati del § 51.

tangenti a ρ (*). Di questi $k + 2n$ contatti, n sono compresi e assorbiti dalle n intersezioni della retta doppia G_1 con ρ . Dunque:

VI.—*Esistono $k + n$ generatrici di Σ che hanno il punto di massima (relativa) intensità luminosa all'infinito*

Indichiamo con ξ la curva luogo dei punti di massima intensità luminosa delle generatrici di Σ . Questa curva ξ passa semplicemente per i $2(k - n)$ punti cuspidali di Σ , taglia una sol volta ogni generatrice di Σ ed è di ordine $k + n$. Essa ha dunque comuni con η_i , fuori dei punti cuspidali, $4n$ punti. Esistendo solo $2n$ generatrici di Σ che hanno il punto di massima intensità luminosa di indice i , le rimanenti $2n$ intersezioni devono essere assorbite nei $2n$ punti fissi immaginari nei quali si toccano tutte le η_i . Dunque:

VII — *La curva ξ , di ordine $k + n$, luogo dei punti di massima intensità luminosa, passa per i $2n$ punti fissi immaginari nei quali si toccano le η_i ed incontra ogni η_i in altri $2n$ punti nei quali sono tangenti a η_i le generatrici che passano per essi. La ξ contiene inoltre gli n punti di massima (assoluta) illuminazione di Σ .*

La ξ ha, fuori dei punti cuspidali, $2n$ punti comuni con η_0 e questi sono i $2n$ punti fissi nei quali si toccano le η_i .

La ξ ha, fuori dei punti cuspidali, $2n + k$ punti comuni con la linea di stringimento e quindi esistono $2n + k$ generatrici di Σ che hanno il punto di massima (relativa) luce nella linea di stringimento (**).

Torino, ottobre 1889.

CESARE BURALI-FORTI.

(*) Clebsch, *Leçons sur la Géométrie*, t. 2°, pag. 94.

(**) Da ciò può dedursi in particolare che esistono $2n + k$ punti P di ρ , per ognuno dei quali una delle $n + k$ tangenti che possono esser condotte a ρ'' è tangente alla conica G_1 che passa per P .