Untersuchungen über die unendlich oft oscillirenden und unstetigen Functionen.

Von

HERRMANN HANKEL †.

(Abdruck aus dem Gratulationsprogramm der Tübinger Universität vom 6. März 1870*).

Einleitende Bemerkungen über den Functionsbegriff.

Nicht allein entschiedene Vorliebe für die Synthese und gänzliche Verleugnung allgemeiner Methoden charakterisirt die antike Mathematik gegenüber unserer neueren Wissenschaft; es giebt neben diesem mehr äusserem, formalen, noch einen tiefliegenden realen Gegensatz, welcher aus der verschiedenen Stellung entspringt, in welche sich beide zu der wissenschaftlichen Verwendung des Begriffes der *Veränderlichkeit* gesetzt haben.

Denn während die Alten den Begriff der Bewegung, des räumlichen Ausdruckes der Veränderlichkeit, aus Bedenken, die aus der philosophischen Schule der Eleaten auf sie übergegangen waren, in ihrem strengen Systeme niemals und auch in der Behandlung phoronomisch erzeugter Curven nur vorübergehend verwenden, so datirt die neuere Mathematik von dem Augenblick, als Descartes von der rein algebraischen Behandlung der Gleichungen dazu fortschritt, die Grössenveränderungen zu untersuchen, welche ein algebraischer Ausdruck erleidet, indem eine in ihm allgemein bezeichnete Grösse eine stetige Folge von Werthen durchläuft.

*) Indem wir die letzte Arbeit von Herrmann Hankel, welche bisher durch die Art ihrer Veröffentlichung nur schwer zugänglich war, erneut zum Abdruck bringen, rechnen wir auf den Dank des mathematischen Publicums; wird doch auf dieselbe bei fast allen neueren Untersuchungen über den Functionsbegriff zurückgegangen! Dabei wird man es nur billigen, dass wir den Abdruck durchaus wörtlich gestalteten und also die Incorrectheiten, welche die Arbeit im Einzelnen enthalten mag, als nebensächlich betrachteten.

Die Abhängigkeit, in welcher hienach die Werthreihen zweier veränderlicher Grössen stehen, findet ihren anschaulichen Ausdruck in dem Verhältniss der Ordinate zur Abscisse einer krummen Linie, und bedurfte so lange keines besondern Terminus, als man sich auf die Untersuchung specieller Fälle beschränkte.

Die Entdeckung des Infinitesimalcalculus aber mit seinen umfassenden Methoden drängte zu einer allgemeinen Bezeichnung dieses Abhängigkeitsverhältnisses, das nach Leibnitzens*) Vorgange Joh. Bernoulli**) im Jahre 1718 als „Function“ bezeichnete.

Der Begriff der Function ist von da an der fundamentale Ausgangspunkt für die Analysis geworden, deren epochemachenden Fortschritte auf's Engste mit der Ausbildung zusammenhängen, welche er allmählich erlitten hat.

Euler, der das wissenschaftliche Bewusstsein in der Mitte des vorigen Jahrhunderts am Vollständigsten vertritt, definirt in wesentlicher Uebereinstimmung mit seinen Vorgängern***):

„Functio quantitatis variabilis est expressio analytica quomodocunque composita ex illa quantitate variabili et numeris seu quantitativis constantibus.“

Wir haben uns unter einem solchen „analytischen Ausdruck“, dessen Bedeutung Euler näher zu bestimmen nicht für nöthig hält, nichts anderes zu denken, als eine nach dem Typus algebraischer Functionen gebildete Grössenabhängigkeit. Denn die transcendenten Functionen dachte man sich durch Entwicklungen bestimmt, welche aus einer unendlichen Anzahl von Elementaroperationen (Addition, Subtraction, Multiplication und Division) ebenso gebildet werden, als die algebraischen durch eine endliche Anzahl solcher, ohne dass man sich über die Zulässigkeit einer solchen grenzenlosen Fortsetzung der Operationen, Bedenken gemacht hätte. Zu jenen vier Species traten dann noch die Differentiation und Integration als die der Analysis eigenen Operationen hinzu.

Indem man sich immer an jenes Vorbild der algebraischen Functionen anlehnte, so übertrug man alle allgemeinen Eigenschaften, die man an den algebraischen Functionen bemerkte, ihre besondere Stetigkeit, ihre Singularitäten, ihre besondere Weise, unstetig oder unendlich zu werden, ohne Weiteres auf alle Functionen. Da man bei den algebraischen Functionen die Reihenentwicklung nach Potenzen eines Incrementes, den Differentialquotienten und das Integral direct ab-

*) Acta Erudit, 1692. April p. 170, und 1694. Juli p. 316.

**) Opera omnia. t. II. p. 241. Vergl. auch Leibnitii et Joh. Bernoullii commerc. epist. t. I. p. 386, und Jac. Bernoullii, Oper. omn. t. II. p. 788.

***) Introd. in an. inf. 1748. t. I. p. 4.

leiten konnte, so hielt man sich nicht nur für berechtigt, die Existenz einer solchen Reihe, des Differentialquotienten und Integrales ganz allgemein für alle Functionen anzunehmen, sondern man kam überhaupt nicht auf den Gedanken, dass hierin eine Behauptung, sei es nun als Axiom oder Theorem liegt, — so selbstverständlich erschien diese, von der geometrischen Anschauung der die Functionen repräsentirenden Curven scheinbar unterstützte Uebertragung der Eigenschaften algebraischer Functionen auf die Transscendenten; und Beispiele, in denen recht eigentlich analytische Functionen*) Singularitäten zeigten, die von denen der algebraischen Functionen wesentlich verschieden waren, blieben gänzlich unbeachtet.

Wenn beliebig gezeichnete Curven in irgend einer Beziehung von dem Verhalten algebraischer Curven abweichen, so nannte man sie**) „*curvae discontinuae seu mixtae seu irregulares*“ im Gegensatze zu den in Einer Gleichung enthaltenen „*curvae continuae*“, und war der Ueberzeugung, dass jene auf keine Weise durch eine analytische Gleichung darstellbar seien. Indem man jedoch die Abhängigkeit der Ordinate solcher Curven von der Abscisse als willkürliche Function in dem Problem der Saitenschwingungen einführte, ging man bereits über die eigentliche Definition des Functionsbegriffes hinaus und d'Alembert hatte Recht, wenn er behauptete, dies sei „*contre les règles d'analyse*“***).

In noch viel stärkerem Maasse aber geschah dies, indem man sich gedrängt sah, die für ein gewisses Intervall der Veränderlichen wohl definirten Functionen auf ein weiteres Gebiet auszudehnen, und Functionen für alle reellen Werthe des Argumentes zu bestimmen, wenn auch ihre ursprüngliche Definition nothwendig auf ein bestimmtes Gebiet beschränkt war. Das erste Beispiel einer solchen Fortsetzung war die Bestimmung der Logarithmen negativer Zahlen. Damit aber hatte man den Boden gänzlich verlassen, auf den man sich durch die Definition der functionellen Abhängigkeit gestellt hatte, und ein neues

*) Wie $\sin \frac{1}{x}$, $e^{\frac{1}{x}}$, $\frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$, $\int \frac{dx}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$ u. a. für $x = 0$. Zum Beweise

des im Texte gesagten, diene z. B. d'Alembert Hist. de l'Acad. Berlin für 1747. p. 236.

**) Euler, Introd. in an. inf. t. II. p. 6.

***) Opusc. math. t. I. p. 32. Die ganze Polemik, die sich über das Problem de chordis vibrantibus zwischen d'Alembert, Euler, Dan. Bernoulli und Lagrange erhob, und uns vollständigen Einblick in die Anschauungen gewährt, die man damals mit dem Functionsbegriffe verband, ist in meisterhafter Weise von Riemann dargestellt worden (Ueb. d. Darstellbarkeit einer Function d. eine trigon. Reihe. 1867. Abh. d. Gött. Ges. t. 13. Art. 1).

Princip geschaffen, das ich etwa folgendermassen aussprechen zu können glaube:

Wenn für ein Gebiet der Veränderlichen eine Entwicklung gegeben ist, welche nicht unmittelbar über die Grenzen desselben fortgesetzt werden kann, weil sie ausserhalb ihre Bedeutung verliert, wenn ferner für ein anderes Gebiet der Veränderlichen eine andere Entwicklung gegeben ist, welche in das erste Gebiet nicht fortgesetzt werden kann, und es keine für beide Gebiete gültige Entwicklung giebt, so sollen beide Entwicklungen als zu Einer Function gehörig angesehen werden, wenn die Function in jedem der beiden Gebiete dieselben *Eigenschaften* zeigt.

Dass man hiemit einen wesentlich neuen Functionsbegriff gesetzt hatte, konnte um so weniger bemerkt werden, als man niemals dieses Princip als solches erkannte, wenigstens nicht ausdrücklich formulierte, und so sah man sich denn auch nicht veranlasst, genauer zu untersuchen, welche Eigenschaften und Relationen zwischen den Functionswerthen dazu erforderlich seien, um die Einheit der functionellen Abhängigkeit in zwei verschiedenen analytischen Entwicklungen für verschiedene Grössengebiete zu verbürgen.

Eine ganze Reihe von unzureichend oder fehlerhaft erwiesenen, nicht genügend determinirten, sowie von durchaus falschen Sätzen*) legen genügendes Zeugniß davon ab, wie unsicher das Fundament war, auf das man die ganze Functionentheorie gebaut hatte.

Diese ganze Auffassung des Functionsbegriffes, die ich kurz als die Euler'sche bezeichnen werde, erhielt den ersten schweren Stoss im Jahre 1807 durch Fourier's bedeutende Entdeckung**), dass es möglich ist, durch periodische Reihen nicht nur *analytische*, etwa daneben in Potenzreihen entwickelbare Functionen (funct. continuae),

*) In dieser Beziehung erinnere ich nur an Lagrange's Beweis des Taylor'schen Lehrsatzes, wie er ihn noch 1813 (théor. d. fonct. 2 éd.) gab, und, dass Cauchy (Leç. sur le calc. diff. p. 105) 1829 „entdeckte“, wie dieser Satz zuweilen „en défaut“ ist; ferner daran, dass Gauss (Theor. d. res. funct. dem. tertia, art. 4) erst 1816 in bestimmter Weise auf die Unzulässigkeit einer Integration über unendliche Werthe der Function hinwies; dass erst 1826 Abel (Crelle, Journ. t. 311) eine richtige Bestimmung der Potenz und der binomischen Reihe lieferte, nachdem Poisson auf verschiedene Paradoxien in dieser Beziehung aufmerksam gemacht, und sich Männer, wie Poinso (Rech. sur l'analyse d. sections angul. 1825) und viele andere vergeblich mit deren Auflösung beschäftigt hatten; ich erinnere ferner an die vielfachen ungenügenden und fehlerhaften Versuche, die allgemeine Begriffsbestimmung der numerischen Facultäten für gebrochene und negative Werthe der Veränderlichen zu geben, die erst Weierstrass (Crelle, Journ. t. 51. p. 1) 1856 durch deren richtige Definition ersetzte, u. s. w. u. s. w.

**) Bull. d. scienc. p. l. soc. philomatique. t. I. p. 112.

sondern auch ganz beliebige, keinem einfachen Gesetz genügende, oder verschiedene Gesetze in ihren verschiedenen Theilen folgende Functionen (funct. discontinuae), die ich *illegitime* nennen werde, darzustellen.

Damit aber war, wie man, freilich zögernd anerkannte, der ganze ältere Begriff unmöglich geworden: Wenn jene functiones discontinuae auch durch analytische Ausdrücke darstellbar waren, so konnten die Eigenschaften algebraischer Functionen nicht mehr als typisch auf alle Transcendenten übertragen werden; und wenn eine und dieselbe Reihe für verschiedene aneinanderstossende Gebiete der Veränderlichen verschiedene analytische Gesetze repräsentiren konnte, so fiel das oben formulierte Princip der Fortsetzung in sich selbst zusammen.

Es blieb nur übrig, das Axiom, dass jene Eigenschaften der algebraischen Functionen, die sich auf ihre Stetigkeit, ihre Entwickelbarkeit in Potenzreihen u. s. w. beziehen, allen analytischen Functionen ebenfalls zukommen, und daher auch die Forderung, eine Function solle analytisch darstellbar sein, als eine bedeutungslose fallen zu lassen; und indem man so den Knoten zerhieb, folgende Erklärung zu geben:

Eine Function heisst y von x , wenn jedem Werthe der veränderlichen Grösse x innerhalb eines gewissen Intervalles ein bestimmter Werth von y entspricht; gleichviel, ob y in dem ganzen Intervalle nach demselben Gesetze von x abhängt oder nicht; ob die Abhängigkeit durch mathematische Operationen ausgedrückt werden kann oder nicht.

Diese reine Nominaldefinition, der ich im Folgenden den Namen Dirichlet's beilegen werde, weil sie seinen Arbeiten über die Fourier'schen Reihen*), welche die Unhaltbarkeit jenes älteren Begriffes zweifellos dargethan haben, zu Grunde liegt, reicht nun aber für die Bedürfnisse der Analysis nicht aus, da Functionen dieser Art allgemeine Eigenschaften nicht besitzen, und damit alle Beziehungen von Functionswerthen für verschiedene Werthe des Argumentes in Wegfall kommen.

Es ist so eine empfindliche Lücke in den analytischen Fundamentalbegriffen entstanden, die, obgleich sie überall mit Stillschweigen übergangen wird, doch nicht minder vorhanden ist; wie ein Blick selbst auf die besseren Lehrbücher der Analysis lehrt. Das eine definirt die Functionen wesentlich im Euler'schen Sinne, das zweite verlangt y solle sich „gesetzmässig“ mit x ändern, ohne dass eine Erklärung dieses dunklen Begriffes gegeben ist, das dritte definirt sie in der Weise Dirichlet's, das vierte gar nicht; alle aber leiten aus ihrem Begriffe Folgerungen ab, die nicht in ihm enthalten sind.

*) Repert. d. Physik, her. v. Dove t. I. 1837 p. 152.

Es war nöthig, über den Dirichlet'schen Begriff hinauszugehen, wie bereits Cauchy dies seit dem Jahre 1815 zu thun begann. Aber erst in neuester Zeit (1851) ist durch Riemann*) mit echt philosophischem Geiste ein fester Grund neu gelegt worden, indem er, von dem Dirichlet'schen Begriffe ausgehend, den der (monogenen) Function einer *complexen Variablen* begründete, und so jener leeren Definition wieder einen Inhalt gab, der sich dem des älteren Begriffes annäherte.

Es war dem Gründer der Functionentheorie complexer Veränderlicher leider nicht vergönnt, sein System allseitig und nach dem einheitlichen Plane aufzubauen, dessen Grossartigkeit wir aus den schönen uns bekannten Bruchstücken noch erschliessen können.

Die Grundpfeiler des neuen Systems werden hie und da noch nicht für sicher, und fest genug gehalten, um von ihnen aus das ganze Gebäude der Analysis aufzuführen, und namentlich das von Riemann in edler Bescheidenheit nach Dirichlet benannte Princip ist neuerdings mehrfach angegriffen und vertheidigt worden.

Die Bedenken sind hergenommen von gewissen a priori denkbaren Ausnahmefällen, in denen die Functionen Unstetigkeiten zeigen, die nicht ohne weiteres ausgeschlossen werden können und doch die Schlüsse, die man auf alle der Definition genügenden Functionen anzuwenden hoffen durfte, alteriren.

Ich glaubte nun, dass der einzige Weg, um über diese Unstetigkeiten in's Klare zu kommen und damit den Entscheid über die Natur der Functionen vorzubereiten, der sei, sich von allen Vorstellungen, wie sie auch dem modernsten Mathematiker noch aus dem Euler'schen Functionsbegriffe anhaften, loszusagen und zunächst einmal die Mannigfaltigkeit der in dem *reinen* Dirichlet'schen Functionsbegriffe enthaltenen, möglichen Grössenbeziehungen zweier Veränderlichen auseinanderzulegen, dabei aber besondere Aufmerksamkeit den bisher wenig oder gar nicht beachteten, den *illegitimen* Functionen zu schenken.

In der folgenden Abhandlung habe ich den Versuch gemacht, diese Paradoxieen der Functionen zu behandeln, indem ich mich zunächst auf *reelle* Variablen und *reelle endliche* Werthe der Functionen Einer Veränderlichen beschränke.

Nachdem in § 1. der Sinn, den ich in dieser Abhandlung mit dem Worte „Function“ verbinden werde, festgelegt, in § 2. die verschiedenen denkbaren Arten der Stetigkeit und Unstetigkeit von Functionen in Punkten erörtert sind, so gehe ich in § 3. zu der Betrachtung stetiger Functionen im Allgemeinen über und zeige, dass ausser den gewöhnlichen analytischen Functionen mit endlichen, in endlicher

*) Grundlagen f. e. allgem. Theor. d. Funct. Göttingen.

Zahl auf einem gewissen Intervalle liegenden Oscillationen, auch Functionen mit unendlich vielen Oscillationen unendlich kleiner Amplitude denkbar sind. Ausschliesslich solche Functionen dieser Klasse, welche nur in der Nachbarschaft einzelner Punkte jene unendlich vielen Oscillationen zeigen, sind bisher, soviel mir bekannt, durch analytische Ausdrücke dargestellt worden. Mit Hilfe eines Principes, auf welches ich durch ein Beispiel Riemann's*) aufmerksam wurde und welches ich das der *Condensation von Singularitäten* nenne (§ 4.), ist es mir gelungen, in § 5. analytische, unbedingt convergente Reihen aufzustellen, die in ganzen Intervallen durchaus oscilliren.

Während nun alle diese Functionen stets der Integration unterzogen werden können, so bietet die Frage nach der *Existenz* eines *Differentialquotienten* eigenthümliche Schwierigkeiten dar. Es ist diese bisher nur selten einer Erörterung unterzogen worden**), weil man die Existenz einer Tangente an jedem Punkte einer Curve als aus unmittelbarer geometrischer Anschauung gewiss, und für eine selbstverständliche Folge der „lex continuitatis“ ansah, die man wie eine *Naturnothwendigkeit* im Gebiete der Mathematik respectirte. Wenn aber auch dies dunkle „Gesetz der Stetigkeit“ in der That alle Bewegungen in der Natur beherrschen sollte, so darf es doch das Gebiet der reinen Mathematik auf keine Weise beschränken; und jene unmittelbare intuitive Gewissheit hat man selbst in durchaus geometrischen Gebieten als so trügerisch befunden, dass sie auf den Rang eines wissenschaftlichen Beweises nicht mehr Anspruch machen darf. Nach dem Vorgange von Gauss***), Dirichlet, Jacobi†) u. a. ist denn auch die Ueberzeugung, dass die Existenz eines Differentialquotienten stetiger Functionen *keine nothwendige* Folge der Stetigkeit sei, sondern eine besondere Voraussetzung involvire, unter den neueren Mathematikern eine ziemlich allgemeine geworden, obgleich noch gar Mancher an stetige Functionen ohne Differentialquotienten „nicht zu glauben“ erklärt. Ich darf hoffen, in § 5. diesen Unglauben als ein Vorurtheil dargethan zu haben, indem dort völlig bestimmte Functionen der angegebenen Art in *analytischem* Ausdrücke durch unbedingt convergente Reihen dargestellt werden.

In § 6. und 7. habe ich die *linear* unstetigen Functionen unter-

*) Ueb. d. Darst. e. Funct. art. 6.

**) Der, soviel mir bekannt, einzige Versuch Ampère's, die Existenz eines solchen a priori für alle Functionen zu erweisen (Journ. de l'éc. polyt. cah. XIII, 1806. p. 148) ist ganz verunglückt.

***) Allg. Lehrs. in Bez. auf d. im verk. Verh. etc. art. 16.

†) Mündlicher Ueberlieferung nach soll Jacobi in seinen Vorlesungen zuweilen bemerkt haben, „man könne sich stetige Curven mit unendlich vielen Spitzen denken.“

sucht, d. h. solche, welche auf einem endlichen Intervalle eine unendliche Anzahl von Lösungen der Continuität zeigen, und diese nach ihrem inneren Charakter in zwei wesentlich verschiedene Klassen, die *punktirt*-, und die in Linien *total* unstetigen getheilt, die sich auch (§ 8.) insofern wesentlich verschieden verhalten, als die ersteren immer, die letzteren niemals integrabel sind. In § 9. sind beide Klassen unstetiger Functionen durch analytische Ausdrücke dargestellt.

In den Schlussbetrachtungen habe ich endlich die erhaltenen Resultate zu einer Kritik des Functionsbegriffes verwendet und zu zeigen versucht, dass diese mit Nothwendigkeit auf die Riemann'sche Definition führt, an welche sich in der III. Note einige Bemerkungen über die lineare Unstetigkeit von Functionen complexer Veränderlicher anschliessen.

Soviel zur vorläufigen Orientirung über diesen Beitrag zur Metaphysik unserer Wissenschaft, den ich in Folgendem dem Urtheile der Mathematiker unterbreite. Ich verdanke die Anregung zu diesen Studien wesentlich Riemann's Schriften, in's Besondere seiner glänzenden Arbeit über die trigonometrischen Reihen, nach deren Erscheinen es keiner Entschuldigung mehr bedarf, sich mit diesen Fragen zu beschäftigen, welche, wie ihr Verfasser in Uebereinstimmung mit Dirichlet bemerkt, „mit den Principien der Infinitesimalrechnung in der engsten Verbindung stehen und dazu dienen können, diese zu grösserer Klarheit und Bestimmtheit zu bringen“. Sollte mein Versuch, auf einem so schlüpfrigen, bisher nur selten betretenen Boden festen Fuss zu fassen, theilweise misslungen sein und es den Resultaten hie und da an dem wünschenswerthen Abschluss fehlen, so glaube ich auf einige wohlwollende Nachsicht rechnen zu dürfen. Denn es war bei der gelegentlichen Veröffentlichung dieser Gedanken meine einzige Absicht, andere Gelehrte zu veranlassen, ihr Interesse auch diesen fundamentalen Problemen der Wissenschaft zuzuwenden, welche die neuere Functionenlehre nicht mehr abzuweisen gestattet.

§ 1.

Begriff der Function.

Um alle Unbestimmtheit zu beseitigen, erkläre ich hier, das im Folgenden, mit Ausnahme weniger Stellen, an denen dies besonders bemerkt werden wird, nur von *reellen* Werthen der Veränderlichen und von *reellen* Functionen die Rede sein wird, und ein *Unendlichwerden* der Function überall ausgeschlossen sein soll. Demgemäss definire ich:

Eine *Function* von x nennt man $f(x)$, wenn zu jedem Werthe von x innerhalb eines gewissen Intervalles ein *einzig* bestimmter Werth von $f(x)$ gehört.

Es ist dabei gleichgültig, woher und wie man $f(x)$ bestimme, ob durch analytische Grössenoperationen oder auf andere Weise. Nur muss der Werth von $f(x)$ überall eindeutig und bestimmt sein. So wäre $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ in einem $x = 0$ umgebenden Intervalle keine überall bestimmte Function, so lange sie nur durch ihren analytischen Ausdruck definirt wird. Denn dieser wird in $x = 0$ völlig unbestimmbar und unbestimmt, während er in jedem $x \neq 0$ noch so nahen Punkte allerdings bestimmt ist. Soll sie obigem Begriffe einer völlig bestimmten Function genügen, so muss der Werth $f(0)$ noch besonders, etwa $= 0$, oder $= 1$ oder anders festgestellt sein. Ebenso wenig ist $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ in $x = 0$ bestimmt, da es für positive unendlich zu Null abnehmende x unendlich zu-, für negative x unendlich abnimmt. Wohl aber ist

$$f(x) = \frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots$$

trotz ihrer Sprünge eine überall bestimmte Function.

§ 2.

Begriff der Stetigkeit.

Eine Function $f(x)$, welche für $x = a$ einen bestimmten endlichen Werth $f(a)$ hat, nennt man *in diesem Punkte stetig*, wenn ε stets so klein angenommen werden kann, dass die Differenz:

$$f(a + \delta) - f(a)$$

für *alle* δ , die numerisch $< \varepsilon$ sind, numerisch kleiner, als eine beliebig kleine Grösse σ ist.

Unstetig heisst sie im Punkte $x = a$, wenn ε *nicht* so klein genommen werden kann, dass

$$f(a + \delta) - f(a)$$

für *alle* δ , die numerisch $< \varepsilon$ sind, numerisch unter jeder beliebig kleinen Grösse σ liege.

Es leuchtet ein, dass wenn die Function in $x = a$ stetig ist, das ε so klein bestimmt werden kann, dass, wie auch $\delta < \varepsilon$ angenommen werden möge, $f(a + \varepsilon) - f(a + \delta)$ numerisch kleiner als jede gegebene Grösse σ bleibt, nicht aber umgekehrt. Denn wenn letztere Bedingung erfüllt ist, so kann daraus nur geschlossen werden, dass sich $f(a + \varepsilon)$ mit unendlich abnehmendem ε einer Grenze*) annähert, die jedoch von $f(a)$ ganz verschieden sein kann, wie das Beispiel Fourier'scher Reihen an ihren Unstetigkeitspunkten genügend beweist.

*) S. die genaue Fassung des Begriffes der Grenze im Anhang Note I.

Ich will die Eigenschaft einer Function: Wenn das positive ε stets so klein gedacht werden kann, dass $f(a + \varepsilon) - f(a + \delta)$ für jedes von Null verschiedene $\delta < \varepsilon$ numerisch kleiner als eine beliebig kleine Grösse σ ist, -- dadurch bezeichnen, dass ich sage:

Die Function sei *in unmittelbarer Nähe des Punktes $x = a$ auf der rechten Seite stetig*.

Es kann dies also stattfinden, ohne dass die Function *im* Punkte $x = a$ selbst stetig ist, aber nicht umgekehrt. Die Stetigkeit *in* einem Punkte zieht stets die Stetigkeit in seiner unmittelbaren Nähe, und zwar rechter und linker Seite nach sich. Es kann ferner $f(x)$ in *jedem* $x = a$ beliebig nahe kommenden Punkte $x = a + \varepsilon$ stetig sein, ohne doch *in* dem Punkte $x = a$ oder nur in seiner unmittelbaren Nähe stetig zu sein. Ein Beispiel hiefür liefert die Function

$$f(x) = \sin \frac{1}{x-a},$$

welche in jedem $x = a$ noch so nahen Punkte stetig ist, ohne es in $x = a$ selbst zu sein, wie man auch den durch die analytische Definition nicht bestimmten Werth derselben in $x = a$ annehme. Aber auch in unmittelbarer Nähe von $x = a$ ist sie nicht stetig; denn man wird nie ε so klein machen können, dass

$$f(a + \varepsilon) - f(a + \delta) = \sin \frac{1}{\varepsilon} - \sin \frac{1}{\delta}$$

für jedes von Null verschiedene $\delta < \varepsilon$ unterhalb einer beliebig kleinen Grösse liegt; da diese Differenz fortwährend zwischen den Grenzen ± 1 hin- und herschwankt. Dagegen ist die Function, wie schon bemerkt, für jedes $x = a + \varepsilon$, wie klein auch ε sei, stetig; denn vorstehende Differenz lässt sich, wenn ε constant gehalten wird, durch Annäherung des δ an ε beliebig klein machen.

Ich denke, man kann diesen Fall, dass $f(x)$ in jedem $x = a$ beliebig nahen Punkte stetig ist, dadurch bezeichnen, dass man sagt:

Die Function sei *bis in unmittelbare Nähe von $x = a$ stetig*.

Es folgt daraus nicht, dass sie *in* unmittelbarer Nähe von $x = a$ stetig sein müsse. Und umgekehrt: Es kann eine Function *in* einem Punkte und *in* seiner unmittelbaren Nähe stetig sein, ohne es *bis* in seine unmittelbare Nähe zu sein, wie dies Beispiele des § 9. genügend beweisen.

Es können sich ferner $f(a + \delta)$ und $f(a - \delta)$ mit unendlich abnehmendem δ zweien Grenzen nähern, welche von einander und von $f(a)$ verschieden sind. Man sagt dann, die Function mache hier einen „Sprung“, und nennt jene Grenzen die Sprungwerthe. Es kann aber $f(a)$ mit dem Grenzwerte von $f(a + \delta)$ zusammenfallen und von dem

Grenzwerthe des $f(a - \delta)$ verschieden sein. Dann werden wir sagen, die Function sei im Punkte $x = a$ auf der rechten Seite stetig, links aber nicht.

Endlich können die Grenzwerthe $f(a + \delta)$ und $f(a - \delta)$ gleich, der Werth $f(a)$ aber von ihnen verschieden sein*).

§ 3.

Stetige Functionen.

Schlechthin stetige nennen wir solche Functionen, welche in jedem endlichen Intervalle überall, mit Ausnahme einer endlichen Anzahl von Punkten stetig sind. Wir beschränken uns hier auf die Betrachtung derjenigen Intervalle, welche zwischen solchen Unstetigkeitspunkten liegen, in denen also die Functionen *durchaus stetig*, endlich und bestimmt sind.

Für die meisten analytischen Functionen, die man bisher in Untersuchung gezogen hat, lässt sich in jedem Punkte $x = a$ ein positives Intervall ε so bestimmen, dass für *alle* $\delta < \varepsilon$ die Differenz $f(a + \delta) - f(a)$ nicht allein numerisch kleiner als eine beliebig kleine Grösse σ , sondern auch *einerlei Zeichens* ist, und die Differenz mit *abnehmenden* δ immer *abnimmt*; ein eben solches Intervall aber auch auf der anderen Seite des Punktes $x = a$ vorhanden ist. Sind in diesem Falle die Zeichen der Differenzen $f(a + \delta) - f(a)$ und $f(a - \delta) - f(a)$ dieselben, so ist in $x = a$ ein Maximum oder ein Minimum; sind die Vorzeichen verschieden, so ist keins von beiden vorhanden. Auf ein Maximum folgt im Verlaufe einer solchen Function ein Minimum und umgekehrt. Man nennt ein solches Stück der Function zwischen einem Maximum und Minimum eine *Oscillation*, die Differenz des Maximal- und Minimalwerthes die Amplitude derselben**).

Die Functionen der angegebenen Art haben auf jedem endlichen Intervalle eine *endliche* Anzahl von Oscillationen.

Nach dem Bilde dieser Functionen, welche die Analysis fast allein kennt, kann man sich nun die anderen stetigen Functionen denken, in denen, wie klein man auch ε nehmen möge, doch $f(a + \delta) - f(a)$ *nicht* für alle $\delta < \varepsilon$ *desselben* Zeichens und *nicht* mit δ immer *abnehmend* ist. Ein Beispiel eines solchen Verhaltens liefert die Function

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x}$$

*) Riemann hat (Grundlagen f. e. allg. Th. p. 14) diese Unstetigkeiten als solche bezeichnet, welche „durch Abänderung des Functionswerthes in Einem Punkte hebbar“ sind.

**) Ich bediene mich hier der Bezeichnung von Lipschitz (Crelle, Journ. t. 63. p. 296).

welche in $x = 0$ den Werth $f(0) = 0$ hat und gewiss stetig ist; denn man kann die Differenz:

$$f(\delta) - f(0) = \delta \sin \frac{1}{\delta}$$

jedenfalls beliebig klein machen, obgleich sie für abnehmende δ immerfort zwischen positiven und negativen Werthen oscillirt. Wir können dies Verhalten wohl so bezeichnen, dass $f(x)$ in der unmittelbaren Nähe von $x = 0$

unendlich viele Oscillationen mit unendlich kleiner Amplitude habe.

Was hier nur in unmittelbarer Nähe eines einzelnen Punktes stattfindet, kann für gewisse Functionen in einer unendlichen Anzahl von Punkten geschehen, die unendlich dicht bei einander liegen; Beispiele solcher Functionen sind in I. und II. des § 5. gegeben. Charakteristisch bleibt aber für diese Functionen, dass, wie klein man auch das von Null verschiedene σ annehmen möge, die Anzahl der Oscillationen, deren Amplituden $> \sigma$ sind, immer eine endliche ist, jedoch unbegrenzt wächst, wenn σ unbegrenzt abnimmt.

Man hat wohl auch von *stetigen* Functionen gesprochen, welche eine *unendliche Anzahl* von *Oscillationen* mit *endlicher Amplitude* enthalten sollen, d. h. bei denen in jedem noch so kleinen Intervalle Oscillationen vorkommen sollen, deren Amplituden eine gewisse constante Grösse σ übersteigen und hat dabei etwa an $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ in $x = 0$ gedacht. Es ist aber leicht zu zeigen, dass diese Annahme einen inneren Widerspruch involvirt. Denn, wenn an dem Punkte $x = a$ kein Intervall ε existirt, innerhalb dessen für alle ε , $f(a + \varepsilon) - f(a)$ numerisch kleiner, als eine beliebig kleine Grösse ist, sondern, wenn die Werthe dieser Differenz innerhalb des Intervalles um jene constante Amplitude $> \sigma$ schwanken, so ist eben die Function, dem Begriffe der Stetigkeit nach, *nicht stetig*; wie denn auch schon $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ in $x = 0$ selbst nicht stetig, sondern gänzlich unbestimmt ist.

Für *alle stetigen* Functionen ist daher die *Anzahl* der *Oscillationen*, welche $> \sigma$ sind, in jedem Intervalle *endlich*, wie nahe auch σ der Null kommen möge. Sie zerfallen aber in folgende zwei Klassen:

I. *Functionen mit endlichen Oscillationen*, d. h. diejenigen, in denen die Anzahl der Oscillationen $> \sigma$ über eine bestimmte Grenze nicht hinausgeht, wie klein auch σ genommen werde.

Hierher gehören alle algebraischen, und die meisten der bekannten analytischen Functionen, denen, mit Ausnahme einiger kritischen Punkte, wie in

$$f(x) = \sin \frac{1}{x} \quad \text{oder} \quad f(x) = x^{\frac{2}{3}}$$

des Punktes $x = 0$, überall ein bestimmter, endlicher Differentialquotient zuzukommen pflegt.

Es lassen sich indessen Functionen denken, welche zwar überall stetig sind, und zu der Klasse der Functionen mit endlichen Oscillationen gehören und doch in unendlich vielen Punkten eines Intervalles unendlich grosse Differentialquotienten, also gleichsam „unendlich viele Spitzen“ haben*). In III. und IV. des § 5. sind solche Functionen in analytischer Reihenform dargestellt, in denen sich die Differenz $f(a + \varepsilon) - f(a)$ in unendlich vielen Punkten $x = a$ bezüglich wie $\varepsilon^{\frac{2}{3}}$ und $\frac{1}{\log \varepsilon}$ verhält.

Es giebt aber auch, was früher geläugnet zu werden pflegte, einfache transcendente Curven, welche stetig verlaufen, jedoch einzelne

*) Es liegt nicht fern, solche Curven mit unendlich vielen Spitzen sich etwa auf folgende Weise anschaulich vorzustellen: Man theile ein Quadrat von der Seitenlänge 1 durch äquidistante horizontale und vertikale Parallelen in ein Netz von μ^2 kleineren Quadraten; man gehe dann von der einen Ecke des grossen Quadrates in zusammenhängendem Zuge nach der gegenüberliegenden Ecke, indem man dabei immer in jenen Parallelen bleibt, sich also bald in horizontaler, bald in vertikaler Richtung bewegt. Die Länge des Wegs, den man hiebei durchmisst, ist immer dieselbe und zwar $= 2$, wie man auch die Maschen jenes Netzes durchlaufe. Man wähle jetzt einen solchen Weg, der sich möglichst an die Diagonale anschliesst und treppenförmig von dem einen Eckpunkte nach dem anderen aufsteigt, indem die Diagonale alle ausspringenden Ecken der Stufen trifft. Man lasse nun μ beliebig wachsen; jener treppenförmige Weg wird sich dann, wenn er immer in gleicher Weise construirt wird, der Diagonale immer mehr annähern, und sein Abstand von dieser beliebig klein werden; während aber die Tangente der Diagonale für alle ihre Punkte denselben Werth besitzt, so schwankt die jenes treppenförmigen Zuges fortwährend zwischen 0° und 90° , und die Länge des letzteren bleibt constant $= 2$, während die der Diagonale einen anderen Werth nämlich $\sqrt{2}$ besitzt. Lässt man nun μ unendlich wachsen, so scheint man durch diesen Grenzübergang zu einer Linie zu gelangen, die zwar in ihrem ganzen äusseren Verlaufe mit einer geraden Linie zusammenfällt, in ihrer inneren Natur aber wesentlich anders beschaffen ist, indem ihre Richtung in jedem Punkte gänzlich unbestimmt und ihre Länge von der der Geraden verschieden ist. Dies (der bekannten *rota Aristotelica* verwandte) Paradoxon beruht indess auf einer Erschleichung, indem dabei stillschweigend der Satz angenommen wird: „Wenn sich eine Schaar von Curven stetig einer Grenzcurve nähert, so gelten die Eigenschaften jener Schaar auch für die Grenzcurve.“ Dieser Satz, vor dessen stillschweigender Anwendung sich freilich selbst bedeutende Mathematiker nicht immer bewahrt haben, ist aber im Allgemeinen nicht nur unerweislich, sondern auch falsch; denn es sind genug Beispiele beizubringen, wo eine Schaar von Curven mit stetig veränderlicher Richtung und Krümmung sich stetig einer Grenzcurve nähert, welche plötzliche Aenderungen der Richtung und Krümmung zeigt. In unserem obigen Falle findet das umgekehrte statt: eine Reihe von Curven mit springenden Differentialquotienten nähert sich stetig einer Curve von constanter Richtung.

Punkte besitzen, in welchen die Grenzen, welchen sich die durch jene festen Punkte und benachbarte Curvenpunkte gelegte Secanten annähern, zu beiden Seiten verschieden sind, so dass also in diesen Punkten zwei Zweige der Curve unter einem endlichen Winkel zusammenstossen.

Ein Beispiel hiefür ist:

$$f(x) = \int_a^x \frac{dy}{1 + e^{\frac{1}{y}}},$$

wo die Function unter dem Integralzeichen überall endlich bleibt, wenn y reelle Werthe durchläuft, und nur für $y = 0$ unbestimmt wird. Es ist aber gleichwohl

$$f(0) = \int_a^0 \frac{dy}{1 + e^{\frac{1}{y}}}$$

bestimmt, und

$$f(\varepsilon) - f(0) = \int_0^\varepsilon \frac{dy}{1 + e^{\frac{1}{y}}} = \varepsilon - \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{\delta}}},$$

wo δ ein zwischen 0 und ε liegender Werth ist. Da nun der Grenzwert von

$$\frac{1}{1 + e^{\frac{1}{\delta}}} = \begin{cases} 0 & \text{für positive } \delta, \\ 1 & \text{für negative } \delta, \end{cases}$$

so ist

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(\varepsilon) - f(0)}{\varepsilon} = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases},$$

je nachdem man sich von der rechten oder linken Seite dem Nullpunkte nähert.

Aehnlich verhält sich das Integral jeder Function, die zu beiden Seiten eines Punktes verschiedene Werthe annimmt.

Am Ende des § 8. sind nun stetige Functionen in analytischer Form angegeben, welche in unendlich vielen Punkten eines endlichen Intervalles dieselbe Eigenschaft zeigen.

II. *Functionen mit unendlich vielen Oscillationen unendlich kleiner Amplitude* sind solche, bei denen die Anzahl der Oscillationen $> \sigma$ mit abnehmendem σ über alle Grenzen wächst.

Hierher gehört die Function $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$, welche wenigstens in einem, $x = 0$ umschliessenden Intervalle die angegebenen Eigen-

schaften zeigt. Andere Functionen, welche dieselbe Eigenthümlichkeit in unendlich vielen Punkten jeder Strecke besitzen, sind in I. und II. des § 5. gegeben.

Was die Differentialquotienten betrifft, so kann man allerdings Functionen dieser zweiten Classe angeben, welche in unendlich vielen Punkten keine besitzen (wie I. des § 5.); es giebt aber auch solche, bei welchen sich die Oscillationen gleichsam so abflachen, dass in jedem Punkte ein bestimmter *Differentialquotient* existirt*) (vergl. II. des § 5.) Einfacher ist die Untersuchung der Integrale und es mag hier sogleich bemerkt werden, dass in § 8. gezeigt werden wird: die stetigen Functionen beider Classen sind stets integrabel.

Was die Entwicklung stetiger Functionen in Fourier'sche Reihen betrifft, so sind die Untersuchungen Dirichlet's**), welche ausdrücklich auf die erste Classe beschränkt waren, durch die Arbeiten von Lipschitz***) und Riemann†) dahin vervollständigt worden, dass *alle* stetigen Functionen in periodische Reihen mit unendlich abnehmenden Coefficienten entwickelt werden können.

§ 4.

Condensation der Singularitäten.

Es muss der Fortgang der theoretischen Entwicklung hier unterbrochen werden, um das Princip auseinanderzusetzen, welches die im vorigen Paragraphen angeführten illegitimen Functionen analytisch darzustellen gestattet.

Es sei $\phi(y)$ eine Function, welche für alle Werthe von y zwischen

*) Ob es möglich ist, *stetige* Functionen analytisch darzustellen (oder auch nur zu denken), welche in *keinem* Punkte eines endlichen Intervalles einen bestimmten endlichen Differentialquotienten besitzen, steht dahin. Denn man muss hiebei genau unterscheiden, ob in einem gegebenen Falle der Differentialquotient an sich unbestimmt ist, oder nur in einer Form erscheint, deren Werth wir nicht zu bestimmen vermögen. So lässt z. B. die Function

$$f(x) = \sum (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n}.$$

in dieser Form ihren Differentialquotienten unbestimmt, weil die Reihe zu schlecht convergirt, um nach unseren gewöhnlichen Methoden die Differenz $f(x+\varepsilon) - f(x)$ für abnehmende ε bestimmen zu lassen; an sich aber ist $f'(x) = 1$ und keineswegs unbestimmt.

**) Crelle, Journ. t. 4. p. 169 wird vorausgesetzt, dass nur eine endliche Anzahl von Maximis und Minimis vorhanden sind.

***) Crelle, Journ. t. 63. p. 301 wird die Entwickelbarkeit nachgewiesen für Functionen, in denen $f(x+\varepsilon) - f(x)$ mit ε schneller abnimmt, als irgend eine positive Potenz von ε .

†) Ueb. d. Darstellbark. art. 10.

-1 und $+1$, mit Ausnahme von $y=0$, einen völlig bestimmten, zwischen $+1$ und -1 liegenden Werth hat und das normale Verhalten analytischer Functionen zeigt, dass $\varphi(y+\delta)$ für ein genügend kleines δ nach dem Taylor'schen Lehrsatz

$$\varphi(y+\delta) = \varphi(y) + \delta \varphi'(y) + \frac{1}{2} \delta^2 \varphi''(y) + \dots$$

entwickelt werden kann. In $y=0$ aber habe diese Function eine Singularität, welche die Entwicklung von $\varphi(y)$ nach ganzen Potenzen von y unzulässig macht; doch sei ihr Werth auch in diesem Punkte bestimmt und zwar $\varphi(0)=0$.

Diese Singularität, welche der Function $\varphi(y)$ nur für einen einzelnen Punkt $y=0$ zukommt, kann nun einer Function $f(x)$ so imprägnirt werden, dass sie diese in unendlich vielen Punkten eines endlichen Intervalles besitzt, und zwar, indem man setzt:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(\sin nx\pi)}{n^s}$$

Wenn $s > 3$ vorausgesetzt wird, so convergirt diese Reihe, weil ihre Glieder numerisch nicht grösser sind, als die der convergenten Reihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Die Function $f(x)$ ist daher immer endlich und bestimmt, wenn der Function $\varphi(y)$, wie vorausgesetzt, diese Eigenschaften zukommen.

Um nun die Singularitäten der neuen Function $f(x)$ zu untersuchen, so bemerke man zunächst, dass nach bekannten Regeln:

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{n^s} < \frac{1}{(s-1)m^{s-1}}$$

und daher:

$$f(x) = \sum_{n=1}^m \frac{\varphi(\sin nx\pi)}{n^s} + \frac{h}{m^{s-1}},$$

wo h einen echten Bruch bezeichnet. Somit wenn h' ebenfalls einen echten Bruch vorstellt:

$$f(x+\varepsilon) - f(x) = \sum_{n=1}^m \frac{\varphi(\sin n[x+\varepsilon]\pi) - \varphi(\sin nx\pi)}{n^s} + \frac{h'}{m^{s-1}}$$

Hierin bedeutet m eine beliebig grosse, ε eine beliebig kleine Zahl, deren Wachsthum und Abnahme wir in beliebige Verbindung mit einander setzen können. Wir wollen voraussetzen, dass, wie gross auch m sei, immer $m\varepsilon$ unter einer beliebig kleinen Grösse liege. Da

somit um so mehr $n\varepsilon$ eine beliebige kleine Grösse darstellt, so ist die Entwicklung:

$$\varphi(\sin n[x + \varepsilon]\pi) = \varphi(\sin nx\pi) + n\varepsilon\pi \cos nx\pi \cdot \varphi'(\sin n[x + \varepsilon]\pi)$$

(wo ε ein echter Bruch) gestattet, wenn nicht $\sin nx\pi = 0$.

Dieser Fall aber tritt für kein Glied der Reihe ein, wenn x eine *irrationale* Grösse ist; es ist dann:

$$f(x + \varepsilon) - f(x) = \varepsilon\pi \sum_{n=1}^m \frac{\varphi'(\sin n[x + \varepsilon]\pi)}{n^{s-1}} \cos nx\pi + \frac{h'}{m^{s-1}}.$$

Die Reihe rechter Hand ist convergent, wenn $s > 3$, wie wir vorausgesetzt haben; und es kann somit durch Verkleinerung von ε die Differenz $f(x + \varepsilon) - f(x)$ immer beliebig klein gemacht werden.

Die Function $f(x)$ ist daher in jedem *irrationalen* Punkte stetig, und noch mehr: sie hat in jedem solchen Punkte einen völlig bestimmten, endlichen Differentialquotienten.

Denn es ist:

$$\frac{f(x + \varepsilon) - f(x)}{\varepsilon} = \pi \sum_{n=1}^m \frac{\varphi'(\sin n[x + \varepsilon]\pi)}{n^{s-1}} \cos nx\pi + \frac{h'}{\varepsilon m^{s-1}}.$$

Nun nähert sich mit stetig abnehmendem ε unter der Voraussetzung $s > 3$ die Reihe jedenfalls der Grenze

$$\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi'(\sin nx\pi)}{n^{s-1}} \cos nx\pi,$$

und wenn man jene Beziehung zwischen dem Wachsthum von m und der Abnahme von ε genauer so determinirt, dass εm zwar unendlich abnehmen, $\varepsilon m^{s-1} = \varepsilon m \cdot m^{s-2}$ aber unendlich wachsen soll, was z. B. durch die Substitution

$$m = \frac{1}{\varepsilon q}, \quad 1 > q > \frac{1}{s-1}$$

bewirkt werden kann, so sieht man, dass der Rest verschwindet, also der Differentialquotient

$$f'(x) = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi'(\sin nx\pi)}{n^{s-1}} \cos nx\pi$$

in jedem irrationalen Punkte eindeutig bestimmt und von der Abnahme des ε ganz unabhängig ist.

Die Function verhält sich demnach in jedem irrationalen Punkte ganz legitim; einen wesentlich verschiedenen Charakter hat sie dagegen in den Punkten, wo x einen *rationalen* Werth, der in seiner reducirten

Form $x = \frac{\nu}{\mu}$ sein möge, besitzt.

Fassen wir in der Reihe, welche $f(x + \varepsilon) - f(x)$ bestimmt:

$$\sum_{n=1}^m \frac{\varphi(\sin n[x + \varepsilon]\pi) - \varphi(\sin nx\pi)}{n^s}$$

zunächst die Glieder zusammen, für welche n kein Multiplum von μ , so bilden sie eine Reihe, welche die eben besprochenen Eigenschaften hat, und mit εQ bezeichnet werden mag; die übrigen Glieder aber, in denen für ganzzahlige r , $n = \mu r$ ist, haben eine ganz andere Natur; sie geben, da $\varphi\left(\sin n \frac{\nu}{\mu} \pi\right) = \varphi(\sin r\nu\pi) = \varphi(0)$ also nach unserer Voraussetzung $= 0$ wird, die Reihe:

$$\frac{1}{\mu^s} \sum \frac{\varphi(\pm \sin r\mu\varepsilon\pi)}{r^s},$$

wo r alle ganzen Zahlwerthe von 1 bis zu der unter $\frac{m}{\mu}$ liegenden ganzen Zahl durchläuft, und das Vorzeichen $\pm$ zu nehmen ist, je nachdem $r\nu$ gerade oder ungerade ist. Man kann hiefür, wenn ε abnimmt und trotz der Zunahme des m doch immer $m\varepsilon$ beliebig klein werden soll,

$$\frac{1}{\mu^s} \sum \frac{\varphi(\pm r\mu\varepsilon\pi)}{r^s}$$

schreiben, und sieht jetzt, wie die Singularität, welche $\varphi(y)$ für $y = 0$ besitzt, sich auf unsere Function überträgt. Denn es leuchtet ein, dass s immer so gross genommen werden kann, dass das erste Glied dieser Reihe, also:

$$\frac{1}{\mu^s} \varphi(\pm \mu\varepsilon\pi)$$

die Singularität wesentlich bestimmt.

Wenn die Entwicklung von $\varphi(\delta)$ nach Potenzen von δ nicht mehr gilt und die Function $\varphi(\pm r\mu\varepsilon\pi)$ selbst für die kleinsten Werthe von ε nicht in dem Grade wie ε abnimmt, so sieht man, dass die Division der Gleichung:

$$f(x + \varepsilon) - f(x) = \varepsilon Q + \frac{1}{\mu^s} \sum \frac{\varphi(\pm r\mu\varepsilon\pi)}{r^s} + \frac{h'}{m^{s-1}}$$

durch ε auf keinen bestimmten Grenzwertb für

$$\frac{f(x + \varepsilon) - f(x)}{\varepsilon}$$

führen wird, und daher

die Function $f(x)$ einen Differentialquotienten für rationale Werthe von x nicht besitzt.

Ist $\varphi(y)$ auch im Punkte $y = 0$ stetig, so ist aus dem vorstehenden Werthe der Differenz $f(x + \varepsilon) - f(x)$ ersichtlich, dass $f(x)$ in

allen, auch in den rationalen Punkten x stetig ist, ohne doch in diesen einen Differentialquotienten zu haben.

Die Singularität $\varphi(y)$ in dem Punkte $y = 0$ wird also auf jeden rationalen Punkt x der Function $f(x)$ übertragen, indem sich für solche x in der Reihe:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(\sin n x \pi)}{n^s}$$

immer Glieder finden, welche jene Eigenheiten besitzen; während für irrationale x sich alle Glieder legitim verhalten.

Die unendlich vielen Singularitäten, welche $\varphi(\sin y \pi)$ nach den vorausgesetzten Eigenschaften der Function φ in den discreten Punkten $y = 0, 1, 2, 3, \dots$ besitzt, drängen sich in der Function $f(x)$ gewissermassen auf eine endliche Strecke zusammen und ich habe daher das Princip, von solchen Functionen φ zu den f überzugehen, als das der *Condensation der Singularitäten* bezeichnen zu können geglaubt.

Die weitere Ausführung für bestimmte Functionen wird im Folgenden in verschiedenen Beispielen gegeben werden. Im Allgemeinen kann man noch bemerken, dass die Singularität in einem rationalen Punkte um so stärker ausgeprägt erscheint, je einfacher der Werth $x = \frac{p}{\mu}$, d. h. je kleiner der Nenner μ ist. Die der Function φ eigene Singularität überträgt sich nämlich auf die Function f nur in dem Verhältniss von $\mu^s : 1$. Die Function nimmt daher, je näher man einem irrationalen Punkte kommt, immer mehr den in solchen vorhandenen Charakter der Stetigkeit an.

§ 5.

Stetige Functionen mit unendlich vielen Singularitäten...

I. Diese allgemeinen Bemerkungen sollen im Besonderen auf die Function

$$\varphi(y) = y \sin \frac{1}{y}$$

angewandt werden, welche überall stetig ist, aber in $y = 0$ unendlich viele, unendlich kleine Oscillationen besitzt und daher nach aufsteigenden Potenzen von y nicht entwickelbar ist.

Die Function

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \sin n x \pi \cdot \sin \left(\frac{1}{\sin n x \pi} \right)$$

ist nun, wie aus vorstehenden Betrachtungen erhellt, in allen irrationalen Punkten x stetig und differentiabel.

Ist aber $x = \frac{v}{\mu}$ rational, so enthält $f(x + \varepsilon)$ ausser einer Reihe εQ noch die Glieder:

$$\frac{1}{\mu^s} \sum \frac{1}{r^s} \sin r \mu \varepsilon \pi \cdot \sin \left(\frac{1}{\sin r \mu \varepsilon \pi} \right),$$

die man, wenn ε genügend klein angenommen wird, bis auf Glieder höherer Ordnung, durch

$$\frac{\pi}{\mu^{s-1}} \sum \frac{1}{r^{s-1}} \sin \frac{1}{r \mu \varepsilon \pi}$$

ersetzen kann, so dass

$$f(x + \varepsilon) - f(x) = \varepsilon \frac{\pi}{\mu^{s-1}} \sum \frac{1}{r^{s-1}} \sin \frac{1}{r \mu \varepsilon \pi} + \varepsilon Q + \frac{h'}{m^{s-1}}$$

gesetzt werden darf. Da sich nun für einigermassen grosse s die Summe

$$\sum \frac{1}{r^{s-1}} \sin \frac{1}{r \mu \varepsilon \pi}$$

wesentlich auf ihr erstes Glied reducirt, so verhält sich

$$f(x + \varepsilon) - f(x) \text{ wie } \frac{\varepsilon \pi}{\mu^{s-1}} \sin \frac{1}{\mu \varepsilon \pi}.$$

Die Function $f(x)$ ist daher in den rationalen Punkten x zwar stetig, aber nicht in der Weise, dass ihrem Differentialquotienten ein bestimmter Werth zukäme. Vielmehr kann um solche Punkte herum kein Intervall von solcher Kleinheit angegeben werden, dass in ihm die Differenz $f(x + \varepsilon) - f(x)$ immer abnähme, oder nur ein und dasselbe Zeichen behielte. Wir können dies Verhalten, welches dem unserer jetzigen Function $\varphi(y)$ in $y = 0$ gleicht, dahin bezeichnen: *die Function $f(x)$ macht in jedem rationalen Punkte x unendlich viele unendlich kleine Oscillationen*, ohne jedoch jemals unstetig zu werden.

II. Setzt man

$$\varphi(y) = y^2 \sin \frac{1}{y},$$

so finden in Bezug auf das Oscilliren in jedem rationalen Punkte ganz ähnliche Verhältnisse bei der Function:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} (\sin n x \pi)^2 \sin \left(\frac{1}{\sin n x \pi} \right),$$

wie bei der in der vorigen Nr. statt. Man hat aber jetzt, wenn die früheren Bezeichnungen beibehalten werden

$$\frac{f(x + \varepsilon) - f(x)}{\varepsilon} = Q + \varepsilon \frac{\pi^2}{\mu^{s-2}} \sum \pm \frac{1}{r^{s-2}} \sin \frac{1}{r \mu \varepsilon \pi}$$

wo die, für abnehmende ε und zunehmende m verschwindenden Restglieder sogleich weggelassen sind. Halten wir nun die Voraussetzung

$s > 3$ fest, so verschwindet mit unendlich abnehmendem ε das Product jener convergenten Σ in ε und es nähert sich der Quotient

$$\frac{f(x + \varepsilon) - f(x)}{\varepsilon} \text{ der Grenze } Q.$$

Obgleich daher, wie man sieht, in jedem rationalen Punkte x auch jetzt unendlich viele, unendlich kleine Oscillationen vorhanden sind, *besitzt die Function doch in jedem Punkte einen völlig bestimmten Differentialquotienten**); der Grund hievon ist in der Kleinheit dieser Oscillationen zu suchen, die eine unendlich kleine Amplitude der zweiten Ordnung haben, ebenso wie die der Function

$$\varphi(x) = x^2 \sin \frac{1}{x} \text{ in } x = 0,$$

während die Amplituden in Nr. I unendlich klein von erster Ordnung sind.

III. Setzt man

$$\varphi(y) = y^{\frac{2}{3}},$$

und bildet demgemäss

$$f(x) = \sum \frac{(\sin nx\pi)^{\frac{2}{3}}}{n^s},$$

so hat man hierin eine *durchaus stetige*, reelle Function, wenn unter der Cubikwurzel stets ihr reeller Werth verstanden wird.

Für ein rationales $x = \frac{\nu}{\mu}$ ist:

$$f(x + \varepsilon) - f(x) = \varepsilon Q + \frac{(\varepsilon\pi)^{\frac{2}{3}}}{\mu^{\frac{s-2}{3}}} \sum \frac{1}{r^{\frac{s-2}{3}}} + \frac{h'}{m^{s-1}},$$

*) Doch ist hier vielleicht die Bemerkung nicht überflüssig, dass die Derivirte $f'(x)$, als Function von x angesehen, sich keineswegs bei Annäherung des x an einen rationalen Werth jener Grenze Q annähert, sondern fortwährend oscillirt, wie der Werth von

$$f'(x) = \sum \frac{1}{n^s} \frac{\partial}{\partial x} \left[(\sin nx\pi)^2 \sin \left(\frac{1}{\sin nx\pi} \right) \right]$$

sofort zeigt. Ganz analog ist zwar für die Function $\varphi(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ der Grenzwert von

$$\frac{\varphi(\varepsilon) - \varphi(0)}{\varepsilon} = \varepsilon \sin \frac{1}{\varepsilon}$$

bestimmt, und also $\varphi'(0) = 0$. Im Allgemeinen aber ist:

$$\varphi'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

und daher $\varphi'(x)$ eine Grösse, welche bei abnehmenden x fortwährend oscillirt und sich *nicht* der Grenze $\varphi'(0) = 0$ annähert.

und man sieht, dass die Function zu der ersten Classe der in § 3. betrachteten gehört; denn die Differenz $f(x + \varepsilon) - f(x)$ nimmt mit ε fortwährend ab, ohne dabei ihr Zeichen zu wechseln; die Function $f(x)$ besitzt demnach keine Oscillationen; gleichwohl aber existirt für vorliegende Function kein endlicher Differentialquotient; vielmehr wächst

$$\frac{f(x + \varepsilon) - f(x)}{\varepsilon} = Q + \frac{\pi^3}{6 \mu^3} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^3} \frac{1}{\log \frac{x}{r \mu \varepsilon \pi^2}}$$

mit abnehmendem ε über alle Grenzen.

Wenn man will, kann man das räumliche Corrélat der Function $f(x)$ eine stetige Curve mit unendlich vielen Spitzen nennen.

IV. An Stelle vieler ähnlicher Beispiele sei nur noch das eine erwähnt, wo-

$$\varphi(y) = \frac{1}{\log x y^2}$$

und $0 < x < \frac{1}{10}$. Dann zeigt

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \frac{1}{\log x (\sin n x \pi)^2}$$

für ein rationales $x = \frac{\nu}{\mu}$ die Differenz:

$$f(x + \varepsilon) - f(x) = \varepsilon Q + \frac{1}{\mu^2} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^2} \frac{1}{\log x (r \mu \varepsilon \pi)^2}$$

und es wird daher

$$\frac{f(x + \varepsilon) - f(x)}{\varepsilon} = Q + \frac{1}{\mu^2} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^2} \frac{1}{\varepsilon \log x (r \mu \varepsilon \pi)^2}$$

mit abnehmendem ε immer in's negativ Unendliche wachsen.

§ 6.

Definition und Beispiele, von linear unstetigen Functionen.

Unstetig im Punkte $x = a$ nennt man eine Function $f(x)$, wenn es unter den Werthen, welche die Differenz $f(a + \delta) - f(a)$ für alle positiven und negativen δ , die numerisch $< \varepsilon$ sind, annimmt, immer solche giebt, die eine gewisse endliche Grösse σ numerisch übersteigen, wie klein man auch ε annehmen möge.

Ich werde von einer solchen Function sagen: sie mache im Punkte $x = a$ Sprünge, die $> \sigma$ sind.

Zur bequemerem Ausdrucksweise führe ich noch bei der Behandlung der Unstetigkeiten einen neuen Begriff ein, und verstehe unter der Schwankung*) einer Function in einem gewissen Intervalle

*) Nach Riemann, Ueb. die Darst. art. 5.

die Differenz des grössten und kleinsten Werthes, welchen die Function in jenem Intervalle annimmt.

Die Schwankung einer Function innerhalb eines Intervalles, welches einen Punkt $x = a$ umgiebt, in dem $f(x)$ Sprünge $> \sigma$ macht, ist daher jedenfalls $> \sigma$. Sind die Sprünge in dem Punkte $< \sigma$, so kann immer ein kleines Intervall um den Punkt $x = a$ herum angegeben werden, innerhalb dessen die Schwankung weniger beträgt als 2σ .

Die schlechthin stetigen Functionen machen solche Sprünge in einzelnen Punkten, welche nur in endlicher Anzahl auf einer Strecke vorhanden sein dürfen, und zwischen sich immer ein endliches Intervall enthalten, in dem die Function durchaus stetig ist. Solche *punktuelle* Unstetigkeiten können sich aber auch in unendlicher Anzahl auf einer Strecke zusammendrängen und erzeugen so *lineare* Unstetigkeiten, zu deren Betrachtung wir uns jetzt wenden, indem wir definiren:

Linear unstetige Functionen sind solche, welche in unendlich vielen Punkten einer endlichen Strecke unstetig sind.

Die Sprünge, welche die Function in diesen unendlich vielen Punkten macht, können indess insofern ein sehr verschiedenes Verhalten zeigen, als entweder die Zahl der Punkte, in denen Sprünge grösser als eine bestimmte endliche Grösse σ vorkommen, unendlich ist, oder deren Zahl nur unendlich wächst, wenn σ unendlich abnimmt. Obgleich im letzteren Falle die Punkte, in denen die Sprünge grösser als eine bestimmte endliche Grösse σ sind, nur in endlicher Zahl vorkommen, so sind doch diese Functionen von den schlechthin stetigen, welche überhaupt nur in einer endlichen Anzahl von Punkten unstetig werden, wesentlich verschieden.

Die mannigfachen Eigenthümlichkeiten, welche die linear unstetigen Functionen zeigen können, mögen zunächst an einer Reihe von Beispielen vorgeführt werden, in denen wir die Veränderliche x das Intervall von $x = 0$ bis $x = 1$ durchlaufen lassen.

I. Für jedes rationale x sei $f(x) = 0$; für jedes irrationale $f(x) = 1^*$. Dann sind in jedem noch so kleinen Intervalle unendlich viele Punkte, in denen beiderseits Sprünge von der Grösse 1 vorkommen, enthalten, und es giebt nirgends einen Punkt $x = a$, in dem $f(a + \delta) - f(a)$ für alle $\delta < \varepsilon$, wie klein man auch ε annehme, numerisch < 1 wäre.

II. Die Function habe den Werth $f(x) = 1$, für die Strecke $x = 0$ bis $x = 1$ mit Ausnahme unendlich vieler Intervalle von der Grösse ξ^n , welche in den Punkten $x = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ (von $n = 1$ bis $n = \infty$) ihre Mittelpunkte haben; in jedem dieser Intervalle aber sei die Function in derselben Weise unstetig, als die unter I. beschriebene, d. h. sie

*) Auf solche Functionen hat Dirichlet (Crelle, Journ. t. IV. p. 169) aufmerksam gemacht.

nehme den Werth 0 für alle rationalen, den Werth 1 für alle irrationalen Werthe des Argumentes an. Die Gesamtgrösse s der Intervalle, in denen überall Schwankungen $= 1$ vorkommen, beträgt:

$$s = \xi + \xi^2 + \xi^3 + \dots = \frac{\xi}{1 - \xi}.$$

Zwischen zwei solchen Intervallen liegt immer eine Strecke, in welcher die Function stetig ist; denn die Punkte $\left(\frac{1}{2}\right)^n, \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ sind umgeben von Intervallen ξ^n, ξ^{n+1} mit endlichen Schwankungen; zwischen diesen bleibt ein Raum:

$$\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{1}{2}\xi^n\right) - \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}\xi^{n+1}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \{1 - (2\xi)^n (1 + \xi)\}$$

der, wenn etwa $\xi < \frac{1}{4}$, für alle n positiv ist und mit wachsenden n unbegrenzt abnimmt.

III. Die Function habe den Werth $f(x) = 1$ für alle Werthe des Argumentes ausser den Punkten $x = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ (von $n = 1$ bis $n = \infty$), in denen $f(x) = 0$ sein möge. Die Unstetigkeit ist hier auf einzelne, wenn auch unendlich viele Punkte beschränkt, in denen Sprünge von der Grösse 1 vorkommen. Es giebt nirgends ein ganz mit Unstetigkeiten erfülltes Intervall. Soll ein den Punkt $x = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ umgebendes Intervall nur die in diesem Punkte stattfindende Unstetigkeit einschliessen, so kann es beliebig klein genommen werden. Ja noch mehr: die Gesamtgrösse s aller Intervalle dieser Art kann beliebig klein gemacht werden. Denn nimmt man ε^n als die Grösse des, einen Punkt $x = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ einschliessenden Intervalles, so kann jene Summe:

$$s = \varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \dots = \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon}$$

mit ε beliebig verkleinert werden.

IV. Die Function habe von $x = 1$ bis $x = \frac{1}{2}$ den Werth $f(x) = 1$, von $x = \frac{1}{2}$ bis $x = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ den Werth $\frac{1}{2}$, allgemein von $x = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ bis $x = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ den Werth $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Diese Function, welche nur in den Punkten $x = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ unstetig wird, und in denselben um $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ springt, hat nicht, wie die bisher betrachteten Beispiele, eine unendliche Anzahl von Punkten, in denen ihre Sprünge eine gewisse endliche Grösse übertreffen; vielmehr ist die Anzahl der Sprünge die $> \sigma$ sind, für jedes σ endlich, nimmt aber mit abnehmendem σ fortwährend und ohne Grenze zu. Die Gesamtgrösse der Intervalle, in

denen Sprünge $> \sigma$ vorkommen, kann offenbar für jedes σ beliebig klein gemacht werden, da die Anzahl der Intervalle eine endliche ist, und diese nur die Unstetigkeitspunkte nothwendig umschliessen müssen.

§ 7.

Theorie und Classification der linear unstetigen Functionen.

Die vorstehenden Beispiele lassen deutlich zwei Classen von linear unstetigen Functionen unterscheiden: Solche, welche innerhalb ganzer Intervalle total, und solche, welche nur in zerstreuten, wenn auch unendlich zahlreichen Punkten unstetig sind. Doch bedürfen diese Begriffe noch einer präciseren Fassung.

Wenn auf einer Strecke eine Schaar von Punkten liegt, denen eine gewisse Eigenschaft zukommt, so sage ich, dass diese Punkte

die Strecke erfüllen, wenn in der Strecke kein noch so kleines Intervall angegeben werden kann, in dem nicht wenigstens Ein Punkt jener Schaar läge;

dass dagegen diese Schaar von Punkten die Strecke *nicht* erfüllt, sondern die Punkte *zerstreut* auf ihr liegen, wenn zwischen je zwei beliebig nahen Punkten der Strecke immer ein Intervall angegeben werden kann, in dem kein Punkt jener Schaar liegt.

Wir betrachten nun diese beiden Fälle einzeln:

I. Wenn eine Strecke *nicht* von solchen Punkten erfüllt ist, in denen Sprünge $> \sigma$ stattfinden, sondern diese zerstreut, immerhin in unendlicher oder in einer mit unbegrenzt abnehmendem σ unendlich zunehmenden Anzahl in ihr liegen, so giebt es der Definition nach, zwischen zwei solchen Punkten immer ein Intervall, in dem kein solcher Punkt mit Sprüngen $> \sigma$ liegt, in dem also auch die Schwankungen der Function $< 2\sigma$ sind und es gilt nun der Lehrsatz:

Wenn eine Strecke *nicht von Punkten erfüllt* ist, in denen Sprünge $> \sigma$ stattfinden, so kann die *Gesamtgrösse s der Intervalle*, in denen die Schwankungen $> 2\sigma$ sind, beliebig klein angenommen werden.

Beweis. Die Intervalle, welche s zusammensetzen, liegen herum um jene zerstreuten Unstetigkeitspunkte, in denen die Function Sprünge von der Grösse σ zeigt. Ist daher die Anzahl jener Punkte endlich, so kann die Gesamtgrösse der Intervalle, da man jedes derselben beliebig klein machen kann, auch beliebig verkleinert werden. Im Falle, dass die Anzahl jener Punkte unendlich gross ist, zwischen ihnen aber nach obiger Bemerkung noch Zwischenräume liegen, in denen die Schwankung $< 2\sigma$ ist, kann man so verfahren: Man theile die ganze Strecke, die man betrachtet, in Intervalle, von denen jedes

einen dieser Unstetigkeitspunkte mit Sprüngen $> \sigma$ umgiebt, und wähle diese Intervalle so gross, dass sie zusammengenommen die ganze Strecke erfüllen. Denkt man sich dann jedes dieser Intervalle zusammengezogen auf den n ten Theil, jedoch so, dass es auch jetzt noch den betreffenden Unstetigkeitspunkt umgiebt, so ist der übrige Theil der Strecke von Sprüngen $> \sigma$ frei; die Summe jener Intervalle aber, in denen Sprünge $> \sigma$ vorkommen, ist der n te Theil der gesamten Strecke und kann daher durch Vergrösserung von n beliebig klein gemacht werden. *q. e. d.*

Es gilt aber auch die Umkehrung, nämlich das Theorem:

Kann die *Gesamtgrösse* der Intervalle, in denen Schwankungen $> \sigma$ vorkommen, *beliebig klein* gemacht werden, so kommen Punkte, in denen die Function um mehr als σ springt, nur *zerstreut* vor.

Beweis. Erfüllten nämlich diese Punkte mit Sprüngen $> \sigma$ auch nur ein kleines Intervall h , so würde in diesem die Schwankung immer $> \sigma$ sein; und daher die Gesamtsumme der Intervalle, in denen Schwankungen $> \sigma$ vorkommen, jedenfalls nicht $< h$ werden können, was der Voraussetzung widerspricht. *q. e. d.*

II. Wir betrachten analog den Fall der eine Strecke erfüllenden Unstetigkeiten und beweisen den folgenden Lehrsatz:

Wenn Punkte, in denen Sprünge $> \sigma$ stattfinden, eine *Strecke erfüllen*, so kann aus dieser *nirgends ein Intervall herausgenommen werden*, in dem die Schwankung $< \sigma$ wäre.

Beweis. Denn gäbe es ein solches Intervall, in dem die Schwankung $< \sigma$ wäre, und reichte dasselbe von $x = a$ bis $x = a + \varepsilon$, so wäre $f(a + \delta) - f(a + \delta')$ immer numerisch $< \sigma$, wenn δ, δ' in dem Intervall ε liegen. Nun giebt es aber, da die Punkte mit Sprüngen $> \sigma$ die ganze Strecke erfüllen, zufolge der Definition dieses Begriffes, in jedem Intervall, also auch in dem ε , wenigstens einen Punkt $\gamma = a + \gamma$, in dem Sprünge $> \sigma$ stattfinden; d. h. es giebt jedenfalls ein ξ , so dass $f(a + \gamma + \xi) - f(a + \gamma)$ numerisch $> \sigma$ ist, wo γ und $\gamma + \xi$ in jenem Intervalle ε liegen. Setzt man daher $\gamma + \xi = \delta$, $\gamma = \delta'$, so wäre $f(a + \delta) - f(a + \delta')$ numerisch $> \sigma$, was dem Vorigen widerspricht. *q. e. d.*

Es gilt aber auch die Umkehrung, nämlich der Satz:

Wenn in jedem Intervalle einer Strecke die Schwankung $> \sigma$ ist, so ist die *Strecke erfüllt* mit Punkten, in denen Sprünge $> \frac{1}{2} \sigma$ stattfinden.

Beweis. Denn wäre die Strecke nicht erfüllt mit solchen Punkten, so gäbe es in ihr ein Intervall von $x = a$ bis $x = a + \varepsilon$, so dass die Differenzen $f(a + \delta) - f(a)$ und $f(a + \delta') - f(a)$ numerisch $< \frac{1}{2} \sigma$ wären; wenn δ und $\delta' < \varepsilon$ sind. Dann müsste aber $f(a + \delta) - f(a + \delta')$

numerisch $< \sigma$, also die Schwankung in diesem Intervalle $< \sigma$ sein, was der Voraussetzung widerspricht. *q. e. d.*

Die vorstehenden Erläuterungen werden genügend dargethan haben, dass die linear unstetigen Functionen in zwei principiell verschiedene Classen zerfallen:

I. Classe. Die *punktirt unstetigen* Functionen oder solche, welche nur in zerstreuten Punkten linear unstetig sind; genauer gefasst wird ihre Definition so lauten:

Punktirt unstetig heissen solche linear unstetigen Functionen, bei welchen die Punkte mit Sprüngen $> \sigma$ nur *zerstreut* vorkommen und *keine Strecke* erfüllen, wie klein auch die, von Null verschiedene, Grösse σ sei.

Die beiden unter I. entwickelten Sätze lassen sofort erkennen:

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine linear unstetige Function zu den punktirt unstetigen gehört, ist die, dass die Gesamtgrösse aller Intervalle, in denen Schwankungen $> \sigma$ vorkommen, für jedes kleine, aber von Null verschiedene σ , beliebig klein gemacht werden kann.

Insofern diese punktirt unstetigen Functionen sich von denjenigen stetigen Functionen, die eine endliche Anzahl von Unterbrechungen der Continuität besitzen, unterscheiden sollen, müssen sie eine unendliche Anzahl solcher enthalten. Dies kann aber entweder so geschehen, dass die Anzahl der Punkte, in denen Sprünge $> \sigma$ vorkommen, schon für ein endliches σ eine unendliche ist, oder erst mit unendlich abnehmendem σ über alle Grenzen wächst.

Zu der ersten Art gehört die in III. des vor. §. beschriebene Function, sowie überhaupt alle *Functionen*, die aus *stetigen* dadurch entstanden sind, dass eine *unendliche Anzahl zerstreuter Punkte* aus dem *Zusammenhange gerissen* und um endliche Grössen verschoben sind.

Zu der zweiten Art gehört die Function IV. des vor. §., sowie überhaupt *alle* linear unstetigen *Functionen*, welche auf einem *endlichen Intervalle* nur eine *endliche Anzahl Maxima und Minima* haben. Denn betrachten wir z. B. ein Intervall zwischen einem Minimum und einem folgenden Maximum, so werden in diesem entweder nur eine endliche Anzahl von Sprüngen vorkommen — und dann hat man keine linear unstetige Function; oder es ist eine unendliche Menge von Sprüngen vorhanden: da aber durch alle diese nur ein Wachsen um eine endliche Grösse erzielt wird, so können unter den Sprüngen, die sich successive zu den Functionswerthen addiren, nur eine endliche Anzahl solcher vorhanden sein, welche eine beliebige kleine Grösse übertreffen.

Zu dieser Art gehören ferner die in I., II. und III. des § 9. *analytisch* dargestellten Functionen.

Gemeinsam allen Functionen dieser Classe ist folgende sehr bemerkenswerthe Eigenschaft:

Die punktirt unstetigen Functionen sind 1) in *unendlich vielen* Punkten *stetig* und 2) in *unmittelbarer Nähe* jedes Unstetigkeitspunktes *stetig*.

Beweis. 1) Zwischen zwei aufeinanderfolgenden Punkten, in denen Sprünge $> \sigma$ vorkommen, giebt es nach dem Begriffe der punktirt unstetigen Functionen jedenfalls ein Intervall, in dem die Sprünge $< \sigma$ sind. Aus diesem Intervall scheide man die Punkte aus, in denen Sprünge $> \frac{1}{2} \sigma$ vorkommen und fasse zwischen ihnen ein Intervall in's Auge, in dem die Sprünge daher $< \frac{1}{2} \sigma$ sind. So fahre man fort, indem man die Grösse der Sprünge immer halbiert, und aus dem Intervall zwischen Punkten mit Sprüngen $> \left(\frac{1}{2}\right)^n \sigma$ eines in's Auge fasst, in dem die Sprünge $< \left(\frac{1}{2}\right)^n \sigma$ sind. Macht man diese Operation unendlich oft, so wird das übrig bleibende Intervall entweder von endlicher Grösse sein und dann ist das Behauptete erwiesen, oder das Intervall nimmt unendlich ab. In diesem Falle jedoch wird es sich allmählich auf einen Punkt a concentriren, der allen jenen Intervallen gemeinschaftlich ist; um diesen lagern sich, allmählich sich erweiternd, die Intervalle, die von Sprüngen $> \left(\frac{1}{2}\right)^n \sigma$, $> \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \sigma$, $\dots$ frei sind, und es wird daher immer ein Intervall ε angegeben werden können, so dass für alle $\delta < \varepsilon$, $f(a + \delta) - f(a)$ numerisch $< \sigma'$ sei, wie klein auch σ' sei; d. h. aber: die Function ist in a stetig. Ueberdem zeigt diese Constructionsweise des Punktes a , dass es auf jeder endlichen Strecke unendlich viele solcher Punkte giebt.

2) Man fixire einen Punkt $x = a$, in dem Sprünge $> \sigma$ stattfinden; dann suche man den nächsten Punkt $x = a + h$, in dem Sprünge $> \sigma$ vorkommen; in dem dazwischen liegenden Intervalle werden die Schwankungen $< 2\sigma$ und daher die Differenz $f(a + \varepsilon) - f(a + \delta)$ numerisch $< 2\sigma$ sein, wenn $\delta, \varepsilon < h$ sind. Wird nun σ beliebig verkleinert, so wird sich zwar das Intervall h , das den Abstand von a bis zu dem nächsten Punkte mit Sprüngen $> \sigma$ angiebt, verkleinern können, immer aber wird in diesem Intervalle $f(a + \varepsilon) - f(a + \delta)$ numerisch $< 2\sigma$ sein, wie klein man auch die von Null verschiedenen ε und δ annehme. Es nähert sich daher $f(a + \varepsilon)$ einer bestimmten, und zwar nach Voraussetzung von $f(a)$ verschiedenen Grenze und dies giebt nach der in § 2. eingeführten Terminologie obigen Satz. *q. e. d.*

Die punktirt unstetigen Functionen können, wie I. des § 9. zeigt, in den Punkten, in welchen sie stetig sind, *Differentialquotienten* besitzen. Im folgenden Paragraphen wird gezeigt werden, dass ihnen

ein *Integral* unbedingt zukommt, und sie immer in Fourier'sche Reihen entwickelt werden können.

Die Functionen dieser Classe stehen, wie man sieht, in ihrem Verhalten den stetigen nahe, und es könnte bei solchen Functionen, wie I., II., III. des § 9. selbst unpassend erscheinen, sie unendlich oft auf einer endlichen Strecke unstetig zu nennen, da in jeder Strecke nur eine endliche Anzahl von Sprüngen vorhanden ist, die eine beliebige endliche Grösse σ übersteigen.

Die *punktirt* unstetigen Functionen bilden den Uebergang von den nur *punktuell* (in einzelnen Punkten endlicher Anzahl) unstetigen, im Allgemeinen aber stetigen Functionen zu der folgenden Classe, welche alle anderen linear unstetigen Functionen umfasst:

II. Classe. Total unstetige Functionen sind solche, welche in ganzen Intervallen durchaus unstetig sind, oder in strenger Definition:

Total linear unstetig heissen solche Functionen, in denen Punkte mit Sprüngen, die eine gewisse endliche Grösse übertreffen, *ganze Intervalle erfüllen*.

Es versteht sich, dass solche Functionen auch in Intervallen nur *punktirt* unstetig, oder gar stetig sein können; die Sätze, die oben unter II. erwiesen sind, zeigen aber:

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine linear unstetige Function zu den total unstetigen gehört, ist die, dass die Gesamtgrösse aller Intervalle, in denen Schwankungen grösser als eine beliebig kleine Grösse vorkommen, nicht beliebig klein gemacht werden kann, sondern eine bestimmte untere Grenze hat.

Die in I. des vor. § beschriebene Function ist in allen Theilen der betrachteten Strecke total unstetig; die in unendlich vielen Intervallen total unstetige Function II des vor. § ist dagegen in unendlich vielen Strecken sogar stetig.

Ueberall da, wo eine Function total unstetig ist, besitzt sie, wie unmittelbar einleuchtet, *keinen* Differentialquotienten, und, wie im folgenden Paragraphen nachgewiesen werden wird, auch *kein Integral*. Die in Linien total unstetigen Functionen können also den eigentlich analytischen Operationen nicht unterworfen werden: gleichwohl giebt es unter ihnen solche, welche durch einen analytischen Ausdruck dargestellt werden können, wie in IV. des § 9. gezeigt werden wird.

§ 8.

Die Integrale linear unstetiger Functionen.

Während man sich bisher darauf beschränkte, die Existenz von Integralen schlechthin stetiger Functionen mit einer endlichen Anzahl

von Oscillationen allgemein nachzuweisen, so hat Riemann den Begriff des Integrales auch auf linear unstetige erweitert und den feinen Satz bewiesen *):

Die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz eines Integrales

$$\int_a^b f(x) dx$$

ist die, dass die Gesamtgrösse der Intervalle, in denen die Schwankungen der Function $f(x)$ grösser als eine beliebige Grösse σ sind, stets beliebig klein gemacht werden kann.

Es braucht kaum erwähnt zu werden, dass hienach die stetigen Functionen mit unendlich vielen, unendlich kleinen Oscillationen stets ein Integral besitzen.

Es ist jedoch wichtig zu bemerken, dass nach den charakteristischen Eigenschaften der beiden von uns unterschiedenen Classen linear unstetiger Functionen behauptet werden kann:

Die in Linien total unstetigen Functionen sind *niemals*, die punktirt unstetigen *immer* integrabel.

So ist das Integral der in IV. des § 6. beschriebenen Function $f(x)$ aus den Gleichungen:

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx = \frac{1}{2}, \dots \int_{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}^{\left(\frac{1}{2}\right)^n} f(x) dx = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}$$

leicht zu finden. Es ist nämlich z. B.

$$\int_{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}^1 f(x) dx = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} = \frac{2}{3} \left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} \right]$$

Bei punktirt unstetigen Functionen kann stets die Summe der Intervalle, in denen Schwankungen grösser als eine beliebig kleine Grösse σ vorkommen, und daher auch der Beitrag, den diese Intervalle zum Integrale leisten, beliebig verkleinert werden. Findet also in $x=a$ ein Sprung $> \sigma$ statt, so fällt dieser Punkt in eines jener Intervalle, deren Beitrag zu dem Integrale verschwindend klein ist, und es ist daher der Functionswerth $f(a)$ selbst auf das Integral ohne Einfluss, wie denn z. B. das Integral der in III. des § 6. beschriebenen Function $f(x)$

$$\int_0^x f(x) dx = x$$

*) Ueb. d. Darstellb. art. 5.

ist, was auch x sei, trotz der unendlich vielen aus dem Zusammenhange gelösten Punkte. Das Integral ist unabhängig von den Unstetigkeiten, welche durch Abänderung des Functionswerthes in einzelnen Punkten hebbar sind. Dagegen ist das Integral wesentlich bestimmt durch die Grenzwerte, denen sich nach pag. 90, $f(a \pm \delta)$ mit abnehmendem δ annähern; also:

Das Integral einer punktirt unstetigen Function ist unabhängig von den Werthen in den Unstetigkeitspunkten selbst, dagegen nicht unabhängig von den Werthen in unmittelbarer Nähe derselben.

Durch das Integral $f_1(x)$ einer punktirt unstetigen Function

$$f_1(x) = \int_a^x f(x) dx$$

ist eine Function $f_1(x)$ vollkommen eindeutig bestimmt. Um ihre Stetigkeit zu untersuchen, betrachte man:

$$f_1(a + \varepsilon) - f_1(a) = \int_a^{a+\varepsilon} f(x) dx = \varepsilon M,$$

wo M einen Mittelwerth bezeichnet zwischen dem grössten und kleinsten Werthe, den $f(x)$ in dem Intervalle von $x = a$ bis $x = a + \varepsilon$ annimmt, von den particulären Werthen der $f(x)$ in den Unstetigkeitsstellen selbst abgesehen. Sind κ und h echte Brücke und bezeichnet σ die Schwankung in diesem Intervalle, so kann man $M = f(a + \kappa \varepsilon) + h \sigma$ setzen, und es ist:

$$\frac{f_1(a + \varepsilon) - f_1(a)}{\varepsilon} = f(a + \kappa \varepsilon) + h \sigma.$$

Nimmt nun ε unendlich ab, so verkleinern sich die Sprünge σ in dem Intervall unendlich; denn ist a einer jener Punkte, in denen $f(x)$ stetig ist, so leuchtet dies von selbst ein; ist aber $x = a$ ein Unstetigkeitspunkt, so ist doch (s. pag. 90) die Function in seiner unmittelbaren Nähe stetig, und es nähert sich die Schwankung σ im Intervalle ε , aus dem der Punkt $x = a$ selbst ausgeschlossen ist, mit abnehmendem ε ebenfalls der Null.

Somit ist in beiden Fällen die Function $f(x)$ stetig und

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f_1(a + \varepsilon) - f_1(a)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(a + \varepsilon);$$

d. h. der Differentialquotient dieser stetigen Function $f_1(x)$ ist im Punkte $x = a$ gleich dem Grenzwerte, dem sich $f(a + \varepsilon)$ oder $f(a - \varepsilon)$ nähert, je nachdem er nach rechts oder links hin genommen wird.

Ist die Unstetigkeit in einem Punkte $x = a$ nicht durch Abänderung des Functionswerthes $f(a)$ zu heben und nähern sich also

$f(a + \varepsilon)$ und $f(a - \varepsilon)$ verschiedenen Grenzen, so ist $f_1(x)$ eine stetige Punktfolge von der Eigenthümlichkeit, dass in unendlich vielen Punkten, die sich von links und rechts her treffenden *Zweige einen Winkel* mit einander *einschliessen*. (Vergl. p. 76.) Doch bleibt bei den Integralen aller in § 6. und 9. gegebenen punktirt unstetigen Functionen, die Anzahl der Punkte, in denen die Zweige einen Winkel $> \sigma$ mit einander machen, endlich, wie klein auch σ sei.

Aus der Integrabilität der punktirt unstetigen Functionen folgt nach Riemann's*) Kriterien der Satz:

Jede punktirt unstetige Function, welche in ihren Unstetigkeitspunkten das arithmetische Mittel der beiden Grenzwerte in unmittelbarer Nähe darstellt, ist in eine Fourier'sche Reihe mit unendlich abnehmenden Coefficienten entwickelbar.

Dieser Satz ist für unseren Zweck besonders deshalb wichtig, weil er die *analytische* Darstellbarkeit aller *möglichen* punktirt unstetigen Functionen beweist, die den angegebenen Charakter in den Unstetigkeitspunkten haben.

Als Beispiel mag nur die Function IV. des § 6. dienen, die in die Reihe:

$$f(x) = \sum A_p \sin p\pi x$$

entwickelt, die Coefficienten:

$$A_p = -\frac{2}{p\pi} \left\{ (-1)^p - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cos \frac{p\pi}{2^n} \right\}$$

besitzt, wenn für $x = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, $f(x) = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ genommen wird.

§ 9.

Analytische Darstellung linear unstetiger Functionen.

Das Princip der Condensation von Singularitäten liefert uns die mannigfachsten linear unstetigen Functionen; zunächst *punktirt* unstetige:

I. Es sei $\varphi(y)$ eine, von $y = -1$ bis $y = +1$ für alle Argumente, mit Ausnahme des Punktes $y = 0$, stetige und nach dem Taylor'schen Satze entwickelbare Function, die, wenn y sich dem Punkte $y = 0$ von der rechten Seite her nähert, die Grenze $+1$ erreicht, während sie für negative, zu Null werdende y den Grenzwert -1 hat.

Analytisch kann, wie bekannt, jede solche Function in eine nach

*) A. a. O. art. 10.

dem Modul 2π periodische Sinusreihe entwickelt, oder durch ein Fourier'sches Integral dargestellt werden.

Die aus $\varphi(y)$ abgeleitete Reihe:

$$f(x) = \sum \frac{\varphi(\sin nx\pi)}{n^s}$$

ist dann für alle *irrationalen* x stetig und besitzt in diesen Punkten sogar einen *Differentialquotienten*.

Für *rationale* $x = \frac{\nu}{\mu}$ in ihrer reducirten Form ist von solchen Gliedern, welche sich mit abnehmendem ε der Null nähern, abgesehen:

$$f\left(\frac{\nu}{\mu} + \varepsilon\right) - f\left(\frac{\nu}{\mu}\right) = \frac{1}{\mu^s} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r\nu}}{r^s},$$

wenn wir statt $\varphi(\pm r\mu\varepsilon\pi)$ sogleich den Werth ± 1 , je nachdem $r\nu$ gerade oder ungerade ist, einsetzen. Ferner ist:

$$f\left(\frac{\nu}{\mu} - \varepsilon\right) - f\left(\frac{\nu}{\mu}\right) = -\frac{1}{\mu^s} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r\nu}}{r^s}.$$

Die Function ist also in diesen Punkten so unstetig, dass sie, je nachdem man von $x = \frac{\nu}{\mu}$ nach der positiven oder negativen Seite fortschreitet, um dieselbe Grösse steigt oder fällt; ihr Werth in jedem solchen Unstetigkeitspunkte ist also das arithmetische Mittel der beiden Werthe, denen sie sich beiderseits annähert. Die Sprünge sind an den Punkten $x = \frac{\nu}{\mu}$ mit geradem Zähler andere als an denen mit ungeradem. Denn sie sind an jenen $= \frac{1}{\mu^s} L$, an diesen $= \frac{1}{\mu^s} L'$, wo

$$L = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^s}, \quad L' = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r+1}}{r^s} = \left(1 - \frac{1}{2^{s-1}}\right) L.$$

Der Verlauf der Function $f(x)$ kann nun, wenn s beträchtlich gross genommen wird, etwa so beschrieben werden: Die Werthe der Function $f(x)$ sind von denen der stetigen Function $\varphi(\sin x\pi)$ nicht beträchtlich verschieden, und es bestimmt also $\varphi(\sin x\pi)$ den ungefähren Verlauf der Punktreihe, welche $f(x)$ darstellt. In allen irrationalen Punkten x gleicht $f(x)$ einer stetigen Curve und besitzt einen Differentialquotienten. Nähert man sich aber von links her einem rationalen Werthe $x = \frac{\nu}{\mu}$ mit geradem Zähler ν , so springt, wenn man zu diesem Werthe selbst gelangt, die Function plötzlich um $\frac{1}{\mu^s} L$ in die Höhe; und lässt man sich x weiter nach der positiven Seite

bewegen, so tritt nochmals ein Sprung von derselben Grösse ein. Nähert man sich dagegen einem $x = \frac{\nu}{\mu}$ mit ungeradem Zähler, so stürzt $f(x)$ plötzlich um $\frac{1}{\mu^s} L$ abwärts, und zeigt denselben Abfall nochmals, wenn man weiter vorwärts geht.

Die grössten Sprünge finden statt in $x = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}$ u. s. f.; je mehr μ wächst, d. h. in je weniger einfachen Zahlen der rationale Werth x ausgedrückt werden kann, um so kleiner sind die Sprünge. Wenn man sich von dem Verlaufe von $f(x)$ durch eine Zeichnung eine Vorstellung verschaffen will, so wird man bald an die Grenze kommen, von wo an die Sprünge nicht mehr sichtbar sind. Denn es giebt nur eine endliche, bestimmte Anzahl von Punkten, in denen Sprünge $> \sigma$ vorkommen, wie klein auch σ sei; man kann dieselben aus $\frac{1}{\mu^s} L > \sigma$

bestimmen; sie entsprechen den $\mu < \left(\frac{L}{\sigma}\right)^{\frac{1}{s}}$, welcher Bedingung stets, so lange σ von Null verschieden, nur eine endliche Anzahl von ganzen Zahlen μ genügen.

Je näher das rationale $x = \frac{\nu}{\mu}$ einer irrationalen Zahl kommt, um so grösser werden ν, μ , also um so kleiner die Sprünge, und es ist hieraus begreiflich, wie $f(x)$ in irrationalen Punkten den Charakter einer stetigen Function annehmen kann: Die Werthe von $f(x)$ bilden keinen eigentlichen Curvenzug, sondern eine aufgelöste Reihe von Punkten, welche sich jedoch um die irrationalen x so zusammendrängen, dass sie für ein unendlich kleines Intervall in deren Umgebung als eine stetige Punktfolge angesehen werden können.

II. Man verstehe unter $\varphi(y)$ eine Function, welche sich ebenso verhält, wie die unter I., nur dass sie auch in $y = +1$ und $y = -1$ verschwindet und in unmittelbarer Nähe jener Punkte die Grenzwerte $+1$ und -1 hat. Beispiele solcher Functionen geben die periodischen Reihen, z. B.

$$\varphi(y) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)y\pi}{2n+1}$$

In diesem Falle hat die abgeleitete Function:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(\sin n x \pi)$$

etwas complicirtere Unstetigkeiten. In irrationalen und solchen rationalen $x = \frac{\nu}{\mu}$ in denen μ ungerade ist, verhält sie sich, wie die vorhin betrachtete; in den Punkten $x = \frac{\nu}{2\mu}$ aber ist:

$$f\left(\frac{\nu}{2\mu} \pm \varepsilon\right) - f\left(\frac{\nu}{2\mu}\right) = \pm \frac{1}{\mu^s} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^r}{(2r)^s} + \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(\nu-1)}}{\mu^s} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{(2r+1)^s},$$

wie man bei näherer Betrachtung leicht finden wird; und es ist nicht, wie bisher, $f\left(\frac{\nu}{2\mu}\right)$ das arithmetische Mittel der beiden benachbarten Sprungwerthe.

III. Das Quadrat einer Function, wie sie in I. angenommen wurde, also etwa von:

$$\varphi(y) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)y}{2n+1}$$

ist eine zwischen $-\pi$ und $+\pi$ den Werth $+1$ repräsentirende Function, welche *nur* in dem Punkte $y=0$ eine plötzliche *Unstetigkeit* zeigt, die durch Abänderung eines einzigen Functionswerthes hebbbar wäre*).

Bildet man nun:

$$f(x) = \sum \frac{[\varphi(\sin nx\pi)]^2}{n^s},$$

so unterscheidet sich $f(x)$ in allen irrationalen Punkten x nicht von der Constanten:

$$L = \sum \frac{1}{n^s};$$

nur in den rationalen Punkten $x = \frac{\nu}{\mu}$ stürzt sie plötzlich um $\frac{1}{\mu^s} L$ herab. Die stetige Punktfolge ist also nur in diesen unendlich vielen Punkten unterbrochen und könnte durch Abänderung der Functionswerthe in diesen Punkten zu einer stetigen gemacht werden.

IV. Was nun die in Strecken *total* unstetigen Functionen betrifft, so lässt der Umstand, dass sie den analytischen Operationen des Differentiirens und Integrirens niemals unterworfen werden können, die Vermuthung aufsteigen, dass sie sich der Darstellung durch analytische Formen entziehen möchten und hier die Grenze sei, welche die den Analytiker interessirenden Functionen von den transcendenten, d. h. als möglich nur denkbaren trenne. Diese Ansicht bestätigt sich jedoch nicht, denn ich hoffe ein einwurfsfreies Beispiel**) einer total unstetigen

*) Wir haben, wie ausdrücklich bemerkt werden mag, in $[\varphi(y)]^2$ ein Beispiel einer *analytisch* darstellbaren Function, welche jene Singularität zeigt.

**) Zwar sind schon von Riemann (Ueb. d. Darst. art. 13) in den Formeln:

$$\sum \frac{(nx)}{n}, \quad \sum \frac{1}{n} \cos(n^2x), \quad \sum \frac{1}{n} \sin(n^2x)$$

Beispiele von Functionen gegeben, welche zwischen zwei noch so nahen Werthen

Function durch eine Modification des Principis der Condensation gefunden zu haben:

Bedeutet nämlich φ dieselbe Function, als zuvor (unter Nr. III.), so ist:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \left[\frac{1}{\varphi(\sin nx\pi)} \right]^2$$

eine Function, welche für alle irrationalen x den Werth

$$L = \sum \frac{1}{n^s}$$

besitzt; für alle rationalen Werthe von x aber unendliche Glieder in sich befasst, welche, da sie sämmtlich positiv sind, sich nicht gegenseitig zerstören können; die Function ist also für alle rationalen x unendlich gross. Wenn wir jedoch unendliche Werthe der Function auch hier ausschliessen wollen, so haben wir in dem Quotienten

$$f(x) = \frac{\sum \frac{1}{n^s}}{\sum \frac{1}{n^s} \left[\frac{1}{\varphi(\sin nx\pi)} \right]^2}$$

eine für alle Werthe des Argumentes x völlig *bestimmte total unstetige* Function, welche für alle *irrationalen* x den Werth 1, für alle *rationalen* x den Werth 0 besitzt.

Ein anderes weniger einfaches Beispiel einer solchen total unstetigen Function ist in der II. Note im Anhang behandelt worden.

§ 10.

Schlussbetrachtungen zur Feststellung des Functionsbegriffes.

Blicken wir nun auf das durchwanderte Gebiet zurück, und fragen wir, welchen Nutzen unsere Untersuchungen für die Aufklärung des Functionsbegriffes gebracht haben.

Es war von vornherein gewiss, dass wenn wir den Dirichlet'schen Begriff der Function zu Grunde legen, es allgemeine Eigenschaften aller Functionen, die unter denselben fallen, nicht geben kann.

des Argumentes unendlich oft aus dem Endlichen in's Unendliche überspringen. Da aber dort nur von rationalen Werthen von x die Rede ist, so bleibt es zweifelhaft, ob nicht die Reihen für irrationale in einer Weise divergiren, dass sie keinen bestimmten Werth mehr repräsentiren. Indem ich aber Unbestimmtheiten der Functionen von meinen Untersuchungen vorläufig ganz ausschliessen zu sollen glaubte, lege ich einiges Gewicht darauf, dass in der im Texte gegebenen Reihe jede Unbestimmtheit beseitigt ist, indem sie aus einer Reihe lauter positiver Glieder besteht, deren Summe entweder endlich und bestimmt, oder unendlich gross ist.

Aber man ist geneigt, zu vermuthen, dass wenn der ältere Euler'sche Begriff zu Grunde gelegt, und unter einer Function nur eine in Rechnungsoperationen gesetzmässig dargestellte Grössenbeziehung verstanden wird, die so definirten Functionen einen engeren, in sich organisch abgeschlossenen Kreis bilden möchten, dem eine Anzahl gemeinsamer Eigenschaften allerdings zukäme, in's Besondere: die Stetigkeit, die Differentiirbarkeit, die Integrabilität, Bestimmtheit und Entwicklungsfähigkeit nach dem Taylor'schen Lehrsatz — bei allen diesen Eigenschaften einzelne singuläre Punkte angenommen. Diese Vermuthung hat sich *nicht* bestätigt. Wir haben gezeigt, dass es durch convergente Reihen von Grössenoperationen möglich ist, Functionen darzustellen, welche in unendlich vielen Punkten eines endlichen Linienstückes unstetig oder unendlich in der verschiedensten Weise, oder unbestimmt*) werden, welche nirgends integrirt und in Potenzreihen entwickelt werden können, und welche selbst, wo sie stetig sind, einen bestimmten Differentialquotienten nicht besitzen. Kurz: Jene beiden Begriffe der Functionen, so verschieden sie auf den ersten Blick zu sein scheinen, haben sich insofern wesentlich verschieden nicht erwiesen, als wir Functionen aller möglichen Arten**) durch analytische Formeln darzustellen im Stande waren.

Beide Begriffe sind somit unzureichend, um die Grundlage einer allgemeinen Theorie der Functionen bilden zu können. Denn die Aufgabe aller Mathematik ist die, aus gegebenen Relationen, die sich auf ein Gebiet von Objecten beziehen, neue abzuleiten, indem man dabei die allgemeinen Eigenschaften des Begriffes, dem alle jene Objecte unterstehen, zur Anwendung bringt. Sind aber solche allgemeinen Eigenschaften nicht vorhanden, so bleibt jede Transformation der gegebenen Relationen eine leere Tautologie.

*) Die Functionen, welche in einzelnen Punkten oder gar Linien *unbestimmt* werden, haben wir aus unseren obigen Betrachtungen ausgeschlossen, und es mag daher hier bemerkt werden, dass solche in analytischer Darstellung mittelst des Principes der Condensation

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(\sin nx\pi)}{n^s}$$

leicht gegeben werden können, wenn $\varphi(y)$ eine für $y=0$ nicht unbestimmt scheinende, sondern *wirklich* und *nothwendig unbestimmte* Grösse ist. Setzt man z. B.

$$\varphi(y) = \sin \frac{1}{y}, \quad \text{oder} \quad \varphi(y) = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{y}}},$$

so ist $f(x)$ für alle irrationalen x bestimmt und endlich, für rationale x aber durchaus unbestimmt.

**) Dies ist cum grano salis zu verstehen; denn es ist noch nicht ausgemacht, ob sich einzelne *denkbare* Fälle nicht doch der Analysis entziehen.

So, wenn es sich z. B. darum handelte, eine Function $f(x)$ aus der Functionalgleichung:

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

abzuleiten, so ergibt sich sofort für alle rationalen μ :

$$f(\mu) = \mu f(1);$$

ebenso können alle Functionswerthe für Argumente $\mu\xi$, welche rational von einer und derselben irrationalen Grösse ξ abhängen, durch den Functionswerth $f(\xi)$ dargestellt werden, indem $f(\mu\xi) = \mu f(\xi)$. Auch stehen die Functionswerthe für rationale und irrationale Werthe des Argumentes, und letztere unter einander vielfach in Zusammenhang, durch Gleichungen wie z. B.

$$f(2 + \sqrt{3}) + f(2 - \sqrt{3}) = f(4)$$

u. s. w. Trotzdem ist, soviel ich sehe, es nicht möglich, direct anzugeben, wie $f(\xi)$ von seinem Argumente abhängt; denn die verschiedenen Werthreihen für die wesentlich verschiedenen Irrationalitäten, z. B. $f(\mu\sqrt{2})$, $f(\mu\sqrt{5})$, $f(\mu\sqrt[3]{2})$ u. s. w. stehen ausser Zusammenhang mit einander; und, wie es auch sei, es liegt jedenfalls nicht in der Absicht eines Analytikers, der auf jene Functionalgleichung bei seinen Untersuchungen stösst, in diese intricaten Verhältnisse der Irrationalitäten einzugehen. Man wird vielmehr die Bestimmung $f(\mu) = \mu f(1)$ sofort auch für irrationale μ in Anspruch nehmen, d. h.:

Macht man die Voraussetzung, die Function solle überall stetig sein (oder die engere, $f(y)$ solle sich in unendlicher Nähe von $y = 0$ stetig der Null nähern, von der dann die allgemeine Stetigkeit die Folge ist), so ist das Problem mit einem Schlage gelöst, indem die Functionswerthe für irrationale x sich zwischen die $f(x) = xf(1)$ für rationale x stetig einordnen.

Oder ein anderes Beispiel: Es sei eine Function für alle Werthe von x zwischen 0 und 1 durch die unendliche Reihe

$$f(x) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

gegeben; welche Werthe hat $f(x)$ für andere x ? Diese Frage ist schlechterdings nicht zu beantworten, so lange wir den Dirichlet'schen Functionsbegriff zu Grunde legen, weil eben gar kein Zusammenhang zwischen den benachbarten Functionswerthen besteht, mit anderen Worten: weil eine Function bisher nicht ein *Gesetz* repräsentirt, sondern ihre Werthe ganz willkürlich aufeinanderfolgen.

Ein *Gesetz* ist überall da vorhanden, wo aus einer Reihe von Merkmalen auf das Vorhandensein anderer; nicht gegebener oder beobachteter geschlossen wird. Die Function unter unserem bisherigen Begriffe, der rein nominell und ohne realen Inhalt ist, sind daher

gesetzlos, *illegitim* zu nennen; sie können aber zu *legitimen* werden, indem sie sich einem Gesetze unterordnen.

Welches soll nun das Gesetz sein, dem diese Functionen unterworfen werden? Es hält nicht schwer, sich zu überzeugen, dass, soll anders der Functionsbegriff angemessen sein und den Bedürfnissen des Analytikers entsprechen, wir uns des allgemeinen hodegetischen Principes bedienen müssen, das ich bereits in meiner Theorie der complexen Zahlen als das jedes systematischen Fortschrittes für jenes Gebiet nachgewiesen, und das *Princip der Permanenz formaler Gesetze* genannt habe*).

Ich bin dort von den ganzen Zahlen und den auf sie bezüglichen elementaren Rechnungsoperationen ausgegangen, und zeigte, wie man von diesen aus das Zahlengebiet allmählich erweitert, indem man zur Auflösung von Aufgaben, die in dem bekannten Gebiete unrealisirbar sind, neue Zeichen, Zahlen einführt, welche denselben formalen Operationsgesetzen, als die 4 Species sie enthalten, unterliegen. Nachdem so das Gebiet bis auf das der gemeinen complexen Zahlen erweitert war, wurde nachgewiesen, dass jede Aufgabe, welche nur eine endliche Anzahl jener Operationen zu ihrer Aufstellung voraussetzt, in dem Gebiete der gemeinen complexen Zahlen ihre Lösung findet, und so ein organischer Abschluss in diesem Zahlengebiete gefunden wird. Gleichwohl waren noch andere complexe Zahlensysteme *möglich*, welche theilweise anderen formalen Gesetzen folgten, und es war nöthig, dies festzustellen, weil nur dadurch die Eigenthümlichkeit der gemeinen complexen Zahlen in helles Licht gesetzt wurde.

In ähnlicher Weise nun, als für das System der Zahlen (oder Grössen) die ganzen Zahlen und Operationsgesetze typisch waren, und weiterhin für permanent erklärt wurden, so müssen nun für das System der Functionen die algebraischen Ausdrücke, als die aus den vier Species direct abgeleiteten, die permanenten Gesetze an die Hand geben. Denn wie dort die ganzen Zahlen gewissermassen das Gerüst bilden, auf das mehr oder weniger direct alle anderen Zahlen gestützt werden, so sind die algebraischen Functionen, als die, deren Werthe *eigentlich* berechnet werden können, die typischen Formen für Functionen im Allgemeinen, die, insofern sie eben Grössenbeziehungen darstellen, und sich daher *berechnen* lassen sollen, ebenfalls durch die vier Elementaroperationen ausgedrückt werden müssen; nur werden diese transcendenten Functionen durch eine endliche Reihe von Operationen nicht erschöpft, sondern bedürfen eines unendlichen Processes.

Die so nach dem Typus algebraischer ganzer und gebrochener

*) Vorles. üb. d. complexen Zahlen und ihre Functionen. Leipzig 1867. Th. I. p. 10—13.

Ausdrücke gebildeten transcendenten Functionen entsprechen nun in gewisser Weise den irrationalen und gemeinen complexen Zahlen, die nach dem Typus der ganzen und rational gebrochenen Zahlen gebildet sind; und ebenso, wie es unendlich viele Classen z. B. von irrationalen Grössen giebt, so auch unendlich viele Classen transcendenten Functionen.

Wie ferner höhere complexe Zahlen gedacht und construirt werden können, die sich den formalen Gesetzen der Arithmetik nicht unterordnen*), so auch *illegitime* Functionen, welche sich nicht an den Typus algebraischer Formen anlehnen. Ganz ebenso aber, wie die Betrachtung dieser höheren Zahlensysteme ein systematisches Bedürfniss war, um sich einerseits erfahrungsmässig von der Möglichkeit derselben, andererseits davon zu überzeugen, dass der Begriff der gemeinen complexen Zahlen den allgemeinen Begriff der Zahl keineswegs erschöpfe, so ist auch die thatsächliche Nachweisung der Existenz von Functionen der illegitimsten Arten, wie ich sie in dieser Abhandlung zu geben versucht habe, nothwendig gewesen, um unzweifelhaft darzuthun, dass die Legitimität der Functionen uns keineswegs von einer mysteriösen, eisernen Nothwendigkeit dictirt wird, die in der „Natur der Sache“ liegt, wie man häufig hören kann, sondern dass sie eine conventionelle, aber weise und adäquate Beschränkung ist, die wir uns auferlegen, — und über deren Grenzen wir eben desshalb noch nicht im Reinen sind.

Wenn es sich nämlich nun darum handelt, das bestimmte System der Bedingungen aufzustellen, welches über die Legitimität der Functionen entscheidet, so werden wir dasselbe zunächst so wählen, dass es mit den Voraussetzungen, die man zuweilen bewusst, meistens unbewusst, bei analytischen Untersuchungen zu machen pflegt, übereinstimmt, und nennen

legitime Functionen solche, welche für alle reellen Werthe des Argumentes, mit Ausnahme einzelner, auf jedem endlichen Intervall in niemals unendlicher Zahl vorhandener Punkte, bestimmt, endlich und stetig sind, und deren sämmtliche Differentialquotienten dieselben Eigenschaften besitzen.

Solche Functionen sind aber nach dem Taylor'schen Satze immer entwickelbar, d. h. es lässt sich stets ein Intervall für x angeben, in dem die Entwicklung von $f(a + x)$ nach aufsteigenden Potenzen von x convergirt, so lange a nicht mit einem der Punkte zusammenfällt, in dem die Function oder einer ihrer Differentiatquotienten unbestimmt, unendlich oder unstetig wird. Die Werthe einer Function sind daher zwischen zwei Unstetigkeitspunkten immer in der Weise mit einander verbunden, dass, wenn nur die Functionswerthe für das kleinste end-

*) Ibid. p. 99.

liche Intervall bekannt sind, sie für die ganze Strecke mit Nothwendigkeit bestimmt sind. Sind in einer solchen Strecke für zwei endliche Intervalle zwei Reihen von Werthen gegeben, so kann es niemals zweifelhaft sein, ob sie zu derselben Function gehören, oder nicht.

Wie steht es aber mit der Fortsetzung einer solchen Function über jene Unstetigkeitspunkte? Die Taylor'schen Reihen reichen über diese nicht hinaus, und es bleibt gänzlich unbestimmt, was wir unter einer, zwischen zwei Unstetigkeitspunkten völlig bestimmten Function ausserhalb dieser Strecke verstehen sollen. Jene Punkte trennen, wie Barrieren, die verschiedenen Strecken, und es kann nach der gegebenen Definition nicht entschieden werden, ob zwei, durch einen solchen Punkt getrennte Werthreihen zu einer und derselben Function gehören, oder nicht.

In welcher Weise man durch Einführung eines neuen Principes diese Hindernisse zu überwinden versucht hat, ist schon oben p. 66 gezeigt; eine unzweideutige und annehmbare Form ist aber diesem Principe weder jemals gegeben worden, noch dürfte sie sich überhaupt finden lassen.

Die Wissenschaft musste andere Mittel suchen, um die Functionen über jene Unstetigkeitspunkte hinaus fortzusetzen; und man entdeckte, dass man, anstatt diese Punkte gewissermassen zu *überspringen*, sie vielmehr *umgehen* könne, indem man die Variabeln nicht nur reelle, sondern auch *complexe* Werthe durchlaufen lässt.

Ist hiedurch dargethan, dass man bei der Beschränkung der Variabilität auf reelle Werthe des Argumentes zu einer, die Bedürfnisse der Analyse befriedigenden Definition der Function nicht gelangen kann, so ist damit das Ziel erreicht, das wir uns in dieser Abhandlung gesteckt haben.

Sind wir aber einmal im Gang, so wird es erlaubt sein, noch einige Schritte weiter zu thun, um eine Perspective in das neue Gebiet zu gewinnen.

Eine Function w zweier Variabeln x, y wird dann als die Einer Veränderlichen ($x + yi$) angesehen werden können, wenn sie sich in eine Form bringen lässt, dass x und y in ihr nur in der Verbindung ($x + yi$) erscheinen. Diese vorläufige Definition hat nur dann eine Bedeutung, wenn die Function nach dem Typus algebraischer Functionen gebaut ist, d. h. aus ihren Veränderlichen durch die vier arithmetischen Grundoperationen abgeleitet. Sie hat dann, wenn ihre Differentialquotienten überhaupt bestimmt sind, die Eigenschaft, dass

$$i \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Während nun jene Definition ihre Bedeutung verliert, wenn w nicht durch arithmetische Operationen bestimmt wird, so behält diese Gleichung

chung ihre Bedeutung in jedem Falle; und wir definiren nun eine Function w zweier Veränderlichen x, y als eine *monogene* Function der complexen Veränderlichen $(x + yi)$, indem wir letztere Eigenschaft für permanent erklären.

Damit ist aber zugleich gesetzt, dass jene Differentialquotienten $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$ überhaupt existiren, einen bestimmten und endlichen Werth haben; denn hätten die Quotienten der Incremente von w und x, y innerhalb eines endlichen Stückes der Ebene, in welcher die complexe Veränderliche $(x + yi)$ dargestellt wird, keine bestimmten und endlichen Grenzwerte, so liesse sich in demselben gar nicht constatiren, ob die Function als die einer complexen Variablen angesehen werden kann. So ergiebt sich die Voraussetzung, dass w eine legitime Function im Allgemeinen bestimmte und endliche Differentialquotienten hat, als eine fundamentale, und wir definiren nun:

Eine monogene Function von $(x + yi)$ heisst eine veränderliche complexe Grösse w , wenn sie sich mit x und y so ändert, dass im Allgemeinen, d. h. abgesehen von einzelnen Punkten und Linien, die Differentialquotienten $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$ überall bestimmt und endlich sind und der Bedingung

$$i \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y}$$

genügen.

Dies ist nun das allgemeine einfache Gesetz, dem alle legitimen, d. h. monogenen Functionen untergeordnet werden, und das wir als die Riemann'sche Definition*) zu bezeichnen haben. Da nach bekannten Sätzen mit der Endlichkeit, Stetigkeit und Bestimmtheit der Function selbst und ihrer ersten Differentialquotienten dieselben Eigenschaften auch für alle anderen Differentialquotienten gesetzt sind, so kann eine monogene Function immer nach dem Taylor'schen Lehrsatz entwickelt werden, und die obige Bestimmung der im reellen Gebiete stetigen Function erscheint jetzt unserer neuen Definition untergeordnet.

Nun erst gewinnt das Problem, eine für eine endliche Strecke oder innerhalb eines endlichen Flächenstückes gegebene Function fortzusetzen, d. h. für alle Punkte der ganzen Ebene zu bestimmen, eine feste Bedeutung, wenn man eben die Function obiger Bedingung unterwirft. Nun stehen die Functionswerte für die verschiedenen Argumente in unlöslicher Verbindung mit einander und es wird nicht zweifelhaft sein, ob zwei in verschiedenen Theilen der Ebene gegebene Werthreihen zu derselben Function gehören, — wenn sich nicht jetzt, wo

*) Grundl. f. e. all. Th. p. 2.

wir jene, die Fortsetzung im reellen Gebiete störenden, und alle anderen Unstetigkeitspunkte, leicht umgehen können, neue Barrieren erheben, in Gestalt von *Linien*, in denen die Function aufhört, bestimmt, endlich und stetig zu sein. Obgleich wir nämlich Unstetigkeiten, die über ganze Flächenstücke ausgedehnt sind, durch obige Definition der Monogenität ausgeschlossen haben, so konnten wir nicht umhin, Unstetigkeiten in Punkten und Linien zuzulassen, wenn sie sich mit Nothwendigkeit aus dem Verlaufe der Function in ihren stetigen Theilen ergeben. Dass solche Linien, in denen die Function punktirt oder gar total unstetig ist, trotz der Monogenität in der That vorkommen, ist im Anhang (Note III.) gezeigt, und zwar scheidet in den angeführten Beispielen diese Unstetigkeitslinie als Kreis den inneren Raum, in dem die Function zunächst festgestellt gedacht wird, in der Weise von dem äusseren ab, dass beide durch keinen Flächenstreifen von endlicher Breite, in dem die Function die zur legitimen Fortsetzung nothwendigen Eigenschaften hätte, mit einander zusammenhängen.

Die Function ist dann auf die innere Kreisfläche beschränkt, sie verliert für Punkte ausserhalb des Kreises ihre Bedeutung, d. h. unser Functionsbegriff giebt keinerlei Aufschluss darüber, was wir uns unter Functionswerthen im äusseren Raume zu denken haben.

Es ist nun aber in der Note III. das merkwürdige Factum hervorgehoben, dass es trotzdem analytische Entwicklungen solcher Functionen geben kann, welche auch ausserhalb ihre Bedeutung nicht verlieren, sondern innerhalb und ausserhalb des Kreises in gleicher Weise gebildet, und mit Ausnahme jener Kreisperipherie überall convergent und monogen sind.

Insofern man nun solchen Entwicklungen, welche zu beiden Seiten der geschlossenen Unstetigkeitslinien dieselben bleiben, die Kraft nicht absprechen kann, die innerhalb gegebene Function auch ausserhalb des Kreises zu repräsentiren, so erhebt sich die Frage:

In welchem Sinne sind diese beiden, durch eine unübersteigliche Schranke getrennten Werthreihen als zu Einer Function gehörig anzusehen?

Note I (zu pag. 71).

Begriff der Grenze.

Gegenüber den häufig mangelhaften, theils zu viel, theils zu wenig enthaltenden Definitionen des in unsere Untersuchungen tief eingreifenden Begriffes der „Grenze“, glaube ich hier seine strenge Bestimmung in aller Kürze geben zu sollen, indem ich in Bezug auf die Begründung

des Folgenden auf eine andere kleine Arbeit von mir verweise*). Der Begriff Function ist hier im Sinne von § 1. zu nehmen:

Wenn es für eine Function $f(x)$ eine bestimmte endliche Grösse A giebt, und ein Intervall von dem festen Punkte $x = a$ aus bis $x = a + \varepsilon$ für jedes beliebig kleine σ bestimmt werden kann, so dass die Differenz $A - f(a + \delta)$ jene Grösse σ numerisch nicht übersteigt, während δ alle innerhalb jenes Intervalles 0 bis ε liegenden Werthe, $\delta = 0$ ausgeschlossen, durchläuft, so heisst A die *Grenze*, welcher sich $f(a + \delta)$ mit unendlich abnehmendem δ unendlich annähert.

Wird hierin ε positiv vorausgesetzt, so habe ich, indem ich $f(x)$ als Ordinate zu der Abscisse x construirt denke, A die Grenze genannt, welcher sich $f(x)$ nähert, wenn man von rechts her zu dem Punkte $x = a$ gelangt. Die Grenze, der sich $f(a - \delta)$ nähert, nenne ich die Grenze auf der linken Seite.

Wenn es dagegen *keine* bestimmte endliche Grösse A giebt, so dass die Differenz $A - f(a + \delta)$ für *alle* von Null verschiedenen $\delta < \varepsilon$ *immer* numerisch kleiner, als eine beliebig kleine Grösse σ bleibt, wie klein man auch ε bestimmen möge, so sagen wir, es nähere sich $f(a + \delta)$ für unendlich abnehmende δ *keiner* Grenze.

In vielen, und zwar in den meisten uns oben interessirenden Fällen ist es nicht möglich, jene Grenzwerte, denen sich Functionen annähern, ihrer wirklichen Grösse nach zu bestimmen; vielmehr wird man sich begnügen müssen, die *Existenz* einer Grenze überhaupt festzustellen, und es dient dazu folgender aus dem Begriffe der Grenze abgeleiteter Satz:

Wenn sich ein Intervall ε so bestimmen lässt, dass für alle in diesem enthaltenen, von Null verschiedenen δ die Differenz:

$$f(a + \varepsilon) - f(a + \delta)$$

numerisch kleiner, als eine beliebig kleine Grösse σ ist, so nähert sich $f(a + \delta)$ mit unendlich abnehmenden δ einer endlichen bestimmten Grenze.

Man bemerkt übrigens, dass nach der in § 2. festgesetzten Terminologie der Begriff auch so gefasst werden könnte:

Einer Grenze nähert sich $f(a + \delta)$ für unendlich abnehmende δ , wenn $f(x)$ in unmittelbarer Nähe von $x = a$ (auf der rechten Seite) stetig ist.

*) Encyklopädie von Ersch u. Gruber. Art. Grenze.

Note II (zu pag. 98).

Beispiele von Functionen, welche in ganzen Linien total unstetig sind.

Ein in mancher Hinsicht interessantes Beispiel einer total unstetigen Function giebt die Reihe:

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\omega^m}{(m \sin m x \pi)^2},$$

worin ω einen positiven echten Bruch bedeuten soll.

Ist x rational, so erscheinen in dieser Reihe Glieder, die einen verschwindenden Nenner $\sin m x \pi$ haben, und es wird daher für solche x , das aus lauter positiven Gliedern bestehende $f(x) = \infty$.

Ist x irrational, so bestimme man für ein Glied $m = \mu$ die ganze Zahl ν so, dass

$$\mu x - \nu = \varepsilon_{\mu}$$

möglichst klein werde und erhält:

$$\sin m x \pi = (-1)^{\nu} \sin \varepsilon_{\mu} \pi.$$

Es fragt sich nun, ob ε_{μ} so klein werden, und $\mu \varepsilon_{\mu}$ mit wachsendem μ in dem Grade unendlich abnehmen könne, dass die obige Reihe zu einer divergenten wird.

Um diese Frage zu entscheiden, müssen wir uns die irrationale Grösse x in einen unendlichen Kettenbruch

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}} \quad \text{in infin.}$$

entwickelt denken, in dem, was immer angenommen werden kann, die $a_0, a_1, a_2, \dots$ ganze positive Zahlen sind.

Die Näherungsbrüche, welche sich bekanntlich von oben und unten dem Werthe x unbegrenzt annähern, seien $\frac{\nu_n}{\mu_n}$; um ihre Differenzen von x selbst zu erhalten, führen wir $x_1, x_2, \dots$ mittelst der Relationen:

$$x = a_0 + \frac{1}{x_1}, \dots, x_n = a_n + \frac{1}{x_{n+1}}$$

ein und erhalten, wie bekannt:

$$x - \frac{\nu_n}{\mu_n} = \frac{(-1)^{n+1}}{\mu_n (\mu_n x_n + \mu_{n-1})}.$$

Ist nun der Summationsbuchstabe m in obiger Reihe einem solchen Näherungsnenner μ_n gleich, so ist diejenige ganze Zahl ν , welche $(\mu_n x - \nu)$ am kleinsten macht, bekanntlich $\nu = \nu_n$ und die Differenz $\mu_n x - \nu_n = \varepsilon_n$, wo sich:

$$\varepsilon_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\mu_n x_n + \mu_{n-1}}$$

bestimmt.

Es bestehen nun für grosse μ_n die Gleichungen:

$$\pm \frac{\pi}{\mu_n \sin \mu_n x \pi} = \pm \frac{\pi}{\mu_n \sin \varepsilon_n \pi} = \frac{\pm 1}{\mu_n \varepsilon_n} = x_n + \frac{\mu_{n-1}}{\mu_n},$$

und es ist daher, wie man leicht sieht:

$$\frac{\pi^2}{(\mu_n \sin \mu_n x \pi)^2} < (a_n + 2)^2.$$

Es lässt sich nun zeigen *), dass für alle Werthe des m , welche zwischen dem Näherungsnenner μ_n und dem folgenden μ_{n+1} liegen, dasselbe Grössenverhältniss besteht, und daher die Summe:

$$\pi^2 \sum_{m=\mu_n}^{\mu_{n+1}-1} \frac{\omega^m}{(m \sin m x \pi)^2} < (a_n + 2)^2 \sum \omega^m = (a_n + 2)^2 \omega^{\mu_n} \frac{1 - \omega^{\mu_{n+1} - \mu_n}}{1 - \omega}$$

und somit:

$$\pi^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\omega^m}{(m \sin m x \pi)^2} < \frac{1}{1 - \omega} \sum_n (a_n + 2)^2 (\omega^{\mu_n} - \omega^{\mu_{n+1}}),$$

so dass:

$$\pi^2 f(x) < (a_0 + 2)^2 \omega + \sum_n [(a_n + 2)^2 - (a_{n-1} + 2)^2] \omega^{\mu_n}.$$

Bedenkt man nun, dass die Näherungsnenner $\mu_n = a_{n-1}\mu_{n-1} + \mu_{n-2}$, als aus den positiven a zusammengesetzt, viel schneller als die a_n selbst zunehmen, so leuchtet ein, dass diese Reihe für unendlich viele irrationale x *convergiren* wird; so z. B. für die Quadratwurzeln rationaler Zahlen, welche sich bekanntlich in periodische Kettenbrüche der verlangten Art entwickeln lassen, in denen die Nenner a_n endlich sind. Ferner *convergirt* unsere Reihe für die irrationalen Zahlen $x = e$, $x = \frac{1}{e}$, $x = \tan 1$ u. s. w., wie die Gauss'schen Kettenbrüche für e^y , $\tan y$ zeigen; in denen die Nenner alle positiv gemacht werden können und sehr langsam in's Unendliche wachsen.

Divergiren wird die Reihe für alle diejenigen irrationalen Werthe, für welche a_n mit n so rapid und stossweise wächst, dass $(a_n^2 - a_{n-1}^2) \omega^{\mu_n}$ nicht in gehöriger Weise zu Null abnimmt. Die geringe Ausbildung der Theorie numerischer Kettenbrüche wird zu speciellen Angaben, welche Irrationalitäten hiezu gehören, nicht hinreichen; indessen bedarf es solcher auch nicht für unsern Zweck.

*) Ich bedauere, dass ich aus Mangel an Raum gezwungen bin, diesen Beweis, der zu weit in die Theorie der Kettenbrüche führen würde, auf eine andere Gelegenheit zu verschieben.

Denn es genügt zu wissen, dass unsere Function $f(x)$ für unendlich viele irrationale Werthe von x , von denen immer wenigstens einer auch in dem kleinsten Intervalle angegeben werden kann, endlich bleibt, für gewisse irrationale und für alle rationalen x unendlich ist, und somit in jedem beliebig kleinen Intervalle unendlich oft vom Endlichen zum Unendlichen und umgekehrt überspringt. —

Ein ähnliches Beispiel giebt die Reihe:

$$\sum \frac{\omega^m}{(\sin m x \pi)^2},$$

welche für alle rationalen x unendlich wird. Für irrationale x wird der Nenner niemals der Null gleich; die kleinsten Werthe nimmt er an, wenn m dem Nenner eines Näherungsbruches μ_n gleich ist; und zwar ist dann das betreffende Glied:

$$\pi^2 \frac{\omega^{\mu_n}}{(\sin \mu_n x \pi)^2} = (a_n + 2)^2 \mu_n^2 \omega^{\mu_n}$$

und auch dieses wird, obgleich schwächer, als das der vorigen Reihe, für unendlich viele Irrationalitäten so stark abnehmen, dass die Reihe convergiren kann.

Note III (zu pag. 105).

Functionen complexer Veränderlicher, welche linear unstetig werden.

Functionen complexer Variablen, deren reeller Theil in ganzen Linien unstetig wird, kann man leicht construiren:

Ist nämlich x eine complexe Veränderliche, r irgend ein bestimmter Modulus, sind ferner die $a_0, a_1, \dots, b_0, b_1, \dots$ Reihen gewisser endlicher oder unendlich abnehmender reeller Grössen, so ist bekanntlich die Reihe:

$$f(x) = \sum (a_n - b_n i) \left(\frac{x}{r}\right)^n$$

eine für alle x , deren Modul $< r$ ist, synektische (d. h. nebst allen ihren Differentialquotienten, bestimmte, eindeutige) Function, die für $x = r e^{\varphi i}$ den reellen Theil:

$$\sum (a_n \cos n \varphi + b_n \sin n \varphi)$$

besitzt; diese Reihe aber kann die allerverschiedensten Unstetigkeiten besitzen.

Umgekehrt giebt jede in eine Fourier'sche Reihe entwickelbare Function

$$F(\varphi) = \sum (a_n \cos n \varphi + b_n \sin n \varphi),$$

wie unstetig sie auch sei, zu einer innerhalb eines Kreises synektischen Function Veranlassung.

Es kann demnach eine monogene Function einer complexen Veränderlichen in einer Kreisperipherie *punktirt unstetig* werden.

Ich kann jedoch auch Beispiele monogener und im Allgemeinen synektischer Functionen geben, die in einem ganzen Kreise *total unstetig* werden: In der Reihe:

$$f(q) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \frac{\omega^m}{(q^m - q^{-m})^2}$$

sei ω ein positiver, reeller echter Bruch, q aber die complexe Variable. Wenn $\text{mod. } q$ von 1 verschieden ist, wird der Nenner nicht verschwinden und die Convergenz der Reihe hängt ab von dem Grenzwerthe des Quotienten:

$$\omega \left(\frac{m}{m+1} \right)^2 \left(\frac{q^m - q^{-m}}{q^{m+1} - q^{-(m+1)}} \right)^2$$

für unendlich wachsende m . Dieser ist aber, wenn $\text{mod. } q < 1$ ist, ωq^2 und da nach Voraussetzung $\omega < 1$ also auch $\text{mod. } \omega q^2 < 1$, so convergirt die Reihe für alle q , deren Modul < 1 ist. Wenn $\text{mod. } q > 1$, so ist der Grenzwert $\frac{\omega}{q^2}$ und die Reihe convergirt daher ebenfalls für alle q , deren Modul > 1 .

Die Convergenz kann nur aufhören, wenn $\text{mod. } q = 1$. Setzen wir nämlich $q = e^{x\pi i}$, so ist:

$$f(e^{x\pi i}) = -\frac{1}{4} \sum \frac{\omega^m}{(m \sin m x \pi)^2}.$$

Letzteres ist aber die uns aus vorhergehender Note bekannte Reihe.

Es wird also durch jene unendliche für alle q , ausser $\text{mod. } q = 1$, convergente Reihe eine Function der complexen Veränderlichen q dargestellt, welche *ausserhalb und innerhalb* des Kreises mit dem Radius 1 *synektisch* ist, auf der Peripherie des Kreises aber *total unstetig*, indem sie für alle Punkte derselben, deren Anomalie in rationalem Verhältniss zu 2π steht und für eine gewisse Art irrationaler Anomalieen unendlich ist, für andere unendlich viele irrationale Werthe der Anomalie aber endlich bleibt.

Um dies Unendlichwerden genauer zu untersuchen, setze man

$$q = (1 - \varepsilon) e^{x\pi i},$$

wo ε eine kleine, positive, zu Null abnehmende Grösse bezeichnen soll; für ein rationales $x = \frac{\nu}{\mu}$ werden nur die Glieder in $f(q)$, deren $m = \mu r$ ist, mit abnehmendem ε unendlich wachsen und wir brauchen daher nur diese, deren Summe:

$$\frac{1}{\mu^2} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^2} \frac{\omega^{\mu r} (1-\varepsilon)^{2\mu r}}{[1 - (1-\varepsilon)^{2\mu r}]^2},$$

in Betracht zu ziehen, aus der man ersieht, dass sich wesentlich

$$f(1 - \varepsilon e^{\frac{\nu}{\mu} \pi i}) \text{ wie } \frac{\text{Const.}}{\varepsilon^2}$$

verhält, wenn ε unendlich abnimmt, indem sich

$$\varepsilon^2 f(1 - \varepsilon e^{\frac{\nu}{\mu} \pi i})$$

dann einer endlichen Grenze nähert.

Man kann dies Verhalten etwa so beschreiben: Geht man radial von dem Mittelpunkte der complexen Ebene nach allen Seiten aus, so ändert sich $f(q)$ stetig, bis man an den Kreis mit dem Radius 1 gelangt, in welchem die stetige Reihe von Werthen, die $f(q)$ bis dahin auf einem Kreise zeigte, zerreisst, oder, so zu sagen, explodirt und zu einer total unstetigen wird.

Aehnliche Eigenthümlichkeiten zeigt $f(q)$, wenn man sich von aussen demselben Kreise nähert.

Ganz analoge Betrachtungen sind anwendbar auf die Reihe:

$$\psi(q) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\omega^m}{(q^m - q^{-m})^2},$$

welche für alle q synektisch ist, deren Modul von 1 verschieden ist. Wenn mod. $q = 1$, also $q = e^{x\pi i}$, so ist:

$$\psi(e^{x\pi i}) = -\frac{1}{4} \sum \frac{\omega^m}{(\sin m x \pi)^2}.$$

Diese Reihe ist aber am Schlusse von Note II besprochen, und es leuchtet ein, dass $\psi(q)$ ebenfalls eine in dem Kreise mit dem Radius 1 total unstetige Function sein wird, obgleich sie ausserhalb und innerhalb des Kreises synektisch ist.

Die Function $\psi(q)$ kann man übrigens auch durch die Gleichung

$$\psi(q) = -\frac{1}{2} \frac{\partial \log \varphi(q)}{\partial \log q}$$

auf die Function $\varphi(q)$ reduciren, wo:

$$\log \varphi(q) = -\sum \frac{\omega^m}{m(1 - q^{2m})}$$

eine ebenfalls überall mit Ausnahme des mod. $q = 1$ convergente Entwicklung ist. Diese Function $\varphi(q)$ aber, die unter derselben Bedingung für q auch in der Form:

$$\varphi(q) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{q^{n(n-1)} \omega^n}{(1-q^2)(1-q^4) \dots (1-q^{2n})}$$

erscheint*), wird durch die unendlichen Producte

$$\varphi(q) = \prod_{n=0}^{\infty} (1 - q^{2n} \omega) \text{ für mod. } q < 1$$

und

$$\varphi(q) = \frac{1}{\prod_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\omega}{q^{2n+2}}\right)} \text{ für mod. } q > 1$$

dargestellt, deren Beziehungen zu den Jacobi'schen Functionen Θ auf der Hand liegen.

*) Vergl. Scheibner, Sitzungsber. d. math.-phys. Classè. Leipzig 1862. p. 98.