Ueber eine charakteristische Eigenschaft der developpabeln Flächen.

Von

HANS V. MANGOLDT in Freiburg i/Br.

Die Constructionsaufgabe, in einer Ebene eine gegebene Strecke AB von einem gegebenen Punkte C aus der Grösse und Richtung nach abzutragen, lässt unter anderen folgende Lösung zu, die auf beliebig gekrümmte Flächen übertragen werden kann: Man verbinde C mit B durch eine Gerade, halbire diese in M , ziehe die Gerade AM und verlängere sie um sich selbst bis D , so ist CD gleich und parallel AB .

Sind auf einer beliebig gekrümmten Fläche ein geodätischer Bogen AB und ein Punkt C gegeben, so kann man genau dieselbe Construction ausführen, indem man jede vorkommende gerade Linie durch die entsprechende geodätische ersetzt. Der so erhaltene Bogen CD soll dem ursprünglichen gleich und parallel genannt werden.

$$CD = \parallel AB.$$

Diese Beziehung zwischen den Bogen AB und CD ist offenbar wie in der Ebene reciprok. Ist

$$CD = \parallel AB,$$

so ist auch

$$AB = \parallel CD.$$

Dagegen bleibt der Satz: „Sind zwei Strecken einer dritten gleich und parallel, so sind sie auch einander gleich und parallel“ für beliebig gekrümmte Flächen im Allgemeinen nicht mehr gültig. — Es soll bewiesen werden, dass die developpabeln Flächen die einzigen sind, für welche er bestehen bleibt.

Es sei F eine Fläche, welche die verlangte Eigenschaft besitzt, wenigstens so lange man die Betrachtung auf eine gewisse Umgebung eines bestimmten nicht singulären Punktes O der Fläche beschränkt. Aus dem angegebenen Verfahren zur Construction eines geodätischen Bogens, der einem gegebenen gleich und parallel ist, ergeben sich unmittelbar folgende Sätze:

- 1) Ein Bogen AB wird von einem in ihm selbst oder in seiner geodätischen Verlängerung gelegenen Punkte C einfach dadurch abgetragen, dass man ihn ohne Aenderung seiner Länge in seiner eigenen Richtung so lange verschiebt, bis sein Anfang A mit C zusammenfällt.

- 2) Ist

$$AB = \parallel A'B',$$

so ist auch

$$AA' = \parallel BB'.$$

Denn die letzteren beiden Bogen sind durch die Diagonalen $A'B$, AB' in genau derselben Weise mit einander verbunden, wie die ursprünglichen.

- 3) Sind in zwei Dreiecken zwei Paar Seiten gleich und parallel, so sind auch die dritten Seiten gleich und parallel. Denn ist

$$AB = \parallel A'B'$$

und

$$AC = \parallel A'C',$$

so ist nach 2) sowohl

$$AA' = \parallel BB',$$

als auch

$$AA' = \parallel CC'.$$

In Folge der vorausgesetzten Fundamentealeigenschaft unserer Fläche ergibt sich hieraus

$$BB' = \parallel CC'$$

und wieder nach 2)

$$BC = \parallel B'C',$$

w. z. b. w.

- 4) Sind AB und AC Theile ein und derselben geodätischen Linie, deren Längen sich verhalten wie $1:n$, und sind $A'B'$, $A'C'$ die geodätischen Bögen, welche man erhält, indem man AB und AC von demselben Punkte A' aus abträgt, so sind auch $A'B'$ und $A'C'$ Theile ein und derselben geodätischen Linie, und ihre Längen verhalten sich ebenfalls wie $1:n$.

Beweis. Sei zunächst $n=2$. Dann ist

$$AA' = \parallel BB' = \parallel CC',$$

folglich

$$BC = \parallel B'C';$$

ferner

$$AB = \parallel BC = \parallel A'B',$$

also

$$A'B' = \parallel B'C'.$$

Nach 1) muss daher $B'C'$ die Verlängerung von $A'B'$ bilden und ihm an Länge gleich sein. — Durch wiederholte Anwendung derselben Schlüsse ergibt sich die Richtigkeit

unseres Satzes für den Fall, dass n irgend. eine rationale Zahl bedeutet, und daraus folgt, dass er auch für alle irrationalen Werthe von n gültig bleibt.

Nun sei s eine beliebige unbegrenzte geodätische Linie und A' ein Punkt ausserhalb derselben. Wenn man von s einen beliebigen Bogen AB abschneidet, diesen von A' aus abträgt und den entstehenden Bogen $A'B'$ nach beiden Seiten unbegrenzt verlängert, so entsteht eine neue geodätische Linie s' , welche wir die durch A' gezogene Parallele zu s nennen wollen. — Die Lage dieser Parallelen hängt offenbar nur von der Lage des Punktes A' , nicht aber von der Grösse, Lage und Richtung des Stückes AB ab.

Zwei parallele geodätische Linien s, s' können sich innerhalb des Flächentheils, den wir betrachten, niemals schneiden. Denn hätten sie einen Schnittpunkt C , so könnte man ein Stück AB der Linie s von C aus auf zwei verschiedene Weisen abtragen: einmal dadurch, dass man dasselbe in s verschiebt, bis sein Anfangspunkt nach C gelangt, und zweitens dadurch, dass man AB erst von einem Punkte A' der Linie s' aus abträgt und den entstehenden Bogen $A'B'$ in s' verschiebt, bis sein Anfang mit C zusammenfällt. Dies würde aber unseren Voraussetzungen widersprechen.

Durch den Punkt O , dessen Umgebung wir betrachten, ziehen wir nun zwei sich schneidende unbegrenzte geodätische Linien OP, OQ , die wir als Axen eines Coordinatensystems auf F betrachten. In jeder von ihnen denken wir uns eine bestimmte Richtung als die positive fixirt. Zieht man durch einen hinreichend nahe bei O gelegenen Punkt A von F zwei Parallele zu den Axen, so schneiden diese auf OP und OQ resp. zwei Bögen p, q ab, welche die Lage des Punktes A völlig bestimmen und daher als Coordinaten von A bezeichnet werden können.

In diesem System wird jede geodätische Linie durch eine lineare Gleichung zwischen den Coordinaten p, q dargestellt.

Sind nämlich A, B irgend zwei benachbarte Punkte einer geodätischen Linie und resp. p, q und $p + dp, q + dq$ ihre Coordinaten, so gehört auch der Punkt C mit den Coordinaten $p + 2dp, q + 2dq$ der Curve an. Denn bezeichnen wir etwa noch die Punkte mit den Coordinaten $p + dp, q$ und $p + 2dp, q + dq$ durch A' und B' , so ist in den Dreiecken $AA'B, BB'C$

$$AA' = \parallel BB' = \parallel dp,$$

$$A'B = \parallel B'C = \parallel dq,$$

also auch

$$AB = \parallel BC,$$

und daher jeder dieser beiden Bogen die Verlängerung des anderen. Aehnlich ergibt sich, dass auch jeder Punkt mit den Coordinaten

$p + v dp$, $q + v dq$, wo v zunächst irgend eine rationale und dann auch jede irrationale Zahl bedeuten kann, der Curve angehört. Diese letztere erfüllt somit die Differentialgleichung

$$(1) \quad \frac{dq}{dp} = \lambda,$$

wo λ eine Constante bedeutet, und wird daher in endlicher Form durch eine Gleichung ersten Grades zwischen p und q dargestellt. Auch umgekehrt ist jede Curve, welche eine solche Gleichung befriedigt, eine geodätische Linie, wie sich leicht beweisen lässt. Durch Schlüsse, welche den eben angewendeten völlig analog sind, ergibt sich, dass in jeder geodätischen Linie das Bogenelement ds , welches einem festen Zuwachs dp von p entspricht, von der Lage seines Anfangspunktes, also dem Werthe von p , unabhängig ist.

Denken wir uns die Fläche F durch drei Gleichungen von der Form

$$x = \varphi(p, q); \quad y = \psi(p, q); \quad z = \chi(p, q)$$

und die betrachtete geodätische Linie durch ihre Differentialgleichung

$$(1) \quad \frac{dq}{dp} = \lambda$$

gegeben, so hat man unter Anwendung der bekannten Gauss'schen Bezeichnungen

$$ds^2 = dp^2(E + 2F \cdot \lambda + G \cdot \lambda^2).$$

Die Unabhängigkeit des Bogenelementes von p drückt sich daher aus durch die Gleichung

$$(2) \quad \frac{d}{dp} (E + 2F \cdot \lambda + G \cdot \lambda^2) \\ = \frac{\partial E}{\partial p} + \lambda \left(\frac{\partial E}{\partial q} + 2 \frac{\partial F}{\partial p} \right) + \lambda^2 \left(2 \frac{\partial F}{\partial q} + \frac{\partial G}{\partial p} \right) + \lambda^3 \frac{\partial G}{\partial q} = 0,$$

welche, da sie für beliebige Werthe von λ bestehen soll, sofort in die vier anderen

$$(3) \quad \frac{\partial E}{\partial p} = 0,$$

$$(4) \quad \frac{\partial E}{\partial q} + 2 \frac{\partial F}{\partial p} = 0,$$

$$(5) \quad 2 \frac{\partial F}{\partial q} + \frac{\partial G}{\partial p} = 0,$$

$$(6) \quad \frac{\partial G}{\partial q} = 0$$

zerfällt.

Weitere Gleichungen für die Functionen E , F , G ergeben sich aus dem Umstande, dass die geodätischen Linien unserer Fläche durch lineare Gleichungen zwischen p und q dargestellt werden. Die hierfür nothwendigen und hinreichenden Bedingungen, welche von Beltrami

aufgestellt worden sind (Annali di matematica, I. serie, tom. VI pag. 188), bestehen in vier Differentialgleichungen, denen die Functionen E, F, G genügen müssen. Wir haben für den gegenwärtige Zweck nur von der ersten und letzten derselben Gebrauch zu machen die folgendermassen lauten:

$$E \left(\frac{\partial F}{\partial p} - \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial q} \right) - \frac{1}{2} F \frac{\partial E}{\partial p} = 0,$$

$$G \left(\frac{\partial F}{\partial q} - \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial p} \right) - \frac{1}{2} F \frac{\partial G}{\partial q} = 0.$$

In Folge von (3) und (6) reduciren sich diese Gleichungen sofort auf

$$2 \frac{\partial F}{\partial p} - \frac{\partial E}{\partial q} = 0,$$

$$2 \frac{\partial F}{\partial q} - \frac{\partial G}{\partial p} = 0,$$

und liefern in Verbindung mit den Gleichungen (4) und (5)

$$\frac{\partial F}{\partial p} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial q} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial q} = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial p} = 0.$$

Die Grössen E, F, G sind also sämmtlich constant. Das Krümmungsmass unserer Fläche ist daher gleich Null und diese selbst developpabel wie wir beweisen wollten.

Freiburg i/Br., Ende Juni 1881.