RIVISTA BIBLIOGRAFICA

SULLA RIDUZIONE DELLE EQUAZIONI ISOPERIMETRICHE ALLA FORMA CANONICA.

RICHELOT. — SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU CALCUL DES VARIATIONS.

Extrait d'une lettre à Mr. Hermite. *Comptes Rendus*. 31 Octobre 1859.

È noto che mediante le trasformazioni delle equazioni della Dinamica dovute a Lagrange, ad Hamilton, a Jacobi la soluzione dei problemi della Dinamica è ridotta alla integrazione di un numero doppio di equazioni differenziali, ma del primo ordine e di una forma particolare denominata *forma canonica*; od alla integrazione di una equazione alle derivate parziali del primo ordine non lineare. La dinamica teoretica deve molti dei suoi recenti progressi a quelle trasformazioni (Vedasi il diligentissimo rapporto del Sig. Cayley — On the Recent Progress of Theoretical Dynamics — Report of the 27th Meeting of the British Association — 1858). Le equazioni della Dinamica potendo considerarsi come un caso particolare delle equazioni isoperimetriche offrivasi spontanea la ricerca di analoghe trasformazioni per queste ultime equazioni. Il Sig. Ostrogradsky in una lunga memoria, poco conosciuta, « Sur les équations différentielles relatives au problème des isopérimètres — Mémoires de l'Académie de Saint-Petersbourg - T^e. 6^{me}. 1850 » occupatosi pel primo di questa importante questione giunse a porre quelle equazioni sotto la forma canonica (pag. 403) ed a ridurre la integrazione delle medesime a quella di una equazione alle derivate parziali del primo ordine non lineare (pag. 445). In una nota pubblicata negli Atti della Società Italiana (1854) « Sui criterj di integrabilità delle funzioni e sulle equazioni isoperimetriche » ho dimostrato come la riduzione delle equazioni isoperimetriche alla forma canonica si possa ottenere molto semplicemente mediante una effettiva trasformazione di quelle equazioni. Crediamo opportuno di ripubblicare in questi *Annali* quella dimostrazione con alcune variazioni, giacchè i risultati comunicati dal Sig. Richelot al Sig. Hermite nella lettera citata coincidono con quelli dell'Ostrogradsky.

Indicando con t la variabile principale, con $x_1, x_2 \dots x_m$ m funzioni delle medesime e con V una funzione di t , di $x_1, x_2 \dots x_m$ e delle loro derivate rispetto a $t, x'_1, x''_1 \dots x^{(\alpha_1)}_1; x'_2, x''_2 \dots x^{(\alpha_2)}_2; \dots x'_m, x''_m \dots x^{(\alpha_m)}_m$; è noto che le equazioni isoperimetriche quali vengono date dal calcolo delle variazioni hanno

la forma :

$$(1) \quad \frac{dV}{dx_r} - \left(\frac{dV}{dx_r'} \right)' + \left(\frac{dV}{dx_r''} \right)'' - \dots + (-1)^n \left(\frac{dV}{dx_r^{(n)}} \right)^{(n)} = 0$$

nella quale si è fatto per brevità $\alpha_r = n$. Posto :

$$\varphi_{r,s} = \frac{dV}{dx_r^{(s+1)}} - \left(\frac{dV}{dx_r^{(s+2)}} \right)' + \dots + (-1)^{n-s-1} \left(\frac{dV}{dx_r^{(n)}} \right)^{(n-s-1)}$$

si ha evidentemente il gruppo di equazioni :

$$(2) \quad \varphi_{r,n-1} = \frac{dV}{dx_r^{(n)}}; \quad \varphi_{r,n-1}' + \varphi_{r,n-2} = \frac{dV}{dx_r^{(n-1)}}; \quad \varphi_{r,n-2}' + \varphi_{r,n-3} = \frac{dV}{dx_r^{(n-2)}} \\ \dots \dots \varphi_{r,0}' = \frac{dV}{dx_r}.$$

Se si moltiplicano ordinatamente queste equazioni per $x_r^{(n+1)}$, $x_r^{(n)}$, $\dots \dots x_r'$, e si sommano le equazioni risultanti si ottiene la

$$\sum_1^n \left\{ \varphi_{r,n-1} x_r^{(n)} + \varphi_{r,n-2} x_r^{(n-1)} + \dots + \varphi_{r,0} x_r' \right\}' = V' - \frac{dV}{dt},$$

od indicando con T il primo membro di questa equazione :

$$V' - T' = \frac{dV}{dt}.$$

Notisi che la equazione (1) essendo alle derivate dell' 2nesimo ordine conterrà in generale le :

$$x_r, x_r', x_r'', \dots x_r^{(2n-1)};$$

sostituuiamo alle n quantità :

$$x_r^{(n)}, x_r^{(n+1)} \dots x_r^{(2n-1)}$$

le :

$$\varphi_{r,n-1}, \varphi_{r,n-2} \dots \varphi_{r,0}$$

cioè si considerino le $2n$ quantità :

$$x_r, x_r', \dots x_r^{(n-1)}; \quad \varphi_{r,0}, \varphi_{r,1} \dots \varphi_{r,n-1}$$

come variabili indipendenti.

Se nella espressione $T - V$ si sostituiscono alle $x_r^{(n)}$ i loro valori dati dalle relazioni $\varphi_{r,n-1} = \frac{dV}{dx_r^{(n)}}$ ed indicasi con :

$$\theta(s, \dots x_r, x_r', \dots x_r^{(n-1)}, \varphi_{r,0}, \varphi_{r,1} \dots \varphi_{r,n-1}, \dots)$$

la funzione risultante; si avranno facilmente le equazioni :

$$\frac{d\theta}{d\varphi_{r,0}} = x'_r, \quad \frac{d\theta}{d\varphi_{r,1}} = x''_r \dots \frac{d\theta}{d\varphi_{r,n-1}} = x^{(n)}_r$$

$$\frac{d\theta}{dx_r} = - \frac{dV}{dx_r}, \quad \frac{d\theta}{dx'_r} = - \frac{dV}{dx'_r} + \varphi_{r,0}, \dots \frac{d\theta}{dx^{(n-1)}_r} = - \frac{dV}{dx^{(n-1)}_r} + \varphi_{r,n-2}$$

ossia per le equazioni (2) :

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_r}{dt} = \frac{d\theta}{d\varphi_{r,0}}, \quad \frac{dx'_r}{dt} = \frac{d\theta}{d\varphi_{r,1}} \dots \frac{dx^{(n-1)}_r}{dt} = \frac{d\theta}{d\varphi_{r,n-1}} \\ \frac{d\varphi_{r,0}}{dt} = - \frac{d\theta}{dx_r}, \quad \frac{d\varphi_{r,1}}{dt} = - \frac{d\theta}{dx'_r} \dots \frac{d\varphi_{r,n-1}}{dt} = - \frac{d\theta}{dx^{(n-1)}_r} \end{array} \right.$$

le quali equazioni in numero $2(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m)$ hanno la forma canonica. Si potranno quindi estendere ad esse le molte proprietà che hanno luogo per le equazioni della Dinamica poste sotto la forma canonica. Fra esse notiamo quella che fa dipendere la integrazione delle equazioni isoperimetriche dall'integrazione di una equazione a derivate parziali (*). Indicando con S una funzione di:

$$t, x'_1, x''_1, \dots x^{(\alpha_1-1)}_1; \quad x_2, x'_2 \dots x^{(\alpha_2-1)}_2 \dots x_m, x'_m \dots x^{(\alpha_m-1)}_m$$

ponendo :

$$(4) \quad \varphi_{r,s} = \frac{dS}{dx^{(s)}_r}$$

e sostituendo queste espressioni nella funzione θ , si troverà come pel caso delle equazioni dinamiche che la equazione suddetta a derivate parziali è la seguente :

$$\frac{dS}{dt} + \theta \left(t, \dots x_r, x'_r \dots x^{(n-1)}_r; \frac{dS}{dx_r}, \frac{dS}{dx'_r} \dots \frac{dS}{dx^{(n-1)}_r}, \dots \right) = 0.$$

Denominando S una soluzione completa di questa equazione, cioè una soluzione la quale contenga $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m$ costanti arbitrarie $a_{r,0}, a_{r,1} \dots a_{r,n-1}$; le equazioni :

$$\frac{dS}{da_{r,s}} = b_{r,s}$$

unitamente alle (4) sono gli integrali delle equazioni isoperimetriche.

Pavia, Dicembre 1859.

PROF. FRANCESCO BRIOSCHI.

(*) Il Sig. Clebsch ha dato una dimostrazione di questa proprietà nella Memoria « Ueber diejenigen Probleme der Variationsrechnung etc. » Giornale di Crelle T.^o 55 An. 1858, e recentemente (Giornale di Crelle, T.^o 57) nella Memoria « Über die Gleichgewichtsfigur eines biegsamen Fadens. » ha mostrato con varj esempj come la soluzione dei problemi isoperimetrici possa ottenersi facilmente mediante l'integrazione dell'equazione a derivate parziali.