Wirkliche Ausführung der ganzzahligen Multiplication der elliptischen Functionen.

(Von Herrn *L. Kiepert* in Freiburg i. Br.)

Das Problem der rationalen Multiplication der elliptischen Functionen ist der Theorie nach vollständig gelöst, und zwar sind für seine Lösung besonders zwei Methoden bekannt, von denen die eine auf der wiederholten Anwendung des Additionstheorems beruht, während die andere eine zweimalige Transformation erfordert *). Wer aber die praktische Ausführung dieser Methoden versucht hat, wird sich überzeugt haben, dass sie beide fast illusorisch sind, weil nur bei einem sehr kleinen Multiplicator die nothwendigen algebraischen Operationen zu bewältigen sind. Auch die Multiplicationsformeln, welche sich in den Dissertationen der Herren *Müller* **) und *Simon* ***) finden, würden für einen Multiplicator, der grösser als fünf ist, nur mit sehr grossem Zeitaufwande zum Ziele führen und ein Resultat liefern, das wegen seiner Länge nicht mehr übersichtlich ist.

Deshalb sollen in dem Folgenden für *jeden beliebigen* ganzzahligen Multiplicator die Multiplicationsformeln in völlig übersichtlicher Gestalt ausgeführt werden. Ich will dabei die Functionen σu und $\wp u$ benutzen, die Herr *Weierstrass* in seinen Vorlesungen über elliptische Functionen anwendet, wozu ich mich um so mehr veranlasst sehe, da mein hochverehrter Lehrer eine Zusammenstellung der auf dieselben bezüglichen Sätze und Formeln selbst zu veröffentlichen beabsichtigt.

§. 1. Einige Sätze über specielle Functionen.

Ehe wir zur Lösung unserer Aufgabe schreiten, müssen wir wenigstens in aller Kürze einige Sätze aus den Vorlesungen des Herrn *Weierstrass* anführen.

---

*) Vergl. *Königsberger,* Die Transformation, die Multiplication und die Modulargleichungen der elliptischen Functionen. Leipzig 1868 bei Teubner. Seite 116 u. 124.

**) *Felix Müller*, De transformatione functionum ellipticarum. Berlin 1867 bei Calvary.

***) *Max Simon,* De relationibus inter constantes etc. Berlin 1867 bei Calvary. Die von Herrn *Simon* auf der letzten Seite seiner Dissertation angeführten Recursionsformeln sind in vielen Fällen, bei denen die Multiplication der elliptischen Functionen angewendet wird, äusserst brauchbar.

Es seien 2ω und $2\omega'$ die primitiven Perioden einer elliptischen Function, und

$$w = 2m\omega + 2n\omega',$$

dann bilden wir das stets convergirende Product

$$(1.) \qquad \sigma u = u\Pi'\left(1-\frac{u}{w}\right)e^{\frac{u}{w}+\frac{u^2}{2w^2}},$$

wo der Strich bei dem Productzeichen Π so wie weiter unten beim Summationszeichen Σ andeutet, dass m und n, die alle positiven und negativen ganzzahligen Werthe durchlaufen, nicht gleichzeitig Null sein dürfen.

Diese Function σu verschwindet nur für

$$u = w = 2m\omega + 2n\omega'$$

und wird für endliche Werthe von u niemals unendlich gross. Da es zu jedem Werthe von $w = 2m\omega + 2n\omega'$ einen entgegengesetzten Werth $w = -2m\omega - 2n\omega'$ giebt, so können wir w mit $-w$ vertauschen, ohne dass sich die Function σu ändert. Wenn wir daher $-u$ statt u setzen, so wechselt σu nur sein Zeichen, d. h. *σu ist eine ungerade Function.*

Aus σu leiten wir durch Differentiation die Function $\wp u$ her; es ist nämlich

$$\frac{d\log\sigma u}{du} = \frac{\sigma' u}{\sigma u} = \frac{\sigma'}{\sigma}(u)\,{}^{*)} = \frac{1}{u} + \Sigma'\left(\frac{1}{u-w} + \frac{1}{w} + \frac{u}{w^2}\right),$$

$$\wp u = -\frac{d^2\log\sigma u}{du^2} = \frac{1}{u^2} + \Sigma'\left(\frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2}\right),$$

$$\wp' u = -\frac{d^3\log\sigma u}{du^3} = \frac{-2}{u^3} - 2\Sigma'\frac{1}{(u-w)^3} = -2\Sigma\frac{1}{(u-w)^3},$$

wo jetzt der Strich bei dem Summenzeichen Σ fehlt, weil in $w = 2m\omega + 2n\omega'$ auch m und n einmal gleichzeitig Null sein müssen.

Aus der Form der Function $\wp' u$ folgt sofort, dass sie die Perioden 2ω und $2\omega'$ hat, denn es ist

$$\wp'(u+2\omega) = \wp' u \quad \text{und} \quad \wp'(u+2\omega') = \wp' u.$$

Durch Integration dieser Gleichungen erhalten wir

$$\wp(u+2\omega) = \wp u + C, \quad \wp(u+2\omega') = \wp u + C',$$

also für $u = -\omega$, bezüglich $u = -\omega'$

$$\wp\omega = \wp(-\omega) + C, \quad \wp\omega' = \wp(-\omega') + C'.$$

---

*) Der Kürze wegen schreiben wir $\frac{\sigma'}{\sigma}(u)$ statt $\frac{\sigma' u}{\sigma u}$.

Nun ist aber $\wp u$ eine gerade Function, folglich sind C und C' gleich Null, so dass auch $\wp u$ die beiden Perioden 2ω und $2\omega'$ hat. Es ist also

$$(2.)\qquad \wp(u+2\omega) = \wp u \quad \text{und} \quad \wp(u+2\omega') = \wp u.$$

Alle andern Perioden, welche $\wp u$ besitzt, haben die Form $2m\omega+2n\omega'$, wo m und n ganze Zahlen sind, deshalb heissen 2ω und $2\omega'$ *primitive* Perioden von $\wp u$.

Wenn wir noch einmal integriren und die Integrationsconstanten bezüglich 2η und $2\eta'$ nennen, so kommt

$$(3.)\qquad \frac{\sigma'}{\sigma}(u+2\omega) = \frac{\sigma'}{\sigma}(u)+2\eta, \quad \frac{\sigma'}{\sigma}(u+2\omega') = \frac{\sigma'}{\sigma}(u)+2\eta',$$

oder

$$\frac{\sigma'}{\sigma}(\omega) = \frac{\sigma'}{\sigma}(-\omega)+2\eta, \quad \frac{\sigma'}{\sigma}(\omega') = \frac{\sigma'}{\sigma}(-\omega')+2\eta',$$

und da $\frac{\sigma'}{\sigma}(u)$ eine ungerade Function ist,

$$(4.)\qquad \eta = \frac{\sigma'}{\sigma}(\omega), \quad \eta' = \frac{\sigma'}{\sigma}(\omega').$$

Die Formel (3.) lässt sich sofort verallgemeinern, und zwar ist

$$(3^a.)\qquad \frac{\sigma'}{\sigma}(u+2m\omega+2n\omega') = \frac{\sigma'}{\sigma}(u)+2m\eta+2n\eta'.$$

Eine nochmalige Integration ergiebt in ganz ähnlicher Weise

$$(5.)\qquad \sigma(u+2m\omega+2n\omega') = (-1)^{mn+m+n} e^{(2m\eta+2n\eta')(u+m\omega+n\omega')}\sigma u.$$

Die Function σu ist also selbst nicht periodisch, aber sie verwandelt sich, wenn man das Argument u um eine Periode vermehrt, in sich selbst zurück, multiplicirt mit einem Exponentialfactor, dessen Exponent eine lineare Function von u ist.

Dabei findet zwischen den Grössen ω, ω', η, η' eine Relation statt; es ist nämlich, wenn in $\frac{\omega'}{\omega}$ die zweite Ordinate positiv ist,

$$(6.)\qquad 2\eta\omega'-2\eta'\omega = \pi i,$$

oder noch allgemeiner

$$(6^a.)\qquad 2\tilde{\eta}\tilde{\omega}'-2\tilde{\eta}'\tilde{\omega} = (mn'-m'n)\pi i,$$

wobei

$$(7.)\qquad \begin{cases} \tilde{\omega} = m\omega+n\omega', & \tilde{\omega}' = m'\omega+n'\omega', \\ \tilde{\eta} = m\eta+n\eta', & \tilde{\eta}' = m'\eta+n'\eta'. \end{cases}$$

Sollen $2\tilde{\omega}$ und $2\tilde{\omega}'$ wieder ein primitives Periodenpaar sein, so muss

$$mn'-m'n = +1$$

werden.

Aus den angeführten Formeln folgt, dass die Function

$$(8.) \qquad \varphi(u) = C\frac{\sigma(u-a_1)\sigma(u-a_2)\dots\sigma(u-a_r)}{\sigma(u-b_1)\sigma(u-b_2)\dots\sigma(u-b_r)}$$

die beiden Perioden 2ω und $2\omega'$ besitzt, sobald $\Sigma a = \Sigma b$ ist, denn es wird beim Einsetzen

$$\varphi(u+2\omega) = \varphi(u) \quad \text{und} \quad \varphi(u+2\omega') = \varphi(u).$$

Es lässt sich aber auch umgekehrt zeigen, dass jede Function, welche die beiden Perioden 2ω und $2\omega'$ besitzt, sich auf jene Form bringen lässt. Dabei ist $a_1, a_2, \dots a_r$ ein vollständiges System nicht congruenter Werthe von u, für welche $\varphi(u)$ verschwindet, und $b_1, b_2, \dots b_r$ ein vollständiges System nicht congruenter Werthe von u, für welche $\varphi(u)$ unendlich wird. Jeder von diesen Werthen ist so oft berücksichtigt, als seine Ordnungszahl angiebt.

Kennt man daher die Nullwerthe und Unendlichkeitswerthe einer doppeltperiodischen Function $\varphi(u)$, so kann man sie in der durch Gleichung (8.) angegebenen Form darstellen. So wird z. B.

$$(9.) \qquad \wp u - \wp v = \frac{\sigma(v-u)\sigma(v+u)}{(\sigma v)^2(\sigma u)^2},$$

$$(10.) \qquad \wp' u = -\frac{2\sigma(u-\omega)\sigma(u-\omega')\sigma(u+\omega+\omega')}{\sigma\omega\sigma\omega'\sigma(\omega+\omega')(\sigma u)^3},$$

oder

$$(10^a.) \qquad \wp' u = \frac{2\sigma(u+\omega)\sigma(u+\omega')\sigma(u-\omega-\omega')}{\sigma\omega\sigma\omega'\sigma(\omega+\omega')(\sigma u)^3}.$$

Durch Multiplication dieser beiden Werthe von $\wp' u$ und Anwendung der Formel (9.) finden wir

$$(11.) \qquad (\wp' u)^2 = 4(\wp u - \wp\omega)(\wp u - \wp(\omega+\omega'))(\wp u - \wp\omega').$$

Zur Abkürzung setzen wir

$$\wp\omega = e_1, \quad \wp(\omega+\omega') = e_2, \quad \wp\omega' = e_3,$$

dann ergiebt sich, wenn wir beide Seiten von Gleichung (11.) entwickeln,

$$e_1+e_2+e_3 = 0,$$

also

$$(12.) \qquad (\wp' u)^2 = 4(\wp u)^3 - g_2\wp u - g_3,$$

wo

$$(13.)\quad \begin{cases} g_2 = -4(e_2e_3+e_3e_1+e_1e_2) = 2(e_1^2+e_2^2+e_3^2), \\ g_3 = 4e_1e_2e_3. \end{cases}$$

Weil

$$\sigma(u-v) = \pm e^{2\tilde{\eta}(u-v-\tilde{\omega})}\sigma(u-v-2\tilde{\omega})$$

ist, so kann Gleichung (8.) auch folgende Gestalt annehmen

$$(8^a.)\qquad \varphi(u) = C_1\frac{\sigma(u-a_1)\sigma(u-a_2)\dots\sigma(u-a_r)}{\sigma(u-b_1)\sigma(u-b_2)\dots\sigma(u-b_r)}e^{(2m\eta+2n\eta')u},$$

wo aber

$$\Sigma a = \Sigma b+2m\omega+2n\omega'$$

sein muss.

Es giebt noch eine zweite Darstellung einer jeden doppeltperiodischen Function $\varphi(u)$, die wir erwähnen müssen. Unter den Werthen b_1, $b_2, \dots b_r$ von u, für die sie unendlich wird, seien nur m von einander verschieden, nämlich

$$b_1,\quad b_2,\quad \dots\quad b_m,$$

deren Ordnungszahlen aber bezüglich

$$\alpha,\quad \beta,\quad \dots\quad \mu$$

sind, so dass also

$$\alpha+\beta+\dots+\mu = r$$

ist. Nun seien in der Entwickelung von $\varphi(u)$ nach Potenzen von $u-b_1$ die Glieder mit negativen Potenzen

$$c_{1,\alpha}(u-b_1)^{-\alpha}+c_{1,\alpha-1}(u-b_1)^{-\alpha+1}+\dots+c_{1,1}(u-b_1)^{-1}$$

und

$$(14.)\qquad \varphi(u, b_1) = \sum_{\nu=1}^{\nu=\alpha}\frac{(-1)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}c_{1,\nu}\frac{d^\nu\log\sigma(u-b_1)}{du^\nu}.$$

Entsprechende Bedeutung mögen $\varphi(u, b_2), \dots \varphi(u, b_m)$ haben, dann ist

$$(15.)\qquad \varphi(u)-\varphi(u, b_1)-\varphi(u, b_2)-\dots-\varphi(u, b_m) = g(u)$$

eine Function, die für keinen endlichen Werth von u unendlich werden kann; da nun aber ihre Ableitung doppeltperiodisch wird, und jede doppeltperiodische Function Unendlichkeitswerthe haben muss, so kann die Ableitung von $g(u)$ höchstens eine Constante sein. Wenn wir nun noch $u+2\omega$ statt u und $u+2\omega'$ statt u in Gleichung (15.) einsetzen, so findet sich, dass diese Constante Null ist, und dass

$$(16.)\qquad c_{1,1}+c_{2,1}+\dots+c_{m,1} = 0$$

wird. $g(u)$ selbst ist also eine Constante, die wir mit g bezeichnen wollen, deshalb erhalten wir

$$(17.)\qquad \varphi(u) = g+\varphi(u, b_1)+\varphi(u, b_2)+\cdots+\varphi(u, b_m).$$

Für den Fall, dass $\varphi(u)$ unendlich gross wird von der n^{ten} Ordnung nur für $u\equiv 0$, ist daher

$$\varphi(u) = g+\sum_{\nu=1}^{\nu=n}\frac{(-1)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}c_\nu\frac{d^\nu\log\sigma u}{du^\nu}.$$

Aus Gleichung (16.) folgt, dass c_1 verschwindet, es ist also

$$\varphi(u) = g-c_2\frac{d^2\log\sigma u}{du^2}+\frac{c_3}{2}\frac{d^3\log\sigma u}{du^3}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}c_n\frac{d^n\log\sigma u}{du^n},$$

oder da $-\dfrac{d^2\log\sigma u}{du^2}=\wp u$ ist,

$$(18.)\qquad \begin{cases}\varphi(u) = g+c_2\wp u-\dfrac{c_3}{2}\wp' u+\cdots+\dfrac{(-1)^n}{(n-1)!}c_n\wp^{(n-2)}u\\ = a_1+a_2\wp u+a_3\wp' u+\cdots+a_n\wp^{(n-2)}u.\end{cases}$$

§. 2 *). Bedeutung der Function $\psi_n(u)=\dfrac{\sigma(nu)}{(\sigma u)^{nn}}$.

Die zu lösende Aufgabe ist: *es soll $\wp(nu)$ als rationale Function von $\wp u$ dargestellt werden, wobei n eine positive ganze Zahl ist.* Zur Lösung benutzen wir eine Function

$$(19.)\qquad \psi_n(u) = \frac{\sigma(nu)}{(\sigma u)^{nn}}.$$

Diese Function hat dieselben Perioden wie $\wp u$, denn aus Formel (5.) folgt

$$\sigma n(u+2\omega)=\sigma(nu+2n\omega)=(-1)^n e^{2n\eta(nu+n\omega)}\sigma(nu)$$
$$=(-1)^n e^{2nn\eta(u+\omega)}\sigma(nu),$$

und

$.+2\omega))^{nn}$

$$\cancel{(\sigma u)^{nn}} = (-1)^{nn}e^{2nn\eta(u+\omega)}(\sigma u)^{nn},$$

also

$$\psi_n(u+2\omega) = \psi_n(u),$$

und ebenso

$$\psi_n(u+2\omega') = \psi_n(u).$$

---

*) Die §§. 2 und 3 enthalten, wenn auch in anderer Zusammenstellung, Sätze, die bereits in den Dissertationen der Herren *Müller* und *Simon* gegeben worden sind.

Nun wird die Function $\psi_n(u)$ gleich Null für die $nn-1$ Werthe

$$u = \frac{2\lambda\omega + 2\mu\omega'}{n},$$

wo λ und μ die Werthe 0, 1, 2, ... $n-1$ annehmen, nur dürfen λ und μ nicht gleichzeitig Null werden. Unendlich wird $\psi(u)$ nur für $u \equiv 0$, und zwar unendlich von der Ordnung $nn-1$; deshalb ist, wenn wir $\psi_n(u)$ in der durch Gleichung (8ᵃ.) angegebenen Form darstellen,

$$(20.)\quad \begin{cases} \psi_n(u) = C \dfrac{\Pi'\left[\sigma\left(u - \dfrac{2\lambda\omega+2\mu\omega'}{n}\right)e^{(2\lambda\eta+2\mu\eta')\frac{u}{n}}\right]}{(\sigma u)^{nn-1}} \\[2ex] = C' \dfrac{\Pi'\left[\sigma\left(u + \dfrac{2\lambda\omega+2\mu\omega'}{n}\right)e^{-(2\lambda\eta+2\mu\eta')\frac{u}{n}}\right]}{(\sigma u)^{nn-1}}, \end{cases}$$

wo der Strich bei Π andeutet, dass λ und μ nicht gleichzeitig Null werden dürfen.

Multipliciren wir die beiden Ausdrücke für $\psi_n(u)$ mit einander, so erhalten wir mit Anwendung von Gleichung (9.)

$$(21.)\qquad \psi_n(u).\psi_n(u) = C''\,\Pi'\left[\wp u - \wp\left(\frac{2\lambda\omega+2\mu\omega'}{n}\right)\right].$$

Ist n ungerade, so wird auch die rechte Seite ein Quadrat, weil für $\lambda+\lambda' \equiv \mu+\mu' \equiv 0 \bmod. n$

$$\wp\left(\frac{2\lambda\omega+2\mu\omega'}{n}\right) = \wp\left(\frac{2\lambda'\omega+2\mu'\omega'}{n}\right)$$

ist, und sich die Werthsysteme für λ, μ zu je zweien so ordnen lassen, dass jene Bedingung erfüllt ist.

Ist dagegen n gerade, so wird die rechte Seite ein Quadrat, multiplicirt mit $(\wp' u)^2 = 4(\wp u)^3 - g_2\wp u - g_3$.

Aus der Entwickelung nach Potenzen von u folgt durch Vergleichung der Coefficienten der ersten Glieder auf beiden Seiten

$$C'' = n^2.$$

§. 3. Zusammenhang zwischen $\wp(nu)$ und $\psi_n(u)$.

Es ist

$$\begin{aligned} \frac{d^2\log\psi_n(u)}{du^2} &= \frac{\psi_n(u)\psi_n''(u) - \psi_n'(u)\psi_n'(u)}{\psi(u).\psi(u)} \\ &= \frac{d^2\log\sigma(nu)}{du^2} - n^2\frac{d^2\log\sigma u}{du^2} \\ &= -n^2\wp(nu) + n^2\wp u, \end{aligned}$$

also

$$(22.)\qquad \wp(nu) = \wp u + \frac{\psi_n'(u)\psi_n'(u) - \psi_n(u)\psi_n''(u)}{nn\psi_n(u)\psi_n(u)}.$$

Eine zweite Relation zwischen $\wp(nu)$ und $\psi(u)$ folgt aus der Formel (9.)

$$\wp u_2 - \wp u_1 = \frac{\sigma(u_1-u_2)\sigma(u_1+u_2)}{(\sigma u_1)^2(\sigma u_2)^2},$$

denn setzen wir

$$u_1 = u,\quad u_2 = nu,$$

so kommt

$$\wp(nu) - \wp u = -\frac{\sigma(n-1)u\,\sigma(n+1)u}{(\sigma u)^2(\sigma nu)^2}.$$

Dividiren wir auf der rechten Seite Zähler und Nenner durch

$$(\sigma u)^{(n-1)(n-1)+(n+1)(n+1)} = (\sigma u)^{2nn+2},$$

so wird

$$(23.)\qquad \wp(nu) = \wp u - \frac{\psi_{n-1}(u)\psi_{n+1}(u)}{\psi_n(u)\psi_n(u)}.$$

Es kommt also nur darauf an, $\psi_n(u)$ ganz allgemein zu berechnen, eine Aufgabe, deren vollständige Lösung in dem Folgenden gegeben werden soll.

§. 4. Darstellung der Function $\psi_n(u)$ durch $\wp u$ und die Ableitungen von $\wp u$.

Es sei

$$(24.)\qquad f(u) = \frac{e^{wu}\sigma(u-v)}{\sigma v\,\sigma u},$$

dann ist

$$f(u+2\omega) = \frac{-e^{wu+2w\omega}e^{2\eta(u-v+\omega)}\sigma(u-v)}{-e^{2\eta(u+\omega)}\sigma v\,\sigma u}$$

$$= e^{2w\omega-2\eta v}.f(u).$$

Ebenso ist

$$f(u+2\omega') = e^{2w\omega'-2\eta' v}.f(u).$$

Setzen wir nun

$$(25.)\qquad v = \frac{2\lambda\omega+2\mu\omega'}{n},\quad w = \frac{2\lambda\eta+2\mu\eta'}{n},$$

wo λ und μ die Werthe 0, 1, 2, ... $n-1$ haben dürfen — nur dürfen sie nicht gleichzeitig Null sein —, dann ist

$$2w\omega - 2\eta v = \frac{4\mu}{n}(\eta'\omega-\eta\omega') = -\frac{2\mu}{n}\pi i,$$

$$2w\omega' - 2\eta' v = \frac{4\lambda}{n}(\eta\omega'-\eta'\omega) = +\frac{2\lambda}{n}\pi i;$$

daraus folgt

$$(26.)\qquad f(u+2\omega) = e^{-\frac{2\mu}{n}\pi i} f(u), \quad f(u+2\omega') = e^{\frac{2\lambda}{n}\pi i} f(u),$$

d. h. *$f(u)$ hat die Perioden 2ω, $2\omega'$ zwar nicht, aber wenn man u um eine dieser Perioden vermehrt, so verwandelt sich $f(u)$ in sich selbst, multiplicirt mit einer n^{ten} Wurzel der Einheit.* Daraus folgt, dass die n^{te} Potenz von $f(u)$ die Perioden 2ω, $2\omega'$ besitzt.

Wir können daher, weil $f^n(u)$ nur für u congruent Null n fach unendlich wird, diese Function nach Gleichung (18.) folgendermassen entwickeln

$$(27.)\qquad f^n(u) = a_1 + a_2\wp u + a_3\wp' u + \cdots + a_n\wp^{(n-2)}u.$$

Wir haben hierbei n, vorläufig noch unbekannte Coefficienten $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$, die wir aber dadurch bestimmen können, dass $f^n(u)$ mit seinen $n-1$ ersten Ableitungen für u gleich v verschwinden muss, dass also

$$\begin{array}{rrcl}
1) & a_1 + a_2\wp v + a_3\wp' v + \cdots + a_n\wp^{(n-2)}v & = & 0, \\
2) & a_2\wp' v + a_3\wp'' v + \cdots + a_n\wp^{(n-1)}v & = & 0, \\
3) & a_2\wp'' v + a_3\wp''' v + \cdots + a_n\wp^{(n)}v & = & 0, \\
 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & \\
n) & a_2\wp^{(n-1)}v + a_3\wp^{(n)}v + \cdots + a_n\wp^{(2n-3)}v & = & 0.
\end{array}$$

Die erste unter diesen Gleichungen dient nur zur Bestimmung von a_1, die andern bilden ein System von $n-1$ linearen, homogenen Gleichungen mit den $n-1$ Unbekannten $a_2, a_3, \ldots a_n$; folglich muss die Determinante dieses Systems verschwinden.

$$(28.)\qquad D_{n-1}(v) = \begin{vmatrix} \wp' v & \wp'' v & \ldots & \wp^{(n-1)}v \\ \wp'' v & \wp''' v & \ldots & \wp^{(n)}v \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \wp^{(n-1)}v & \wp^{(n)}v & \ldots & \wp^{(2n-3)}v \end{vmatrix} = 0.$$

Zur Untersuchung dieser Determinante $D_{n-1}(v)$ setzen wir statt des bestimmten Werthes v, für den sie verschwindet, den veränderlichen Werth u; dann folgt zunächst, dass $D_{n-1}(u)$ eine ganze Function von $\wp u$ und $\wp' u$ ist, denn die höheren Ableitungen von $\wp u$ sind ganze Functionen von $\wp u$ und $\wp' u$. Vertauschen wir jetzt u mit $-u$, so verändern nur die ungeraden Ableitungen von $\wp u$ ihr Zeichen, während die geraden unverändert bleiben. Dies giebt, wenn

$$m = \frac{n-1}{2} \text{ für ungerades } n$$

$$\text{und } m = \frac{n-2}{2} \text{ für gerades } n \text{ ist,}$$

$$D_{n-1}(-u) = \begin{vmatrix} -\wp'u & +\wp''u & -\wp'''u & \dots \\ +\wp''u & -\wp'''u & +\wp^{IV}u & \dots \\ -\wp'''u & +\wp^{IV}u & -\wp^{V}u & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = (-1)^m \begin{vmatrix} -\wp'u & +\wp''u & -\wp'''u & \dots \\ -\wp''u & +\wp'''u & -\wp^{IV}u & \dots \\ -\wp'''u & +\wp^{IV}u & -\wp^{V}u & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} \wp'u & \wp''u & \wp'''u & \dots \\ \wp''u & \wp'''u & \wp^{IV}u & \dots \\ \wp'''u & \wp^{IV}u & \wp^{V}u & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix},$$

also

$$(29.) \qquad D_{n-1}(-u) = (-1)^{n-1} D_{n-1}(u).$$

Da nun $\wp u$ eine gerade, und $\wp' u$ eine ungerade Function von u ist, so folgt hieraus, dass $D_{n-1}(u)$ für ungerades n eine ganze Function von $\wp u$ allein ist, während $D_{n-1}(u)$ für gerades n eine ganze Function von $\wp u$ ist, multiplicirt mit $\wp' u$.

Um den Grad dieser Functionen zu bestimmen, suchen wir das erste Glied der Entwickelung von $D_{n-1}(u)$ nach Potenzen von u auf, welches wir erhalten, wenn wir von $\wp' u$, $\wp'' u$, ... nur das erste Glied der Entwickelung in $D_{n-1}(u)$ einsetzen. Dies giebt die Determinante

$$\begin{vmatrix} -2!u^{-3} & +3!u^{-4} & \dots & (-1)^{n+1} n! u^{-n-1} \\ +3!u^{-4} & -4!u^{-5} & \dots & (-1)^{n+2}(n+1)! u^{-n-2} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ (-1)^{n+1} n! u^{-n-1} & (-1)^{n+2}(n+1)! u^{-n-2} & \dots & (-1)^{2n-1}(2n-2)! u^{-2n+1} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} 2!u^{-3} & 3!u^{-4} & \dots & n! u^{-n-1} \\ 3!u^{-4} & 4!u^{-5} & \dots & (n+1)! u^{-n-2} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ n! u^{-n-1} & (n+1)! u^{-n-2} & \dots & (2n-2)! u^{-2n+1} \end{vmatrix}.$$

In dieser Determinante heisst das Element, welches in der α^{ten} Horizontalreihe und in der β^{ten} Verticalreihe steht,

$$(\alpha+\beta)! u^{-\alpha-\beta-1};$$

da nun aber jedes Glied der ausgerechneten Determinante aus jeder Horizontalreihe und aus jeder Verticalreihe ein Element enthält, so ist der Exponent von u in jedem Gliede

$$-\Sigma\alpha-\Sigma\beta-1.(n-1)=-2(1+2+\cdots+n-1)-(n-1)=-(nn-1).$$

Das erste Glied in der Entwickelung von $D_{n-1}(u)$ heisst daher

$$(-1)^{n-1}\begin{vmatrix} 2! & 3! & \dots & n! \\ 3! & 4! & \dots & (n+1)! \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ n! & (n+1)! & \dots & (2n-2)! \end{vmatrix} u^{-nn+1}$$

$$= (-1)^{n-1} n [2!3! \dots (n-1)!]^2 u^{-nn+1}.$$

Die Entwickelung von $\wp u$ beginnt mit u^{-2} und die von $\wp' u$ mit $-2u^{-3}$, folglich ist $D_{n-1}(u)$ für ungerades n eine ganze Function $\frac{nn-1}{2}$ten Grades von $\wp u$, und für gerades n eine ganze Function $\frac{nn-4}{2}$ten Grades von $\wp u$, multiplicirt mit $\wp' u$. Der Grad dieser Functionen stimmt genau mit der Anzahl der Werthe von $\wp u$, für welche sie verschwinden müssen. Denn es war $D_{n-1}(u)$ gleich Null für die $nn-1$ Werthe

$$u = v = \frac{2\lambda\omega+2\mu\omega'}{n}.$$

Ist n ungerade, so geben je zwei Werthe von v denselben Werth von $\wp v$, so dass $D_{n-1}(u)$ nur genau für $\frac{nn-1}{2}$ Werthe von $\wp u$ verschwindet.

Ist dagegen n gerade, so sondert sich der Factor $\wp' u$ ab, der für $u=\omega$, ω', $\omega+\omega'$ verschwindet; von den übrig bleibenden $nn-4$ Werthen von v geben wiederum je zwei denselben Werth von $\wp v$, folglich giebt es dann noch genau $\frac{nn-4}{2}$ Werthe von $\wp u$, für welche $D_{n-1}(u)$ verschwindet.

$D_{n-1}(u)$ verschwindet daher genau für dieselben Werthe von $\wp u$ wie $\psi_n(u)$, so dass es also dieser Function bis auf einen constanten Factor gleich ist. Nun beginnt die Entwickelung von $\psi_n(u)$ mit nu^{-nn+1} und die von $D_{n-1}(u)$ mit $(-1)^{n-1}n[2!3!\dots(n-1)!]^2 u^{-nn+1}$, folglich ist

$$(29.)\qquad \psi_n(u) = \frac{(-1)^{n-1}D_{n-1}(u)}{[2!3!\dots(n-1)!]^2},$$

oder

$$(29^a.)\qquad \psi_n(u) = \frac{(-1)^{n-1}}{[2!3!\dots(n-1)!]^2}\begin{vmatrix} \wp' u & \wp'' u & \dots & \wp^{(n-1)} u \\ \wp'' u & \wp''' u & \dots & \wp^{(n)} u \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \wp^{(n-1)} u & \wp^{(n)} u & \dots & \wp^{(2n-3)} u \end{vmatrix}.$$

Diese Darstellung gilt, gleichviel ob n gerade oder ungerade, ob n eine Primzahl oder eine zusammengesetzte Zahl ist.

Es sei noch erwähnt, dass die Gleichung

$$D_{n-1}(u) = 0$$

diejenigen Werthe der Function $\wp u$ liefert, bei denen das Argument der n^{te} Theil einer Periode ist.

Man könnte glauben, dass die Ausrechnung der Determinante grosse Schwierigkeiten macht, dies ist aber nicht in so hohem Grade der Fall, wenn man nicht darauf besteht, $\psi_n(u)$ als Function von $\wp u$ und den Invarianten g_2 und g_3 darzustellen, sondern statt diese drei Grössen einzuführen, die drei Functionen $\wp u$, $\wp' u$ und $\wp'' u$ stehen lässt; dann wird die Ausrechnung durch Benutzung folgender Formeln, die der Verfasser bereits in seiner Dissertation *) angegeben hat, ausserordentlich vereinfacht:

$$\begin{aligned}
\wp''' &= 6(\wp\wp' + \wp'\wp), \\
\wp^{\mathrm{IV}} &= 6(\wp\wp'' + 2\wp'^2 + \wp''\wp), \\
\wp^{\mathrm{V}} &= 6(\wp\wp''' + 3\wp'\wp'' + 3\wp''\wp' + \wp'''\wp), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\wp^{(n+2)} &= 6\left(\wp\wp^{(n)} + \frac{n}{1}\wp'\wp^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{1.2}\wp''\wp^{(n-2)} + \cdots\right).
\end{aligned}$$

In vielen Fällen der Anwendung wird sogar die Ausrechnung der Determinante gar nicht nöthig sein, sondern es wird $\psi_n(u)$ gerade in der Determinantenform wegen ihrer Uebersichtlichkeit am zweckmässigsten zu benutzen sein.

Der Verfasser hat sich bereits von der Richtigkeit dieser Behauptungen bei geometrischen Anwendungen überzeugt, die er demnächst zu veröffentlichen gedenkt.

§. 5. Erweiterung des Multiplicationsproblems.

Es sei jetzt nicht mehr die Aufgabe, eine Gleichung zwischen $\wp(nu)$ und $\wp u$ herzuleiten, sondern es sollen jetzt Relationen aufgesucht werden, die zwischen

$$\wp u, \quad \wp(2u), \quad \wp(3u), \quad \ldots$$

und den Ableitungen dieser Functionen bestehen.

Diese Aufgabe möge zunächst durch ein einfaches Beispiel klar gemacht werden.

*) *L. Kiepert.* De curvis quarum arcus integralibus ellipticis primi generis exprimuntur. Berlin 1870. Calvary. Seite 12.

Die doppeltperiodische Function

$$(30.)\qquad F(u) = \frac{\sigma(u-v)\sigma(u-2v)\sigma(u+3v)}{(\sigma u)^3}$$

lässt sich auf die Form

$$(31.)\qquad F(u) = a_1+a_2\wp u+a_3\wp' u$$

bringen. Da nun $F(u)$ für $u=v,\ 2v,\ -3v$ verschwindet, so ist

$$\begin{aligned} a_1+a_2\wp v\quad +a_3\wp' v\quad &= 0,\\ a_1+a_2\wp(2v)+a_3\wp'(2v) &= 0,\\ a_1+a_2\wp(3v)-a_3\wp'(3v) &= 0, \end{aligned}$$

also

$$(32.)\qquad \begin{vmatrix} 1 & \wp v & \wp' v \\ 1 & \wp(2v) & \wp'(2v) \\ 1 & \wp(3v) & -\wp'(3v) \end{vmatrix} = 0.$$

Ebenso erhalten wir

$$(33.)\qquad \begin{vmatrix} 1 & \wp(mv) & \wp'(mv) \\ 1 & \wp(nv) & \wp'(nv) \\ 1 & \wp(rv) & -\wp'(rv) \end{vmatrix} = 0,$$

wenn

$$r=m+n \quad \text{und} \quad m \gtrless n$$

ist. Dabei ist v eine beliebig veränderliche Grösse, ebenso wie u.

Ganz allgemein lässt sich durch ein entsprechendes Verfahren eine derartige Relation finden zwischen

$$\wp(av),\quad \wp(bv),\quad \dots\quad \wp(mv)$$

und den Ableitungen dieser Grössen, wenn

$$F(u) = \frac{\sigma^\alpha(u-av)\sigma^\beta(u-bv)\dots\sigma^\mu(u-mv)}{(\sigma u)^n}$$

gesetzt wird. Dabei können $a,\ b,\ \dots\ m$ auch positive oder negative *gebrochene* Zahlen sein, während $\alpha,\ \beta,\ \dots\ \mu$ positive ganze Zahlen sind. Ausserdem muss

$$\alpha a+\beta b+\dots+\mu m = 0$$

und

$$\alpha+\beta+\dots+\mu = n$$

sein.

Freiburg i. Br., September 1872.