# Zur Theorie der symmetrischen Functionen.

(Von Herrn *F. Mertens* zu Krakau.)

---

Es sei

$$ft = (t-x_1)(t-x_2)\dots(t-x_n)$$

und $F(t_1, t_2, \dots t_n)$ irgend eine ganze rationale Function der $n$ Grössen $t_1, t_2, \dots t_n$.

Durch successive algebraische Divisionen denke man sich $F(t_1, t_2, \dots t_n)$ in die Form gebracht:

$$F = F_1 ft_1 + F_2 ft_2 + \dots + F_n ft_n + R(t_1, t_2, \dots t_n),$$

wo $F_1, F_2, \dots F_n, R$ lauter ganze rationale Functionen von $t_1, t_2, \dots t_n$ sind, von denen überdies die letzte in Bezug auf keine der Variabeln $t_1, t_2, \dots t_n$ den Grad $n-1$ übersteigt.

Dies vorausgesetzt, zerlege man den Bruch $\frac{R}{ft_1 ft_2 \dots ft_n}$ in Partialbrüche, wie folgt:

$$\frac{R}{ft_1 ft_2 \dots ft_n} = \Sigma \frac{R(x_\alpha, x_\beta, \dots x_\nu)}{f'x_\alpha f'x_\beta \dots f'x_\nu} \frac{1}{t_1 - x_\alpha} \frac{1}{t_2 - x_\beta} \cdots \frac{1}{t_n - x_\nu},$$

wo die Indices $\alpha, \beta, \dots \nu$ unabhängig von einander alle Werthe $1, 2, 3, \dots n$ durchlaufen, entwickle beide Seiten dieser Gleichung nach fallenden Potenzen von $t_1, t_2, \dots t_n$ und vergleiche die Coefficienten von $(t_1 t_2 \dots t_n)^{-1}$. Dies giebt

$$\left[\frac{R}{ft_1 ft_2 \dots ft_n}\right]_{(t_1 t_2 \dots t_n)^{-1}} = \Sigma \frac{R(x_\alpha, x_\beta, \dots x_\nu)}{f'x_\alpha f'x_\beta \dots f'x_\nu}$$

oder

$$\left[\frac{F}{ft_1 ft_2 \dots ft_n}\right]_{(t_1 t_2 \dots t_n)^{-1}} = \Sigma \frac{F(x_\alpha, x_\beta, \dots x_\nu)}{f'x_\alpha f'x_\beta \dots f'x_\nu},$$

da $R(x_\alpha, x_\beta, \dots x_\nu) = F(x_\alpha, x_\beta, \dots x_\nu)$ und

$$\left[\frac{R}{ft_1 ft_2 \dots ft_n}\right]_{(t_1 t_2 \dots t_n)^{-1}} = \left[\frac{F}{ft_1 ft_2 \dots ft_n}\right]_{(t_1 t_2 \dots t_n)^{-1}}$$

ist.

Um nun aus der Summe alle Terme zu eliminiren, in denen nicht alle Indices $\alpha, \beta, \dots \nu$ untereinander verschieden sind, nehme man

$$F = \Delta . V,$$

wo

$$\begin{array}{rccccc} \Delta = & * & (t_1-t_2) & (t_1-t_3) & \ldots\ldots & (t_1-t_n)\times \\ & (t_2-t_1) & * & (t_2-t_3) & \ldots\ldots & (t_2-t_n)\times \\ & \vdots & \vdots & & & \\ & (t_n-t_1) & (t_n-t_2) & \ldots\ldots & (t_n-t_{n-1}) & * \end{array}$$

und $V$ eine ganze rationale Function von $t_1, t_2, \ldots t_n$ ist.

Es ist dann

$$\Delta(x_\alpha, x_\beta, \ldots x_\nu) = f'x_\alpha f'x_\beta \ldots f'x_\nu$$
$$\text{oder} = 0,$$

jenachdem die Indices $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \nu$ alle untereinander verschieden sind oder nicht, und somit

$$\Sigma V(x_\alpha, x_\beta, \ldots x_\nu) = \left[\frac{\Delta V}{ft_1\, ft_2 \ldots ft_n}\right]_{(t_1 t_2 \ldots t_n)^{-1}},$$

wo jetzt die Summe alle Werthe umfasst, welche $V$ durch Permutation der $x_1, x_2, \ldots x_n$ annehmen kann.

Ist nun $V$ eine symmetrische Function, so sind alle diese Werthe einander gleich, und man hat

$$V(x_1, x_2, \ldots x_n) = \frac{1}{n!}\left[\frac{\Delta V}{ft_1\, ft_2 \ldots ft_n}\right]_{(t_1 t_2 \ldots t_n)^{-1}}.$$

Da der Entwickelungscoefficient auf der rechten Seite nur von den in $ft$ und $V$ vorkommenden Coefficienten abhängt, so stellt derselbe somit einen independenten Ausdruck der Function $V$ durch die Coefficienten der Gleichung $ft = 0$ vor.

Krakau, im October 1868.