Einige Betrachtungen über die Gleichungen der Hydrodynamik.

Von D. BOBYLEW in PETERSBURG.

Bei allen Betrachtungen über die Wirbelbewegungen der Flüssigkeiten wird die Reibung zwischen den Theilchen derselben unberücksichtigt gelassen, während doch gerade durch diese Bewegungen die Reibung erzeugt wird; es muss daher wünschenswerth erscheinen, bei derartigen Untersuchungen die von der Reibung abhängigen Glieder mit in den Kreis der Betrachtungen zu ziehen. Diese Aufgabe habe ich in vorliegender Abhandlung zu lösen versucht und habe zu dem Zwecke:

1) Einen allgemeinen Ausdruck hergeleitet für die hydrodynamischen Gleichungen in einem beliebigen Coordinatensystem.

2) und 3) zu zeigen versucht, in welcher Weise einige der von Helmholtz gefundenen Gesetze für die Bewegung der Wirbelfäden durch den Einfluss der Reibung modificirt werden und

4) endlich nachgewiesen, dass der sogenannte hydrodynamische Druck nicht explicite von der Reibung abhängt.

§ 1.

Die bekannten hydrodynamischen Gleichungen von Stokes*)

$$(I) \quad \varrho \left(\frac{d u_s}{dt} - \frac{\partial V}{\partial x_s} \right) + \frac{\partial p}{\partial x_s} - \mu \Delta_2 u_s - \frac{\mu}{3} \frac{\partial \theta}{\partial x_s} = 0 = Q_s \quad (s = 1, 2, 3).$$

$$(II) \quad \theta = \sum_{s=1}^{s=3} \frac{\partial u_s}{\partial x_s} **); \quad \frac{d \varrho}{dt} + \varrho \theta = 0$$

für die innere Masse der Flüssigkeit, und:

*) Transactions of the Cambridge Philosophical society. Vol. VIII part. III (1847) s. 297 etc.

**) $\sum_{s=1}^{s=3} (A_s) = A_1 + A_2 + A_3.$

$$(III) \quad \frac{1}{P} \frac{\partial L}{\partial x_s} (\Pi - p - 2\mu\theta) + \frac{\mu}{P} \left\{ \sum_{n=1}^{n=3} \frac{\partial L}{\partial x_n} \frac{\partial u_s}{\partial x_n} + \sum_{n=1}^{n=3} \frac{\partial L}{\partial x_n} \frac{\partial u_n}{\partial x_s} \right\} + \\ + \nu(u_s - \underline{u}_s) = 0 = S_s; (s = 1, 2, 3).$$

$$P = \sqrt{\left(\frac{\partial L}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial x_3}\right)^2}^*),$$

für die Oberfläche ($L = 0$) der Flüssigkeit, lassen sich in einer anderen Gestalt ausdrücken, in der sie allgemeiner werden. Zu diesem Zwecke will ich sie auf ein beliebiges Coordinatensystem (q_1, q_2, q_3) beziehen.

Es ist aber nöthig, erst einige Ausdrücke anzuführen, welche bei diesen Transformationen vorkommen.

a) Wenn h_k ($k = 1, 2, 3$) der Differentialparameter erster Ordnung der Oberfläche q_k , und ω_{ij} der $\cos$ des Winkels zwischen den Richtungen der h_i und h_j **) sind, so hat man:

$$(4) \quad \sum_{s=1}^{s=3} \frac{\partial q_i}{\partial x_s} \frac{\partial q_j}{\partial x_s} = h_i h_j \omega_{ij} = h_{ij} = h_{ji}***).$$

b) Setzt man:

$$a_k = \frac{\partial \sigma_k}{\partial q_k} (k = 1, 2, 3),$$

wo $\partial \sigma_k$ eine unendlich kleine Verschiebung längs der Coordinatenaxe †) a_k und ∂q_k die ihr entsprechende Aenderung der Coordinate q_k bedeuten, und bemerkt, dass

$$\sum_{s=1}^{s=3} \frac{\partial x_s}{\partial \sigma_i} \frac{\partial x_s}{\partial \sigma_j} = \cos(\alpha_i, \alpha_j),$$

so findet man:

$$(5) \quad \sum_{s=1}^{s=3} \frac{\partial x_s}{\partial q_i} \frac{\partial x_s}{\partial q_j} = a_i a_j \lambda_{ij} = a_{ij} = a_{ji} \dagger\dagger),$$

*) In diesen Gleichungen bedeuten: x_1, x_2, x_3 — die Coordinaten x, y, z ; $u_i = \frac{\partial x_i}{\partial t}$; V — das Potential der äusseren Kräfte; ϱ — die Dichtigkeit der Flüssigkeit; p — den s. g. hydrostatischen Druck; μ und ν — die Coefficienten der inneren und äusseren Reibung; $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{s=1}^{s=3} \frac{\partial}{\partial x_s} u_s$; $\underline{u}_s$ und andere unterstrichene Zeichen beziehen sich auf die Oberfläche des begrenzenden Körpers.

**) Somoff Moyen d'exprimer directement en coordonnées curvilignes quelconques, orthogonales ou obliques, les paramètres différentiels du premier et du second ordre et la courbure d'une surface. p. 3. (Memoires de l'Académie Impériale des sciences de St. Petersburg: VII. Série, Tom. VIII N. 16.)

***) Somoff. I. c. S. 18. ($\omega_{23} = \omega_1, \omega_{31} = \omega_2, \omega_{12} = \omega_3$).

†) Somoff. I. c. S. 3. ($\alpha_1 = \alpha, \alpha_2 = \beta, \alpha_3 = \gamma$).

††) Somoff. I. c. S. 3. ($\lambda_{23} = \lambda, \lambda_{31} = \mu, \lambda_{12} = \nu$); und S. 25.

wo

$$\lambda_{ij} = \cos(\alpha_i, \alpha_j).$$

c) Macht man

$$(6) \quad \Sigma \pm \frac{\partial x_1}{\partial q_1} \frac{\partial x_2}{\partial q_2} \frac{\partial x_3}{\partial q_3} = \omega,$$

so kann man die Ausdrücke bilden:

$$(7) \quad \Sigma \pm \frac{\partial q_1}{\partial x_1} \frac{\partial q_2}{\partial x_2} \frac{\partial q_3}{\partial x_3} = \frac{1}{\omega}.$$

$$(8) \quad \Sigma \pm h_{11} h_{22} h_{33} = \frac{1}{\omega^2}.$$

$$(9) \quad \Sigma \pm a_{11} a_{22} a_{33} = \omega^2 = A = a_1^2 a_2^2 a_3^2 \begin{vmatrix} 1, & \lambda_{12}, & \lambda_{13} \\ \lambda_{21}, & 1, & \lambda_{23} \\ \lambda_{31}, & \lambda_{32}, & 1 \end{vmatrix}^2.$$

Erwägt man, dass

$$(9 \text{ bis}) \quad h_{ik} = \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial a_{ik}} *),$$

so hat man

$$(10) \quad \sum_{k=1}^{k=3} h_{ik} a_{jk} = \begin{cases} 0, & \text{wenn } i > j \text{ oder } j > i \\ 1, & \text{wenn } i = j. \end{cases}$$

d) Dazu hat man noch

$$(11) \quad \sum_{k=1}^{k=3} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial x_j} = \begin{cases} 0, & \text{wenn } i > j \text{ oder } j > i \\ 1, & \text{wenn } i = j. \end{cases}$$

e) Denkt man sich die Gleichungen:

$$(11 \text{ bis}) \quad \sum_{k=1}^{k=3} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial x_1} = 1, \quad \sum_{k=1}^{k=3} \frac{\partial x_2}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial x_1} = 0, \quad \sum_{k=1}^{k=3} \frac{\partial x_3}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial x_1} = 0$$

respective mit $\frac{\partial x_1}{\partial q_3}$, $\frac{\partial x_2}{\partial q_3}$, $\frac{\partial x_3}{\partial q_3}$ multiplicirt und zu einander addirt, so erhält man mit Hilfe von (5):

$$\frac{\partial x_1}{\partial q_3} = \sum_{k=1}^{k=3} a_{k3} \frac{\partial q_k}{\partial x_1},$$

und auf ähnlichem Wege findet man, dass

$$(12) \quad \frac{\partial x_2}{\partial q_1} = \sum_{k=1}^{k=3} a_{k1} \frac{\partial q_k}{\partial x_2}.$$

Dasselbe System (11 bis), nach $\frac{\partial q_3}{\partial x_1}$ aufgelöst, ergibt

$$\frac{\partial q_3}{\partial x_1} = \frac{1}{\omega} \begin{vmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial q_1} & \frac{\partial x_2}{\partial q_2} \\ \frac{\partial x_3}{\partial q_1} & \frac{\partial x_3}{\partial q_2} \end{vmatrix} = \frac{1}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial \left(\frac{\partial x_1}{\partial q_3} \right)}$$

und

*) Somoff. l. c. S. 28.

$$(13) \quad \frac{\partial q_i}{\partial x_s} = \frac{1}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial \left(\frac{\partial x_s}{\partial q_i} \right)}.$$

Wenn man aber ein anderes System, wie z. B.:

$$(11 \text{ tr.}) \quad \sum_{k=1}^{k=3} \frac{\partial x_1}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial x_1} = 1, \quad \sum_{k=1}^{k=3} \frac{\partial x_1}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial x_2} = 0, \quad \sum_{k=1}^{k=3} \frac{\partial x_1}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial x_3} = 0$$

mit $\frac{\partial q_3}{\partial x_1}$, $\frac{\partial q_3}{\partial x_2}$, $\frac{\partial q_3}{\partial x_3}$ multiplicirt und addirt, oder nach $\frac{\partial x_1}{\partial q_3}$ auflöst, so findet man mit Hilfe von (4) und (7):

$$(14) \quad \frac{\partial q_i}{\partial x_s} = \sum_{k=1}^{k=3} h_{ki} \frac{\partial x_s}{\partial q_k}.$$

$$(15) \quad \frac{\partial x_s}{\partial q_i} = \omega \frac{\partial \left(\frac{1}{\omega} \right)}{\partial \left(\frac{\partial q_i}{\partial x_s} \right)}.$$

f) Es ergibt sich leicht, nach (5), dass

$$(16) \quad \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_{ki}}{\partial q_j} + \frac{\partial a_{kj}}{\partial q_i} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k} \right) = \sum_{s=1}^{s=3} \frac{\partial^2 x_s}{\partial q_i \partial q_j} \frac{\partial x_s}{\partial q_k} = f_{ij}^{(k)}$$

ist.

g) Es werden, in den Gleichungen (I) und (III), die Grössen

$$\xi_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right), \quad \xi_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right), \quad \xi_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right),$$

d. i. die Rotationsgeschwindigkeiten*) des Flüssigkeitstheilchens nach den drei Coordinatenaxen eingeführt.

Man erhält dann die Ausdrücke:

$$\frac{du_s}{dt} = \frac{\partial u_s}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial x_s} + 2l_s,$$

$$\Delta_2 u_s = \frac{\partial \theta}{\partial x_s} - 4n_s;$$

dabei sind:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{s=3} u_s^2,$$

$$l_1 = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ \xi_2 & \xi_3 \end{vmatrix}, \quad l_2 = \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ \xi_3 & \xi_1 \end{vmatrix}, \quad l_3 = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ \xi_1 & \xi_2 \end{vmatrix},$$

$$n_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x_3} - \frac{\partial \xi_3}{\partial x_2} \right), \quad n_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi_3}{\partial x_1} - \frac{\partial \xi_1}{\partial x_3} \right), \quad n_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} \right).$$

Die beabsichtigte Transformation soll in den Summen:

*) Helmholtz: Ueber Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen. Crelle's Journal, B. 55, S. 31.

($\xi_1 = \xi$, $\xi_2 = \eta$, $\xi_3 = \zeta$).

$$(IV) \quad \sum_{s=1}^{s=3} Q_s \delta x_s = \sum_{s=1}^{s=3} \left(\varrho \frac{\partial u_s}{\partial t} + 4\mu n_s \right) \delta x_s + 2\varrho \Sigma \pm (\delta x_1) u_2 \xi_3 + \varrho \delta (T - V) + \delta \left(p - \frac{4\mu}{3} \theta \right).$$

$$(V) \quad \sum_{s=1}^{s=3} S_s \delta x_s = (\Pi - p - 2\mu \theta) \frac{\delta L}{P} + \frac{2\mu}{P} \sum_{s=1}^{s=3} \delta x_s \sum_{n=1}^{n=3} \frac{\partial L}{\partial x_n} \frac{\partial u_s}{\partial x_n} - \frac{2\mu}{P} \Sigma \pm (\delta x_1) \cdot \frac{\partial L}{\partial x_2} \cdot \xi_3 + \nu \sum_{s=1}^{s=3} (u_s - \underline{u}_s) \delta x_s$$

ausgeführt werden.

Differentiiren wir $x_s = \text{fonct. } (q_1, q_2, q_3)$ nach t , so erhalten wir:

$$(17) \quad u_s = \frac{\partial x_s}{\partial t} = \sum_{i=1}^{i=3} \frac{\partial x_s}{\partial q_i} q'_i$$

oder nach (12)

$$(18) \quad u_s = \sum_{k=1}^{k=3} \frac{\partial q_k}{\partial x_s} \sum_{i=1}^{i=3} a_{ki} q'_i = \sum_{k=1}^{k=3} p_k \frac{\partial q_k}{\partial x_s},$$

wo

$$(18 \text{ bis}) \quad p_k = \sum_{i=1}^{i=3} a_{ki} q'_i = \frac{\partial T}{\partial q_k},$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=3} \sum_{j=1}^{j=3} a_{ij} q'_i q'_j = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=3} \sum_{j=1}^{j=3} h_{ij} p_i p_j^*)$$

sind; da weiter

$$\frac{\partial \frac{\partial q_k}{\partial x_s}}{\partial t} = 0,$$

so folgt hieraus

$$(19) \quad \sum_{s=1}^{s=3} \frac{\partial u_s}{\partial t} \delta x_s = \sum_{s=1}^{s=3} \delta x_s \sum_{k=1}^{k=3} \frac{\partial p_k}{\partial t} \frac{\partial q_k}{\partial x_s} = \sum_{k=1}^{k=3} \delta q_k \frac{\partial p_k}{\partial t}.$$

Ferner erhält man aus (18)

$$2\xi_1 = \sum_{k=1}^{k=3} \begin{vmatrix} \frac{\partial q_k}{\partial x_2} & \frac{\partial q_k}{\partial x_3} \\ \frac{\partial p_k}{\partial x_2} & \frac{\partial p_k}{\partial x_3} \end{vmatrix};$$

bemerkt man, dass:

$$\frac{\partial p_k}{\partial x_l} = \sum_{i=1}^{i=3} \frac{\partial p_k}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial x_l}$$

ist, so findet man:

$$2\xi_1 = \sum_{k=1}^{k=3} \sum_{i=1}^{i=3} \frac{\partial p_k}{\partial q_i} \left(\frac{\partial q_k}{\partial x_2} \frac{\partial q_i}{\partial x_3} - \frac{\partial q_i}{\partial x_2} \frac{\partial q_k}{\partial x_3} \right);$$

setzt man:

$$(19 \text{ bis}) \quad \Omega_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial p_2}{\partial q_3} - \frac{\partial p_3}{\partial q_2} \right), \quad \Omega_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial p_3}{\partial q_1} - \frac{\partial p_1}{\partial q_3} \right), \quad \Omega_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial p_1}{\partial q_2} - \frac{\partial p_2}{\partial q_1} \right),$$

*) Somoff. I. c. S. 3, 4

$$(20) \quad V_k = \sum_{j=1}^{j=3} a_{kj} \frac{\Omega_j}{\omega},$$

so folgt hieraus bei Rücksicht auf den Ausdruck (15)

$$(21) \quad \xi_1 = \frac{1}{\omega} \sum_{j=1}^{j=3} \frac{\partial x_1}{\partial q_j} \Omega_j; \quad \xi_s = \frac{1}{\omega} \sum_{j=1}^{j=3} \frac{\partial x_s}{\partial q_j} \Omega_j$$

und nach (12)

$$(22) \quad \xi_s = \frac{1}{\omega} \sum_{j=1}^{j=3} \Omega_j \sum_{k=1}^{k=3} \frac{\partial q_k}{\partial x_s} a_{kj} = \sum_{k=1}^{k=3} \frac{\partial q_k}{\partial x_s} V_k$$

Auf ähnliche Weise ergibt sich aus: (22)

$$(23) \quad n_s = \sum_{k=1}^{k=3} \frac{\partial q_k}{\partial x_s} E_k,$$

wo

$$(24) \quad E_k = \frac{1}{\omega} \sum_{j=1}^{j=3} a_{kj} \theta_j.$$

$$(25) \quad \theta_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_2}{\partial q_3} - \frac{\partial V_3}{\partial q_2} \right), \quad \theta_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_3}{\partial q_1} - \frac{\partial V_1}{\partial q_3} \right), \quad \theta_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_1}{\partial q_2} - \frac{\partial V_2}{\partial q_1} \right)$$

sind.

Erwägt man, dass

$$(26) \quad \delta x_s = \sum_{i=1}^{i=3} \frac{\partial x_s}{\partial q_i} \delta q_i.$$

$$(27) \quad \frac{1}{P} \frac{\partial L}{\partial x_s} = \sum_{i=1}^{i=3} \frac{1}{P} \frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial x_s} = \sum_{i=1}^{i=3} \frac{1}{P} \frac{\partial L}{\partial q_i} \sum_{k=1}^{k=3} h_{ik} \frac{\partial x_s}{\partial q_k} = \sum_{k=1}^{k=3} \frac{\partial x_s}{\partial q_k} h_k \cos(Ph_k)^*)$$

sind, und benutzt man die Ausdrücke (17) und (21), so findet man, dass jede der Determinanten

$$\Sigma \pm (\delta x_1) u_2 \xi_3, \quad \Sigma \pm (\delta x_1) \frac{\partial L}{\partial x_2} \xi_3$$

als ein Produkt von anderen Determinanten

$$\Sigma \pm \frac{\partial x_1}{\partial q_1} \frac{\partial x_2}{\partial q_2} \frac{\partial x_3}{\partial q_3} \Sigma \pm (\delta q_1) q_2' \frac{\Omega_3}{\omega},$$

$$\Sigma \pm \frac{\partial x_1}{\partial q_1} \frac{\partial x_2}{\partial q_2} \frac{\partial x_3}{\partial q_3} \Sigma \pm (\delta q_1) (h_2 \cos(Ph_2)) \frac{\Omega_3}{\omega}$$

darstellbar ist, und man erhält:

$$(28) \quad \Sigma \pm (\delta x_1) u_2 \xi_3 = \Sigma \pm (\delta q_1) q_2' \Omega_3; \quad \Sigma \pm (\delta x_1) \frac{\partial L}{\partial x_2} \xi_3 = \Sigma \pm (\delta q_1) (h_2 \cos(Ph_2)) \Omega_3.$$

Man erhält aus (27):

$$\sum_{n=1}^{n=3} \frac{1}{P} \frac{\partial L}{\partial x_n} \frac{\partial u_s}{\partial x_n} = \sum_{j=1}^{j=3} h_j \cos(Ph_j) \sum_{n=1}^{n=3} \frac{\partial u_s}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial q_j} = \sum_{j=1}^{j=3} h_j \cos(Ph_j) \frac{\partial u_s}{\partial q_j};$$

durch Differentiation von (17) nach q_j folgt:

$$\frac{\partial u_s}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{i=3} \frac{\partial x_s}{\partial q_i} \frac{\partial q_i'}{\partial q_j} + \sum_{i=1}^{i=3} \frac{\partial^2 x_s}{\partial q_i \partial q_j} q_i'$$

daher, mit Rücksicht auf (26):

*) Somoff. l. c. S. 8 und 7.

$$\begin{aligned}
& \sum_{s=1}^{s=3} \delta x_s \sum_{n=1}^{n=3} \frac{1}{P} \frac{\partial L}{\partial x_n} \frac{\partial u_s}{\partial x_n} \\
&= \sum_{k=1}^{k=3} \delta q_k \sum_{j=1}^{j=3} h_j \cos(P h_j) \sum_{i=1}^{i=3} \left(\frac{\partial q'_i}{\partial q_j} \sum_{s=1}^{s=3} \frac{\partial x_s}{\partial q_i} \frac{\partial x_s}{\partial q_k} + q'_i \sum_{s=1}^{s=3} \frac{\partial^2 x_s}{\partial q_i \partial q_j} \frac{\partial x_s}{\partial q_k} \right); \\
&\text{oder, nach (5) und (16)} \\
(29) \quad &= \sum_{k=1}^{k=3} \delta q_k \sum_{j=1}^{j=3} h_j \cos(P h_j) \sum_{i=1}^{i=3} \left(a_{ik} \frac{\partial q'_i}{\partial q_j} + q'_i f_{ij}^{(k)} \right).
\end{aligned}$$

Endlich ist:

$$(30) \quad \sum_{s=1}^{s=3} (u_s - \underline{u}_s) \delta x_s = \sum_{k=1}^{k=3} (p_k - \underline{p}_k) \delta q_k.$$

$$(31) \quad P^2 = \sum_{i=1}^{i=3} \sum_{j=1}^{j=3} h_{ij} \frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial L}{\partial q_j} *).$$

$$(32) \quad \theta = \frac{1}{\omega} \sum_{k=1}^{k=3} \frac{\partial(\omega q'_k)}{\partial q_k} **).$$

Wir können jetzt die Ausdrücke (19), (23), (28), (29) und (30) in die Summen (IV) und (V) einführen, wobei wegen der Unabhängigkeit der Grössen q_k von einander die Coefficienten der willkürlichen Aenderungen δq_k einzeln verschwinden müssen. Dies liefert die transformirten Gleichungen:

$$(VI) \quad q \frac{\partial p_k}{\partial t} + q \frac{\partial(T-V)}{\partial q_k} + \frac{\partial(p - \frac{4\mu}{3} \theta)}{\partial q_k} + 4\mu E_k + 2q A_k = 0.$$

$$(33) \quad A_1 = (q'_2 \Omega_3 - q'_3 \Omega_2), \quad A_2 = (q'_3 \Omega_1 - q'_1 \Omega_3), \quad A_3 = (q'_1 \Omega_2 - q'_2 \Omega_1).$$

$$\begin{aligned}
(VII) \quad & (\Pi - p - 2\mu\theta) \frac{1}{P} \frac{\partial L}{\partial q_k} + 2\mu \sum_{j=1}^{j=3} h_j \cos(P h_j) \sum_{i=1}^{i=3} \left(a_{ik} \frac{\partial q'_i}{\partial q_j} + q'_i f_{ij}^{(k)} \right) \\
& - 2\mu K_k + v(p_k - \underline{p}_k) = 0.
\end{aligned}$$

$$(34) \quad K_1 = (\Omega_3 h_2 \cos(P h_2) - \Omega_2 h_3 \cos(P h_3)) \dots \text{etc.}$$

Die Ausdrücke (21) und (22) lassen sich auch so schreiben:

$$\xi_s = \sum_{j=1}^{j=3} \frac{\Omega_j}{\omega} a_j \frac{\partial x_s}{\partial q_j}; \quad \xi_s = \sum_{j=1}^{j=3} V_j h_j \frac{1}{h_j} \frac{\partial q_j}{\partial x_s};$$

hieraus ersieht man, dass $\frac{\Omega_j}{\omega} a_j$ nichts anders, als die Componente nach der Coordinataxe α_j , und $V_j h_j$ die Componente nach dem Differentialparameter h_j der augenblicklichen Rotationsgeschwindigkeit R des Elementes der Flüssigkeit sind; folglich:

*) Somoff. I. c. S. 7.

**) Somoff. I. c. S. 15, 16.

$$(34 \text{ bis}) \quad R^2 = \sum_{i=1}^{i=3} \sum_{j=1}^{j=3} \frac{\Omega_i}{\omega} \frac{\Omega_j}{\omega} a_{ij} = \sum_{i=1}^{i=3} \frac{\Omega_i}{\omega} V_i = \sum_{i=1}^{i=3} \sum_{j=1}^{j=3} V_i V_j h_{ij}.$$

Ferner folgt aus den Gleichungen (19 bis) und (25), dass die Grössen Ω_j und θ_j folgende Gleichungen zu Identitäten machen:

$$(35) \quad \sum_{k=1}^{k=3} \frac{\partial \Omega_k}{\partial q_k} = 0$$

$$(36) \quad \sum_{k=1}^{k=3} \frac{\partial \theta_k}{\partial q_k} = 0$$

Ich will meine Betrachtungen nur auf tropfbare Flüssigkeiten beschränken, für welche $\theta = 0$, das heisst:

$$(37) \quad \sum_{k=1}^{k=3} \frac{\partial (\partial q'_k \omega)}{\partial q_k} = 0.$$

Wenn wir die Ausdrücke (18 bis), (19 bis), (25), (35), (36) und (37) betrachten, so bemerken wir, dass θ_j und E_j ebenso aus V_j und Ω_j , wie diese aus p_j und $q'_j \omega$, gebildet sind; wenn solche Bildungsweise auch umgekehrt für $q'_j \omega$ möglich wäre, so hätten wir:

$$(38) \quad q'_j \omega = D_j + \omega \sum_{k=1}^{k=3} \frac{\partial Q}{\partial q_k} h_{kj}$$

$$D_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial N_2}{\partial q_3} - \frac{\partial N_3}{\partial q_2} \right) \cdot \cdot \text{etc.}$$

$$(39) \quad N_j = \frac{1}{\omega} \sum_{k=1}^{k=3} M_k a_{kj}$$

$$(40) \quad \sum_{k=1}^{k=3} \frac{\partial M_k}{\partial q_k} = 0, \quad \Delta_2 Q = 0.$$

Setzt man diese Ausdrücke für $q'_j \omega$ in die Gleichungen (19 bis), so erhält man ein System partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung, aus welchen man, wenn die Ω_j bekannt sind, die Grössen M_j mit Rücksicht auf (40) bestimmen kann.

Bei dem gewöhnlichen, rechtwinkligen Coordinatensystem nehmen die Ausdrücke (38), (39), (40) und (19 bis) die bekannte von Helmholtz gegebene Form an:

$$u_s = D_s + \frac{\partial Q}{\partial x_s}, \quad \Delta_2 Q = 0, \quad N_j = M_j,$$

$$\sum_{s=1}^{s=3} \frac{\partial N_s}{\partial x_s} = 0, \quad \Omega_s = -\frac{1}{4} \Delta_2 N_s.$$

Im Falle des cylindrisch-polaren Systems, wo:

$$q_1 = z, \quad q_2 = r, \quad q_3 = \varphi, \quad a_1 = a_2 = 1, \quad a_3 = r, \quad \lambda_k = 0, \quad \omega_k = 0, \quad h_1 = h_2 = 1, \quad h_3 = \frac{1}{r},$$

$$\omega = r, \text{ erhalten die vorigen Gleichungen die Form:}$$

$$z' r = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \left(\frac{M_2}{r} \right)}{\partial \varphi} - \frac{\partial (M_3 r)}{\partial r} \right) + r \frac{\partial Q}{\partial z},$$

$$r' r = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial (M_3 r)}{\partial z} - \frac{\partial \left(\frac{M_1}{r} \right)}{\partial \varphi} \right) + r \frac{\partial Q}{\partial r},$$

$$\varphi' r = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \left(\frac{M_1}{r} \right)}{\partial r} - \frac{\partial \left(\frac{M_2}{z} \right)}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial Q}{\partial \varphi},$$

$$\Delta_2 Q = 0, \frac{\partial M_1}{\partial z} + \frac{\partial M_2}{\partial r} + \frac{\partial M_3}{\partial \varphi} = 0$$

$$\Omega_1 = -\frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 M_1}{\partial z^2} + \frac{\partial \left(r \frac{\partial \left(\frac{M_1}{r} \right)}{\partial r} \right)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 M_1}{\partial \varphi^2} \right)$$

$$\Omega_2 = -\frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 M_2}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial r} \frac{\partial M_2}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 M_2}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial M_1}{\partial z} \right)$$

$$\Omega_3 = -\frac{1}{4} \left(\frac{\partial \frac{1}{r} \frac{\partial M_3 r}{\partial z}}{\partial z} + \frac{\partial \frac{1}{r} \frac{\partial M_3 r}{\partial r}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 M_3}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r^3} \frac{\partial M_2}{\partial \varphi} \right).$$

Wenn $\Omega_1 = 0$, $\Omega_2 = 0$, $Q = 0$ und die Bewegung von φ unabhängig ist, so wird:

$$(41) \quad z' r = -\frac{1}{2} \frac{\partial M_3 r}{\partial r}, \quad r' r = \frac{1}{2} \frac{\partial M_3 r}{\partial z}$$

$$\Omega_3 = -\frac{1}{4} \left(\frac{\partial \frac{1}{r} \frac{\partial M_3 r}{\partial r}}{\partial r} + \frac{\partial \frac{1}{r} \frac{\partial M_3 r}{\partial z}}{\partial z} \right)$$

Die Gleichungen (41) sind dieselben, welche in der Abhandlung von Helmholtz*) mit (7 b) bezeichnet sind, das dort vorkommende Zeichen ψ ist gleich dem hier gebrauchten: $-\frac{M_3}{2}$.

§. 2.

Das von Helmholtz gefundene Gesetz: „das Product aus der Rotationsgeschwindigkeit und dem Querschnitt ist in der ganzen Länge desselben Wirbelfadens constant“**) welches durch die Gleichung (35) bewiesen wird, verliert durch die Reibung seine Gültigkeit nicht; es müssen demnach die Wirbelfäden geschlossen sein. Um zu zeigen, dass die anderen, die Bewegung der Wirbelfäden betreffenden, Gesetze

*) l. c. §. 50.

**) l. c. §. 36.

ihre Strenge verlieren, wollen wir zu den Gleichungen (VI) zurückkehren.

Indem wir, nach (37), $\varrho = \text{const.}$ setzen, lässt sich die obige Formel so schreiben:

$$(VIII) \quad \frac{\partial p_k}{\partial t} - \frac{\partial U}{\partial q_k} + \frac{4\mu}{\varrho} E_k + 2A_k = 0 \quad (k = 1, 2, 3),$$

$$U = V - \frac{p}{\varrho} - T;$$

aus diesen Gleichungen kann man durch entsprechende Differentiationen und Subtractionen U eliminiren, und erhält dann:

$$(42) \quad \begin{cases} \frac{\partial \Omega_1}{\partial t} + \frac{\partial A_2}{\partial q_3} - \frac{\partial A_3}{\partial q_2} + \frac{2\mu}{\varrho} \left(\frac{\partial E_2}{\partial q_3} - \frac{\partial E_3}{\partial q_2} \right) = 0 \\ \frac{\partial \Omega_2}{\partial t} + \frac{\partial A_3}{\partial q_1} - \frac{\partial A_1}{\partial q_3} + \frac{2\mu}{\varrho} \left(\frac{\partial E_3}{\partial q_1} - \frac{\partial E_1}{\partial q_3} \right) = 0 \\ \frac{\partial \Omega_3}{\partial t} + \frac{\partial A_1}{\partial q_2} - \frac{\partial A_2}{\partial q_1} + \frac{2\mu}{\varrho} \left(\frac{\partial E_1}{\partial q_2} - \frac{\partial E_2}{\partial q_1} \right) = 0. \end{cases}$$

Berücksichtigen wir ferner noch, dass zum Beispiel:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_2}{\partial q_3} - \frac{\partial A_3}{\partial q_2} &= \partial \left[\frac{q'_3 \omega, q'_1}{\Omega_3, \frac{\Omega_1}{\omega}} \right] - \partial \left[\frac{q'_1, q'_2 \omega}{\Omega_1, \Omega_2} \right] = \\ &= \frac{\Omega_1}{\omega} \sum_{k=2}^{k=3} \frac{\partial (q'_k \omega)}{\partial q_k} + \sum_{k=2}^{k=3} \left(q'_k \omega \frac{\partial \left(\frac{\Omega_1}{\omega} \right)}{\partial q_k} - \Omega_k \frac{\partial q'_1}{\partial q_k} \right) - q'_1 \sum_{k=2}^{k=3} \frac{\partial \Omega_k}{\partial q_k} = \\ &= \sum_{k=1}^{k=3} \left(\frac{\partial \left(\frac{\Omega_1}{\omega} \right)}{\partial q_k} q'_k \omega - \frac{\partial q'_1}{\partial q_k} \Omega_k \right), \end{aligned}$$

so nehmen die Gleichungen endlich folgende Gestalt an:

$$(43) \quad \begin{cases} \frac{d \left(\frac{\Omega_1}{\omega} \right)}{dt} = \sum_{k=1}^{k=3} \frac{\Omega_k}{\omega} \frac{\partial q'_1}{\partial q_k} - \frac{2\mu}{\varrho} \left(\frac{\partial E_2}{\partial q_3} - \frac{\partial E_3}{\partial q_2} \right) \\ \frac{d \left(\frac{\Omega_2}{\omega} \right)}{dt} = \sum_{k=1}^{k=3} \frac{\Omega_k}{\omega} \frac{\partial q'_2}{\partial q_k} - \frac{2\mu}{\varrho} \left(\frac{\partial E_3}{\partial q_1} - \frac{\partial E_1}{\partial q_3} \right) \\ \frac{d \left(\frac{\Omega_3}{\omega} \right)}{dt} = \sum_{k=1}^{k=3} \frac{\Omega_k}{\omega} \frac{\partial q'_3}{\partial q_k} - \frac{2\mu}{\varrho} \left(\frac{\partial E_1}{\partial q_2} - \frac{\partial E_2}{\partial q_1} \right). \end{cases}$$

Hieraus ergibt sich

1) Wenn für ein Molekül die Anfangswerthe $\frac{\Omega_i}{\omega}$ gleich Null sind, so kann es doch in die Wirbelbewegung eingeschlossen werden, wenn die Glieder $\left(\frac{\partial E_i}{\partial q_j} - \frac{\partial E_j}{\partial q_i} \right)$ nicht $= 0$ sind.

2) Das Product aus der Rotationsgeschwindigkeit in den Querschnitt eines Wirbelfadens kann nur dann bei der Fortbewegung constant bleiben, wenn $\begin{pmatrix} \epsilon E_i & \epsilon E_j \\ \partial q_j & \epsilon q_i \end{pmatrix}$ gleich Null ist.

§. 3.

Wenn in einer Flüssigkeit eine oder mehrere Wirbelmassen entstanden sind, so werden sie durch Reibung an der Oberfläche ihre lebendige Kraft allmählig an die umgebende Flüssigkeit abgeben. In einigen Fällen lässt sich nachweisen, dass die ganze lebendige Kraft der Flüssigkeit durch die Grössen R fortwährend vernichtet wird.

Wenn wir die Gleichungen (VIII) nach Multiplication mit $q q_1$, $q q_2$, $q q_3$ summiren und über das ganze Volumen der flüssigen Masse integriren, so erhalten wir

$$(44) \int \int \int \frac{\partial(\varphi T)}{\partial t} \omega \partial q_1 \partial q_2 \partial q_3 = \int (\varphi V - p - \varphi T) \sum_{k=1}^{k=3} q'_k a_k \cos(P \alpha_k) \partial s \\ - 4\mu \int \int \int \sum_{k=1}^{k=3} E_k q'_k \omega \partial q_1 \partial q_2 \partial q_3,$$

weil: $\varphi = \text{const.}, \frac{\partial T}{\partial t} = \sum_{k=1}^{k=3} \frac{\partial p_k}{\partial t} q'_k$ *)

$$\int \int \int \frac{\partial(\varphi U)}{\partial q_1} \omega \partial q_1 \partial q_2 \partial q_3 = \int \int U \varphi q'_1 \omega \partial q_2 \partial q_3 - \int \int \int U \varphi \frac{\partial(q'_1 \omega)}{\partial q_1} \partial q_1 \partial q_2 \partial q_3 \text{ etc.} \\ \partial q_2 \partial q_3 = \mp \frac{a_1}{\omega} \partial s \cos(P \alpha_1) \text{**}) \text{ etc.}$$

und $\theta = 0$.

Nach einigen Transformationen und Integration erhält man (nach (24), (25), (19 bis) und (34 bis))

$$\int \int \int \sum_{k=1}^{k=3} E_k q'_k \omega \partial q_1 \partial q_2 \partial q_3 = \int \int \int \sum_{i=1}^{i=3} \theta_i p_i \partial q_1 \partial q_2 \partial q_3 = \\ = \frac{1}{2} \int \sum_{i=1}^{i=3} \frac{B_i}{\omega} a_i \cos(P \alpha_i) \partial s + \int \int \int R^2 \omega \partial q_1 \partial q_2 \partial q_3,$$

wo

$B_1 = (p_2 V_3 - p_3 V_2)$, $B_2 = (p_3 V_1 - p_1 V_3)$, $B_3 = (p_1 V_2 - p_2 V_1)$, sind.

Dann nimmt (44) folgende Form an:

*1) $T = \Sigma \Sigma h_{ij} p_i p_j$, $\frac{\partial h_{ij}}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial T}{\partial t} = \sum_{k=1}^{k=3} \frac{\partial T}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial t}$; $\frac{\partial T}{\partial p_k} = q'_k$, Somoff. I. c. S. 4.

*2) Somoff. I. c. S. 11.

$$(45) \quad \iiint \frac{d(\varrho T)}{dt} \omega \vartheta q_1 \vartheta q_2 \vartheta q_3 = - \int \sum_{i=1}^{i=3} \varrho T q'_i a_i \cos(P \alpha_i) \vartheta s + \\ + \int \sum_{i=1}^{i=3} \left((\varrho V - p) q'_i - \frac{2\mu B_i}{\omega} \right) a_i \cos(P \alpha_i) \vartheta s \\ - 4\mu \iiint R^2 \omega \vartheta q_1 \vartheta q_2 \vartheta q_3,$$

oder

$$(46) \quad \iiint \frac{d(\varrho T)}{dt} \omega \vartheta q_1 \vartheta q_2 \vartheta q_3 = \int \sum_{i=1}^{i=3} \left((\varrho V - p) q'_i - \frac{2\mu B_i}{\omega} \right) a_i \cos(P \alpha_i) \vartheta s \\ - 4\mu \iiint R^2 \omega \vartheta q_1 \vartheta q_2 \vartheta q_3,$$

wenn $\int \sum_{i=1}^{i=3} \varrho T q'_i a_i \cos(P \alpha_i) \vartheta s$ umgekehrt in $\int \sum_{i=1}^{i=3} \frac{d(\varrho T)}{dt} q'_i \omega \vartheta q_1 \vartheta q_2 \vartheta q_3$ zurückgeführt wird.

Wenn die Flüssigkeit sich in einem geschlossenen Gefässe befindet, an dessen Wände sie so fest haftet, dass $(q'_i)_{cs} = 0$ genommen werden kann, so verwandeln sich die Gleichungen (45) und (46) in folgende

$$\frac{dk}{dt} = \frac{\partial k}{\partial t} = - 4\mu \iiint R^2 \omega \vartheta q_1 \vartheta q_2 \vartheta q_3 \\ k = \iiint \varrho T \omega \vartheta q_1 \vartheta q_2 \vartheta q_3;$$

das heisst in Worten: die Flüssigkeit wird zu dem Zustande der Ruhe streben, weil die Bewegungen, bei denen ein Geschwindigkeitspotential existirt, in unserem Falle unmöglich sind*).

Wenn die Flüssigkeit sich nach allen Seiten in's Unendliche erstreckt und ihre unendlich weit liegenden Theilchen im Zustande der Ruhe sich befinden, so wird nach (46):

$$\frac{dk}{dt} = - 4\mu \iiint R^2 \omega \vartheta q_1 \vartheta q_2 \vartheta q_3.$$

Es werden sich also die Wirbelbewegungen fortwährend vernichten.

§. 4.

Suchen wir nun die Gleichung zur Bestimmung von p zu bilden. Multipliciren wir die Gleichungen (VIII) respective mit h_{1k} und nehmen wir die Summe dieser Producte, so erhalten wir:

$$\frac{\partial q'_i}{\partial t} - \sum_{k=1}^{k=3} h_{1k} \frac{\partial U}{\partial q_k} + \frac{4\mu}{\varrho} \frac{\theta_1}{\omega} + 2 \sum_{k=1}^{k=3} A_k h_{1k} = 0.$$

*) Helmholtz. l. c. § 32.

Nun ist aber nach (18 bis), (20), und (9):

$$B_1 = \left| \begin{array}{c} p_2, p_3, \\ V_2, V_3 \end{array} \right| = \frac{1}{\omega} \left| \begin{array}{cc} \sum_{k=1}^{k=3} q'_k a_{k2}, & \sum_{k=1}^{k=3} q'_k a_{k3} \\ \sum_{k=1}^{k=3} \Omega_k a_{k2}, & \sum_{k=1}^{k=3} \Omega_k a_{k3} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{\omega}{A} \left(A_1 \frac{\partial A}{\partial a_{11}} + A_2 \frac{\partial A}{\partial a_{21}} + A_3 \frac{\partial A}{\partial a_{31}} \right),$$

oder nach (9 bis)

$$\frac{B_1}{\omega} = \sum_{k=1}^{k=3} A_k h_{k1};$$

und analog für B_2 und B_3 .

Auf diesem Wege erhält man die Gleichungen:

$$(1X) \quad \frac{\partial q'_i}{\partial t} - \sum_{k=1}^{k=3} h_{ik} \frac{\partial U}{\partial q_k} + \frac{4\mu}{\varrho} \frac{\theta_i}{\omega} + \frac{2B_i}{\omega} = 0 \quad (i = 1, 2, 3).$$

Multiplieirt man diese Gleichungen mit ω , nimmt man ihre Derivirte in Bezug auf q_i und summirt sie, so findet man

$$\omega \Delta_2 U = 2 \sum_{i=1}^{i=3} \frac{\partial B_i}{\partial q_i}$$

eine Gleichung, in welcher μ nicht explicite vorkommt; man kann demnach in gewissen Fällen U als eine Potentialfunction einer Masse betrachten, welche im Inneren der Flüssigkeit mit der Dichtigkeit

$-\frac{1}{2\pi\omega} \sum_{i=1}^{i=3} \frac{\partial B_i}{\partial q_i}$ verbreitet ist, also:

$$U = -\frac{1}{2\pi} \iiint \left(\sum_{i=1}^{i=3} \frac{\partial B_i}{\partial q_i} \right) \frac{1}{r} \cdot \partial q_1 \partial q_2 \partial q_3,$$

wo r — die Entfernung zwischen dem Elemente $\omega \partial q_1 \partial q_2 \partial q_3$ und dem Punkte, für welchen U gesucht wird, bedeutet.