Staudt's Untersuchungen über das Pascal'sche Sechseck und einige sich daran anschliessende Bemerkungen.

Von L. Klug in Klausenburg.

Im 62. Bande des Crelle'schen Journals, in dem Aufsätze „Über die Steiner'schen Gegenpunkte etc.“ von Staudt befinden sich (Seite 147–150) zwei Sätze, laut welchen man Pascal'sche Sechsecke aus sechs, sich zu dreien in ein Steiner'sches Gegenpunktpaar schneidenden Pascal'schen Geraden construieren kann. Die Sätze sagen ferner, dass diesen ∞^1 Pascal'schen Sechsecken umschriebenen Kegelschnitte einem Büschel mit zwei Paar conjugiert-imaginären Grundpunkten angehören, und dass man in jedem Kegelschnitte des Büschels zwei solche Sechsecke einbeschreiben kann, dass sechs ihrer Pascal'schen Geraden, mit den gegebenen coincidieren.

Diese Sätze, welche auch noch andere Eigenschaften der Sechsecke, so wie der ihnen umschriebenen Kegelschnitte ausdrücken, sind an der citierten Stelle nicht bewiesen, oder wenigstens folgen sie nicht unmittelbar aus den Vorhergehenden. Ich habe deshalb versucht diese, bisher wenig beachteten Sätze, die im siebenten Punkte dieses Aufsatzes mit geänderter Bezeichnung wörtlich folgen, zu beweisen.

* * *

1 Auf einen Kegelschnitt k nehmen wir sechs Punkte 1 2 3 4 5 6 an. Dieselben sind die Eckpunkte von sechs einfachen Pascal'schen Sechsecken

$$\begin{array}{ll} 1\ 6\ 3\ 2\ 5\ 4 = p^I & 1\ 6\ 3\ 4\ 5\ 2 = \pi^{IV} \\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6 = p^{II} & 1\ 2\ 3\ 6\ 5\ 4 = \pi^V \\ 1\ 4\ 3\ 6\ 5\ 2 = p^{III} & 1\ 4\ 3\ 2\ 5\ 6 = \pi^{VI} \end{array}$$

von deren Pascal'schen Geraden p^I p^{II} p^{III} und π^{IV} π^V π^{VI} sich in Steiner'sches Gegenpunktpaar

$$P = (p^I p^{II} p^{III}), \quad \Pi = (\pi^{IV} \pi^V \pi^{VI})$$

schneiden.

Durch P und Π ziehen wir je drei Geraden $p^I p^{II} p^{III}$, $\pi^{IV} \pi^V \pi^{VI}$ derart, dass $p^{II} p^{III} p^I p^I$, $p^{III} p^I p^{II} p^{II}$, $p^I p^{II} p^{III} p^{III}$, $\pi^V \pi^{VI} \pi^{IV} \pi^{IV}$, $\pi^{VI} \pi^{IV} \pi^V \pi^V$, $\pi^{IV} \pi^V \pi^{VI} \pi^{VI}$ harmonische Würfe bilden sollen.

Wird zur Abkürzung der Punkte $(p^i \pi^j)$ mit $(p^i \pi^j)'$ bezeichnet, dann lässt sich zeigen, dass

$$\begin{array}{llll} (p^I \pi^{IV})' \text{ auf der Geraden } 56, & (p^{II} \pi^{IV})' \text{ auf der Geraden } 14, \\ (p^I \pi^V)' \text{ " " " } 34, & (p^{II} \pi^V)' \text{ " " " } 25, \\ (p^I \pi^{VI})' \text{ " " " } 12, & (p^{II} \pi^{VI})' \text{ " " " } 36, \\ (p^{III} \pi^{IV})' \text{ auf der Geraden } 23, \\ (p^{III} \pi^V)' \text{ " " " } 16, \\ (p^{III} \pi^{VI})' \text{ " " " } 45 \end{array}$$

liegt.

Es sind nämlich

$$\begin{array}{ll} p^I, \pi^{IV}, 56 \text{ die Diagonalen des Viereckes } [16 \ 25 \ 45 \ 36], \\ p^I, \pi^V, 34 \text{ " " " } [14 \ 23 \ 45 \ 36], \end{array}$$

also wird die Diagonale p^I die Punkte $(\pi^{IV}, 56)$, $(\pi^V, 36)$ so wie ihre Verbindungslinie harmonisch trennen von 45, 36. Aber die Schnittpunkte (12, 45), (12, 36) liegen bezw. auf p^{II}, p^{III} , also geht die Gerade p^I durch den Schnittpunkt von 12 mit der Geraden $[(\pi^{IV}, 56)(\pi^V, 34)]$. Dieser Schnittpunkt ist aber ein Diagonalkpunkt des Vierseits $[\pi^{IV} \pi^V 56 \ 34]$ welcher daher die Diagonale π^{VI} von den Seiten $\pi^{VI} \pi^V$ harmonisch trennt und als solcher auf der Geraden π^{VI} liegt. Der Punkt $(p^I \pi^{VI})'$ ist daher schließlich ein Punkt der Geraden 12.

Nachdem der Punkt $(p^I \pi^{VI})'$ die Gerade p^I von 45, 36 und die Gerade π^{VI} von 34, 56 harmonisch trennt, so trennen die Punkte $(p^I \pi^{VI})'$, $(p^I \pi^{VI})'$ sämtliche Gegenseiten des Viereckes 3 4 5 6 harmonisch und sind daher conjugierte Pole in Hinsicht auf den Kegelschnitt k . Bezeichnet man also mit Staudt solche Punkte wie $(p^i \pi^j)$, $(p^i \pi^j)'$ gegenüberliegend, so hat man:

Die Pascal'schen Geraden $p^I p^{II} p^{III}$ der Sechsecke 1 6 3 2 5 4, 1 2 3 4 5 6, 1 4 3 6 5 2 schneiden die Pascal'schen Geraden $\pi^{IV} \pi^V \pi^{VI}$ der Sechsecke 1 6 3 4 5 2, 1 2 3 6 5 4, 1 4 3 2 5 6 in neun Punkten, und die drei Geraden $(p^I p^{II} p^{III})'$, welche je zwei der drei ersten Pascal'schen Geraden von der dritten harmonisch trennen, schneiden die drei Geraden $(\pi^{IV} \pi^V \pi^{VI})'$, welche je zwei der anderen Pascal'schen Geraden von der dritten harmonisch trennen, ebenfalls in neun Punkten. Von diesen achtzehn Schnittpunkten sind je zwei gegenüberliegende, wie $(p^i \pi^j)$, $(p^i \pi^j)'$, conjugierte Pole in

Hinsicht auf den, dem Pascalschen Sechseck 123456 umschriebenen Kegelschnitt k . Die neun letzteren Schnittpunkte $(p^i \pi^i)'$ liegen auf denjenigen neun Geraden, welche die Eckpunkte des Dreieckes 135 mit den Eckpunkten des Dreieckes 246 verbinden.

2. Die Strahlenpaare $p^I p^{I'}$, $p^{II} p^{II'}$, $p^{III} p^{III'}$ und $\pi^{IV} \pi^{IV'}$, $\pi^V \pi^{V'}$, $\pi^{VI} \pi^{VI'}$ sind conjugierte Strahlen einer Involution J_p und einer Involution J_π . Es seien $p^l p^{l'}$ und $\pi^u \pi^{u'}$ zwei beliebige Paare conjugierte Strahlen der involutorischen Büschel J_p, J_π , und l möge irgend einen der Zeiger IV, V, VI bedeuten.

Wegen J_p ist

$$\pi^l (p^I p^{II} p^{III} p^l) \overline{\wedge} \pi^{l'} (p^I p^{II} p^{III} p^{l'})$$

und da die drei ersten Paare entsprechender Punkte conjugierte Pole sind in Hinsicht auf k , so sind es auch die Punkte $(\pi^l p^l)$, $(\pi^{l'} p^{l'})$. Daher werden in der projectiven Beziehung

$$p^l (\pi^{IV} \pi^V \pi^{VI} \pi^u) \overline{\wedge} p^{l'} (\pi^{IV} \pi^V \pi^{VI} \pi^{u'})$$

die drei ersten, also auch das letzte entsprechende Punktepaar conjugierten Pole sein in Hinsicht auf k . D. h.:

Zwei beliebige conjugierte Strahlen des involutorischen Büschels J_p , schneiden zwei beliebige conjugierte Strahlen des involutorischen Büschels J_π , in conjugierten Polen in Hinsicht auf k .

Davon haben wir als besonderen Fall:

Die conjugiert-imaginären Doppelstrahlen xx_1 , yy_1 der involutorischen Büschel J_p, J_π schneiden sich auf den Kegelschnitt k .

Oder allgemeiner gefasst:

Diejenigen conjugiert-imaginären Strahlenpaare, welche mit den durch ein Steiner'sches Gegenpunktepaar gehenden Pascalschen Geraden äquianharmonisch liegen, schneiden sich auf den, dem Pascalschen Sechseck umschriebenen Kegelschnitt.

Anmerkung. Trennen in J_p die conjugierten Strahlenpaare $P\Pi$, PO ; r, r' einander harmonisch, und trennen in J_π die conjugierten Strahlenpaare ΠP , ΠO ; ρ, ρ' einander ebenfalls harmonisch, dann schneidet jede der reellen Geraden

$$t_{135} = |(r\rho)(r'\rho')|, \quad t_{246} = |r\rho' r'\rho|$$

die J_p und J_π in dieselbe involutorische Punktreihe. Die Geraden $P\Pi, t_{135}, t_{246}$ sind daher die reellen Diagonalen des imaginären Vierseits $xx_1 yy_1$, und das Geradenpaar $t_{135} t_{246}$ trennt das Punktepaar $P\Pi$ harmonisch.

Ferner ist der Schnittpunkt O der Geraden $t_{135} t_{246}$, wie auch der Schnittpunkt der zu $|P\Pi|$ conjugierten Strahlen in J_p, J_π , der Pol der Geraden $P\Pi$ in Hinsicht auf k .

3. Nachdem die Strahlen $p^I p^{II} p^{III} x x_1$, $\pi^{IV} \pi^V \pi^{VI} y y_1$ äquianharmonisch sind, so hat man

$$p^I p^{II} p^{III} x x_1 \dots \overline{\wedge} \left\{ \begin{array}{l} \pi^{IV} \pi^V \pi^{VI} y y_1 \dots \\ \pi^V \pi^{VI} \pi^{IV} y y_1 \dots \\ \pi^{VI} \pi^{IV} \pi^V y y_1 \dots \\ \pi^{IV} \pi^{VI} \pi^V y_1 y \dots \\ \pi^V \pi^{IV} \pi^{VI} y_1 y \dots \\ \pi^{VI} \pi^V \pi^{IV} y_1 y \dots \end{array} \right.$$

Die Erzeugnisse der Strahlenbüschel, welche durch diese sechs projective Beziehungen bestimmt sind, seien die Kegelschnitte $k_5 k_3 k_1 k_6 k_4 k_2$.

Diese Kegelschnitte gehen nicht bloß durch die Schnittpunkte der entsprechenden Strahlen der drei ersten Paare ($p^i \pi^i$), sondern auch durch die gegenüber liegenden Punkte ($p^i \pi^i$). Ausserdem gehen die drei ersten Kegelschnitte durch die conjugiert-imaginären Punkte $(xy)(x_1 y_1)$, die drei übrigen durch die conjugiert-imaginären Punkte $(x y_1)(x_1 y)$.

Also schneiden die Kegelschnitte $k k_1 k_3 k_5$ die Gerade t_{1357} , und die Kegelschnitte $k k_2 k_4 k_6$ die Gerade t_{246} , in denselben zwei conjugiert-imaginären Punkten.

Die Kegelschnitte $k_1 k_2 k_3 k_4 k_5 k_6$ gehen noch bezw. durch die Eckpunkte 123456 des Pascal'schen Sechseckes.

Betrachtet man nämlich die Punkte

$$(p^I \pi^{IV})' P(p^{II} \pi^V) \Pi(p^{III} \pi^{VI})' 5$$

als die auf einander folgenden Punkte eines einfachen Sechseckes, dann sind die auf einander folgenden Seiten desselben

$$p^I p^{II} \pi^V \pi^{IV} 45 56,$$

von welchen sich die gegenüber liegenden in der Geraden $\overline{12}$ schneiden. Aber der Kegelschnitt, welcher durch die fünf ersten angenommenen Punkte geht, ist k_5 , also geht k_5 auch durch den Punkt 5. Daher:

Drei durch einen Steiner'schen Punkt gehende Pascal'sche Geraden schneiden die drei durch seinen Gegenpunkt gehenden Pascal'schen Geraden in neun Punkten; von diesen liegen je drei, von welchen keine zwei derselben Pascal'schen Geraden angehören, mit den Steiner'schen Gegenpunkten und mit einem Eckpunkte des Pascal'schen Sechseckes auf einen Kegelschnitt. Es gibt sechs solche Kegelschnitte; von diesen schneiden drei und ebenso die übrigen drei, den dem Pascal'schen Sechseck umschriebenen Kegelschnitt k in denselben conjugiert-imaginären

Punkten. Der Schnittpunkt der zwei reellen Träger dieser zwei Paar conjugiert-imaginären Punkte ist der Pol der Verbindungsgeraden der Steiner'schen Gegenpunkte in Hinsicht auf k .

4. Betrachten wir das Punktepaar $P\Pi$ als einen degenerierten Kegelschnitt $[P\Pi]$, die Strahlen $p^i p'^i \pi^i \pi'^i$ als seine Tangenten. Beziehen wir diese Strahlen projectiv so auf einander, dass den Strahlen

$$p^I p^{II} p^{III}$$

die Strahlen

$$\begin{array}{lll} \pi^{VI} \pi^{IV} \pi^V & \pi^V \pi^{VI} \pi^{IV} & \pi^{IV} \pi^V \pi^{VI} \\ \pi^{VI} \pi^V \pi^{IV} & \pi^V \pi^{IV} \pi^{VI} & \pi^{IV} \pi^{VI} \pi^V \\ (\pi^{VI} \pi^{IV} \pi^V)' & (\pi^V \pi^{VI} \pi^{IV})' & (\pi^{IV} \pi^V \pi^{VI})' \\ (\pi^{VI} \pi^V \pi^{IV})' & (\pi^V \pi^{IV} \pi^{VI})' & (\pi^{IV} \pi^{VI} \pi^V)' \end{array}$$

entsprechen, und bezeichnen wir die zwölf Projectivität-Mittelpunkte welche zu diesen zwölf projectiven Beziehungen gehören, mit

$$\begin{array}{ccc} K_1 & K_3 & K_5 \\ K_2 & K_4 & K_6 \\ K_1' & K_3' & K_5' \\ K_2' & K_4' & K_6' \end{array}$$

Den Strahlen $(p^I p^{II} p^{III})'$ entsprechen bei den sechs ersten Beziehungen ebensolche mit „ $'$ “ versehene Strahlen π^i , in den übrigen Bezeichnungen ebensolche Strahlen π^i aber ohne „ $'$ “, wie den drei Strahlen $p^I p^{II} p^{III}$.

Die gegenüberliegenden Punktepaare

$$\begin{array}{ll} (p^I \pi^{VI}) (p^I \pi^{VI})', (p^{II} \pi^{IV}) (p^{II} \pi^{IV})', (p^{III} \pi^V) (p^{III} \pi^V)' & \text{bilden auf } k_1 \text{ eine Involution } J_1 \\ (p^I \pi^V) (p^I \pi^V)', (p^{II} \pi^{VI}) (p^{II} \pi^{VI})', (p^{III} \pi^{IV}) (p^{III} \pi^{IV})' & \text{bilden auf } k_3 \text{ eine Involution } J_3 \\ (p^I \pi^{IV}) (p^I \pi^{IV})', (p^{II} \pi^V) (p^{II} \pi^V)', (p^{III} \pi^{VI}) (p^{III} \pi^{VI})' & \text{bilden auf } k_5 \text{ eine Involution } J_5 \\ (p^I \pi^{VI}) (p^I \pi^{VI})', (p^{II} \pi^V) (p^{II} \pi^V)', (p^{III} \pi^{IV}) (p^{III} \pi^{IV})' & \text{bilden auf } k_2 \text{ eine Involution } J_2 \\ (p^I \pi^V) (p^I \pi^V)', (p^{II} \pi^{IV}) (p^{II} \pi^{IV})', (p^{III} \pi^{VI}) (p^{III} \pi^{VI})' & \text{bilden auf } k_4 \text{ eine Involution } J_4 \\ (p^I \pi^{IV}) (p^I \pi^{IV})', (p^{II} \pi^{VI}) (p^{II} \pi^{VI})', (p^{III} \pi^V) (p^{III} \pi^V)' & \text{bilden auf } k_6 \text{ eine Involution } J_6, \end{array}$$

deren Involution-Mittelpunkte $K_1' K_3' K_5' K_2' K_4' K_6'$ sind.

Die Pole der Verbindungsgeraden der gegenüber liegenden Punkte in Hinsicht auf die Kegelschnitte k_i , auf welchen sie liegen,

ferner die Schnittpunkte dieser Verbindungsgeraden mit den Involutions-Axen der durch die gegenüber liegenden Punkte als conjugierten Punkten bestimmten Involutionen J_i sind bezw.

$$\begin{array}{ll} K_2 K_4 K_6 & K'_2 K'_4 K'_6 \\ K_4 K_6 K_2 & K'_4 K'_6 K'_2 \\ K_6 K_2 K_4 & K'_6 K'_2 K'_4 \\ K_1 K_5 K_3 & K'_1 K'_5 K'_3 \\ K_3 K_1 K_5 & K'_3 K'_1 K'_5 \\ K_5 K_3 K_1 & K'_5 K'_3 K'_1 \end{array}$$

So z. B. ist der Pol der Verbindungsgeraden der gegenüber liegenden Punkte $(p^I \pi^{VI})(p^I \pi^{VI})'$ in Hinsicht auf k , der Schnittpunkt K_2 der Geraden $|(p^{II} \pi^{IV})(p^{III} \pi^V)|$, $|(p^{II} \pi^{IV})(p^{III} \pi^V)|$.

Ferner schneidet die Gerade $|(p^I \pi^{VI})(p^I \pi^{VI})'|$, welche die conjugierten Punkte $(p^I \pi^{VI}), (p^I \pi^{VI})'$ der Involution J_1 verbindet, die zu dieser Involution gehörige Involutions-Axe im Schnittpunkte K'_2 der Geraden $|(p^{II} \pi^{IV})(p^{III} \pi^V)|$, $|(p^{III} \pi^V)(p^{II} \pi^{IV})'|$.

Die conjugierten Punktepaare $K_2 K'_2, K_4 K'_4, K_6 K'_6$ bilden eine Involution J_{135} , die conjugierten Punktepaare $K_1 K'_1, K_3 K'_3, K_5 K'_5$ bilden eine Involution J_{246} ; die erste Involution hat mit $J_1 J_3 J_5$, die zweite Involution hat mit $J_2 J_4 J_6$ gemeinsame conjugiert-imaginäre Doppelpunkte, welche die gemeinsamen Schnittpunkte $(xy)(x_1 y_1), (xy_1)(x_1 y)$ der Kegelchnitte $k_1 k_3 k_5$, beziehungsweise $k_2 k_4 k_6$ sind. Daher sind die Träger der Involutionen J_{135}, J_{246} die früheren Geraden t_{135}, t_{246} , und es ist

$$\begin{array}{l} t_{135} \equiv |K_2 K_4 K_6 K'_2 K'_4 K'_6| \\ t_{246} \equiv |K_1 K_3 K_5 K'_1 K'_3 K'_5|. \end{array}$$

Die neun Verbindungsgeraden der Punkte $K'_1 K'_3 K'_5$ mit den Punkten $K'_2 K'_4 K'_6$ sind zugleich die Verbindungsgeraden der neun Paar gegenüber liegenden Punkte $(p^i \pi^j)(p^i \pi^j)'$, und auf jeder dieser Geraden werden die gegenüber liegenden Punkte von den zwei Punkten K'_i harmonisch getrennt. Es strahlen aber noch aus jedem der sechs Punkte K'_i auch solche sechs Geraden aus, die zwei Punkte wie $(p^i \pi^j)(p^j \pi^m)'$ tragen, welche aber nicht gegenüber liegende sind. So z. B. trennen die Punktepaare $K'_1 K'_2, K'_1 K'_4, K'_1 K'_6$, beziehungsweise die Punktepaare $(p^I \pi^{VI})(p^I \pi^{VI})', (p^{II} \pi^{IV})(p^{II} \pi^{IV})', (p^{III} \pi^V)(p^{III} \pi^V)'$ harmonisch, und aus K'_1 strahlen aus die Geraden $(p^I \pi^V)(p^{III} \pi^{VI})', (p^{II} \pi^{VI})(p^I \pi^{IV})', (p^{III} \pi^V)(p^{II} \pi^V)', (p^{II} \pi^{VI})', (p^{II} \pi^V)(p^{III} \pi^{IV})', (p^{III} \pi^{VI})(p^I \pi^V)'$.

Die Pole der Geraden $P\Pi$ in Hinsicht auf die Kegelschnitte $k_1 k_2 \dots k_6$ sind die Punkte $K_1 K_2 \dots K_6$, denn es schneiden sich z. B. die Diagonale $(p^I \pi^{IV}) (p^{II} \pi^{VI})$, $(p^I \pi^V) (p^{III} \pi^{VI})$ der dem Kegelschnitt k_1 einbeschriebenen Vierecke $P\Pi (p^I \pi^{VI}) (p^{II} \pi^{IV})$, $P\Pi (p^I \pi^{VI}) (p^{III} \pi^V)$, im Pole der Geraden $P\Pi$ in Hinsicht auf k_1 .

Daraus folgt ferner, dass der Pol der Geraden t_{135} in Hinsicht auf die Kegelschnitte $k_2 k_4 k_6$, der Punkt $(t_{246}, |P\Pi|)$, und der Pol der Geraden t_{246} in Hinsicht auf die Kegelschnitte $k_1 k_3 k_5$ der Punkt $(t_{135}, |P\Pi|)$ ist. Denn die Punkte K_1, K_1 sind die Pole der Geraden $t_{135}, |P\Pi|$ in Hinsicht auf k_1 , also ist der Punkt $(t_{135}, |P\Pi|)$ der Pol der Geraden $t_{246} = K_1 K_1'$.

Die erhaltenen Resultate können wir als Fortsetzung der früheren Sätze in Folgendem zusammenfassen:

Die auf jeden der Kegelschnitte $k_1 k_3 k_5 k_3 k_4 k_6$ liegenden drei Punktepaare $(p^i \pi^i) (p^i \pi^i)'$ sind conjugierte Punkte von Involutionen $J_1 J_3 J_5, J_2 J_4 J_6$; ihre Involutionen-Mittelpunkte sind $K_1 K_3 K_5, K_2 K_4 K_6$. Die gemeinsame Involutionen-Axe der Involutionen $J_1 J_3 J_5$ ist die durch die Punkte $K_2 K_4 K_6$ gehende Gerade t_{135} , und die gemeinsame Involutionen-Axe der Involutionen ist die durch die Punkte $K_1 K_3 K_5$ gehende Gerade t_{246} .

Die Pole $K_1 K_3 K_5$ und $K_2 K_4 K_6$ der Geraden $|P\Pi|$ in Hinsicht auf die Kegelschnitte $k_1 k_3 k_5$, beziehungsweise $k_2 k_4 k_6$, liegen auf der Geraden t_{246} , beziehungsweise t_{135} ; $K_1 K_1', K_3 K_3', K_5 K_5'$, so wie $K_2 K_2', K_4 K_4', K_6 K_6'$ sind conjugierte Punkte von zwei Involutionen J_{135}, J_{246} . Die gemeinsamen Doppelpunkte der Involutionen $J_1 J_3 J_5, J_{135}$, und $J_2 J_4 J_6, J_{246}$ sind die früheren Punkte $(xy) (x_1 y_1), (xy_1) (x_1 y)$, welche mit jedem der drei auf den Kegelschnitten $k_1 k_2 \dots k_6$ liegenden Punkten $(p^i \pi^i)$, wie auch $(p^i \pi^i)'$, und mit den auf den Geraden t_{135}, t_{246} liegenden Punkte K_i , wie auch K_i' , äquianharmonisch sind.

Aus jedem der sechs Punkte K_i' Strahlen neun Gerade aus, welche einen Punkt $(p^i \pi^i)$ und einen Punkt $(p^j \pi^j)'$ tragen; auf dreien dieser Geraden sind die genannten Punkte gegenüber liegende, und trennend die zwei auf diesen Geraden befindlichen Punkte K_i' harmonisch.

5. Wir müssen hier folgenden Hilfssatz über Kegelschnitte beweisen: „Wenn zwei Kegelschnitte zwei gegenüber liegende Eckpunkte eines Viereits mit einander gemein haben, und jeder auch noch durch zwei außerhalb des anderen liegende Eckpunkte des Viereits geht, so schneiden sich die Geraden, welche den einen

gleichviel welchen von den beiden Kegelschnitten in jenen gemeinschaftlichen Punkten berühren, und die Geraden, welche den anderen in den übrigen gemeinschaftlichen Punkten der beiden Kegelschnitte sich anschmiegen, in einem und demselben Punkte“ (Staudt l. c.).

Beweis: Nach einem bekannten Satze von Steiner sind die acht Geraden, welche zwei Kegelschnitte in ihren vier Schnittpunkten berühren, die Tangenten eines Kegelschnittes. Schneiden sich also drei dieser Tangenten in einem Punkte U , so degeneriert dieser Kegelschnitt in ein Punktepaar UV . Die übrigen fünf Tangenten können aber nicht alle durch den anderen Punkt V gehen, da sie aus den vier Schnittpunkten ausstrahlen und also zwei derselben keinen zweiten gemeinsamen Punkt haben können; es müssen daher in dem betrachteten Falle vier der Tangenten durch einen Punkt U und vier durch einen Punkt V gehen.

Um aber zu zeigen, dass die Tangenten in drei Schnittpunkten der im Satze angegebenen Kegelschnitte sich in einem Punkt schneiden, bezeichnen wir die Kegelschnitte, welche durch die Gegeneckpunkte BB_1, CC_1 und AA_1, CC_1 eines Vierseits $AA_1 BB_1 CC_1$ gehen, mit k_a, k_b ; diese haben außer CC_1 noch die Schnittpunkte DD_1 .

Der Pol U der Geraden $|CC_1|$ in Hinsicht auf k_a ist der Schnittpunkt der zu $|CC_1|$ conjugierten Polaren $|AA_1|$, $t = |(C_1 B_1, CD)(CB_1, C_1 D)|$, wie dies aus den Vierecken $CC_1 BB_1, CC_1 B_1 D$ ersichtlich. Die Gerade t ist aber die Pascal'sche Gerade der dem Kegelschnitt k_b einbeschriebenen Sechsecke $CA_1 AC_1 DD$, (denn $CB_1 \equiv CA_1, C_1 B \equiv C_1 A$), also berührt die durch den Punkt U gehende Gerade t den Kegelschnitt k_b im Schnittpunkte D .

Wir bemerken noch, dass der Pol der Geraden BB_1 in Hinsicht auf k_1 , welcher den Punkt U vom Punktepaare AA_1 harmonisch trennt, auf der Geraden DD_1 liegt.

6. Wir kehren wieder zu der früheren Configuration zurück. Der Kegelschnitt k geht durch die Eckpunkte $(xy)(x_1 y_1)(xy_1)(x_1 y)$, die Kegelschnitte $k_1 k_3 k_5$ gehen durch die Eckpunkte $PII(xy)(x_1 y_1)$, und die Kegelschnitte $k_2 k_4 k_6$ gehen durch die Eckpunkte $PII(xy_1)(x_1 y)$ des Vierseits $xy x_1 y_1$. Daher hat der Kegelschnitt k gegenüber den Kegelschnitten $k_1 k_2 \dots k_6$, und $k_1 k_3 k_5$ gegenüber $k_2 k_4 k_6$ dieselbe Lage, wie die Kegelschnitte k_a, k_b der früheren Nummer.

Der Kegelschnitt k schneidet schon die Kegelschnitte $k_1 k_2 \dots k_6$ in den Punkten $1 2 \dots 6$, und wir wollen die vierten Schnittpunkte mit $1' 2' \dots 6'$ bezeichnen.

Also gehen die Tangenten des Kegelschnittes k in den Punktepaaren $11', 33', 55'$ und $22', 44', 66'$ durch die Pole $K'_1 K'_3 K'_5$ der Geraden t_{135} in Hinsicht auf $k_1 k_3 k_5$, beziehungsweise durch die Pole $K'_2 K'_4 K'_6$ der Geraden t_{246} in Hinsicht auf $k_2 k_4 k_6$. Außer

diesem schneiden die Geraden $11', 33', 55'$, die Gerade t_{246} und die Geraden $22', 44', 66'$, die Gerade t_{135} in denjenigen Punkten $K_1 K_3 K_5$, beziehungsweise $K_2 K_4 K_6$, welche das Punktepaar $(xy_1)(x_1 y)$ beziehungsweise das Punktepaar $(xy)(x_1 y_1)$ von den Punkten $K'_1 K'_3 K'_5$, beziehungsweise $K'_2 K'_4 K'_6$ harmonisch trennen. Die Tangenten des Kegelschnitts k in den Punkten $1\ 2\ \dots\ 6$ gehen also durch die Punkte $K'_1 K'_2\ \dots\ K'_6$.

Anderseits schneiden sich die Tangenten von $k_1 k_3 k_5$ und $k_2 k_4 k_6$ in den Punktepaaren $11', 33', 55'$ und $22', 44', 66'$ in den Polen T_{135} , beziehungsweise T_{246} , der Geraden t_{135}, t_{246} in Hinsicht auf k ; ferner trennt der gemeinsame Schnittpunkt der Geraden $11', 33', 55'$, so wie der Geraden $22', 44', 66'$ die Punkte T_{135} , beziehungsweise T_{246} , vom Punktepaare $P\Pi$ harmonisch. Aber diese Schnittpunkte sind beziehungsweise T_{246}, T_{135} , denn die Pole der drei ersten Geraden in Hinsicht auf k sind die auf t_{246} liegende Punkte $K'_1 K'_3 K'_5$, und die Pole der drei anderen Geraden in Hinsicht auf k sind die auf t_{135} liegende Punkte $K'_2 K'_4 K'_6$.

Nachdem die Tangenten von k in den Punkten $1\ 3\ 5$ und $1' 3' 5'$ die Gerade t_{246} in den Punkten $K'_1 K'_3 K'_5$ schneiden und $K'_1 K'_3 K'_5 (xy_1)(x_1 y)$ äquianharmonische Punkte sind, so werden auch $135(xy_1)(xy_1)$ und $1' 3' 5' (xy_1)(x_1 y)$ äquianharmonisch sein, und es gehen also die Geradenpaare $35, 3'5'; 51, 5'1'; 13, 1'3'$ durch die Punkte $K'_1 K'_3 K'_5$. Aus demselben Grunde sind die Punkte $246(xy)(x_1 y_1)$, $2' 4' 6' (xy)(x_1 y_1)$ äquianharmonisch und die Geradenpaare $46, 4' 6'; 62, 6' 2'; 24, 2' 4'$ schneiden sich in den Punkten $K'_2 K'_4 K'_6$.

In Anbetracht dessen, dass die Punkte $1' 2' \dots 6'$ gegenüber den Kegelschnitten $k k_1 k_2 \dots k_6$, den Geraden $t_{135} t_{246}$, den Punkten $P\Pi T_{135} T_{246} K_1 K_2 \dots K_6 K'_1 K'_2 \dots K'_6$ dieselbe Lage haben, wie die Punkte $1\ 2\ \dots\ 6$, werden die sechs Pascal'sche Gerade $p^I p^{II} \dots p^{VI}$, auch Pascal'sche Geraden des Sechseckes $1' 2' 3' 4' 5' 6'$ sein.

Daher: Die Kegelschnitte $k_1 k_3 \dots k_6$ schneiden k in den reellen Punktepaaren $11' 22', \dots, 66'$, deren Verbindungsgeraden durch die Punkte $K_1 K_2 \dots K_6$ gehen. Die Tangentenpaare in diesen Punktepaaren zu dem Kegelschnitt k schneiden sich in den Punkten $K'_1 K'_2 \dots K'_6$, und zu den Kegelschnitten $k_1 k_3 k_5, k_2 k_4 k_6$ in den Polen T_{135}, T_{246} der Geraden t_{135}, t_{246} in Hinsicht auf k . Diese Pole T_{135}, T_{246} trennen $P\Pi$ harmonisch. Die Geraden $p^I p^{II} \dots p^{VI}$ sind Pascal'sche Geraden des Sechseckes $1' 2' 3' 4' 5' 6'$.

7. Man sieht aus dem Früheren, dass die Geraden $(p^I p^{II} p^{III} \pi^{IV} \pi^V \pi^{VI})$ die Kegelschnitte $k_1 k_2 \dots k_6$, die Geraden t_{135}, t_{246} und die auf diesen liegende Punkte $K_2 K_4 K_6 K'_2 K'_4 K'_6 (xy)(x_1 y_1)$, $K_1 K_3 K_5 K'_1 K'_3 K'_5 (xy_1)(x_1 y)$, durch die sechs sich zu dreien in

den Punkten P, Π schneidenden Geraden $p^I p^{II} p^{III}, \pi^{IV} \pi^V \pi^{VI}$ bestimmt sind. In Anbetracht dessen, dass die neun Verbindungsgeraden der Eckpunkte des Dreieckes 135 mit den Eckpunkten des Dreieckes 246 durch die neun Punkte $(p^i \pi^i)'$, und ihre sechs Seiten durch die Punkte $K'_1 K'_3 K'_5, K'_2 K'_4 K'_6$ gehen, kann man, wenn die Geraden $p^I p^{II} p^{III} \pi^{IV} \pi^V \pi^{VI}$ und ein Eckpunkt des Sechseckes 12 ... 6 gegeben ist, die übrigen fünf Eckpunkte, den durch dieselben gehenden Kegelschnitt k , und die neun Punkte $1' 2' \dots 6'$, construieren.

Beschreibt der Punkt 1 auf k_1 eine Reihe R_1 , so werden die Punkte 2 3 ... 6 auf den Kegelschnitten $k_2 k_3 \dots k_6$ mit R_1 projective Reihen $R_2, R_3, \dots, R_6$ beschreiben, in welchen der Punkt P und der Punkt Π entsprechend ist. Diese Punktreihen sind zugleich projectiv mit denjenigen neun Strahlenbüscheln, deren Mittelpunkte die Punkte $(p^i \pi^i)'$ sind und welche die Punktreihen R_1, R_3, R_5 , in die Punktreihen R_2, R_4, R_6 projiciern. Jeder der Kegelschnitte $k_1 k_2 \dots k_6$ ist das Erzeugnis von solchen drei dieser Strahlenbüschel, deren Mittelpunkte auf dem betreffenden Kegelschnitt liegen. Hingegen ist das Erzeugnis von zwei solchen Strahlenbüscheln, deren Mittelpunkte mit dem Punkte P oder mit dem Punkte Π auf einer Geraden $(p^i$ oder $\pi^i)$ liegen, eine Gerade π^m oder p^j , welche von den Mittelpunkten der Strahlenbüschel durch den auf dem gemeinsamen Strahle der Büschel liegenden dritten Mittelpunkt der Büschel harmonisch getrennt ist.

Es ist z. B. das Erzeugnis der Büschel mit den Mittelpunkten $(p^I \pi^{IV})', (p^I \pi^V)'$, bei der obigen projectiven Beziehung die Gerade π^{VI} , da sich die entsprechenden Strahlenpaare π^{IV}, π^V ; 56, 34, auf der Geraden π^{VI} schneiden.

Nach diesem können wir die zwei in der Einleitung erwähnten Sätze von Staudt mit der hier benützten Bezeichnung aufschreiben; sie lauten:

„11. Durch sechs in einerlei Ebene liegende Geraden, von welchen drei $p^I p^{II} p^{III}$ in einem Punkte P , die übrigen drei $\pi^{IV} \pi^V \pi^{VI}$ in einem anderen Punkte Π sich schneiden, sind im allgemeinen sechs Curven $k_1 k_3 k_5 k_2 k_4 k_6$ zweiter Ordnung bestimmt, welche projectivisch so auf einander bezogen werden können, dass auch je sechs homologe Punkte 1, 3, 5, 2, 4, 6 derselben in einer Curve k zweiter Ordnung liegen und überdies die Pascal'schen Geraden der Sechsecke

163254, 123456, 143652

163452, 123654, 143256

mit den gegebenen Geraden zusammenfallen.

Jede der sechs festen Curven geht durch die beiden Punkte P, Π und durch drei von den neun Punkten $p \pi$, in welchen nämlich die drei Geraden $p^I p^{II} p^{III}$ von den drei Geraden $\pi^{IV} \pi^V \pi^{VI}$ geschnitten werden, und zwar geht

$$\begin{array}{ll}
k_1 & \text{durch } p^I \pi^{VI}, p^{II} \pi^{VI}, p^{III} \pi^V \\
k_3 & \text{„ } p^I \pi^V, p^{II} \pi^{VI}, p^{III} \pi^{IV} \\
k_5 & \text{„ } p^I \pi^{IV}, p^{II} \pi^V, p^{III} \pi^{VI} \\
k_2 & \text{„ } p^I \pi^{VI}, p^{II} \pi^V, p^{III} \pi^{IV} \\
k_4 & \text{„ } p^I \pi^V, p^{II} \pi^{IV}, p^{III} \pi^{VI} \\
k_6 & \text{„ } p^I \pi^{IV}, p^{II} \pi^{VI}, p^{III} \pi^V.
\end{array}$$

Legt man durch den Punkt P die Geraden $p^I p^{II} p^{III}$ und durch den Punkt Π die Geraden $\pi^{IV} \pi^V \pi^{VI}$ so dass $p^{II} p^{III} p^I p^I$, $p^{III} p^I p^{II} p^{II}$, $p^I p^{II} p^{III} p^{III}$, $\pi^V \pi^{VI} \pi^{IV} \pi^{IV}$, $\pi^{VI} \pi^{IV} \pi^V \pi^V$, $\pi^{IV} \pi^V \pi^{VI} \pi^{VI}$ harmonische Würfe sind, so geht nun auch jede der sechs festen Curven durch drei der neun Punkte $p^i \pi^i$ so dass jede der drei Curven $k_1 k_3 k_5$, jede der drei Curven $k_2 k_4 k_6$ in den Punkten P, Π und in zwei einander gegenüber liegenden von den achtzehn Punkten $p \pi, p' \pi'$ schneidet, wenn man nämlich dem Punkte $p^i \pi^i$ den Punkt $p^i \pi^i$ gegenüber liegend nennt.

Der Strahlenbüschel P enthält zwei Strahlen x, x_1 , der Strahlenbüschel Π zwei Strahlen y, y_1 , so dass die Gebilde $p^I p^{II} p^{III} x x_1$, $p^{II} p^{III} p^I x x_1$, $\pi^{IV} \pi^V \pi^{VI} y y_1$ zu einander, mithin zu denselben auch die Gebilde $p^{III} p^I p^{II} x x_1$, $p^I p^{III} p^{II} x_1 x$ u. s. w. projectivisch sind, daher die drei Curven $k_1 k_3 k_5$ in den vier Punkten $P, \Pi, xy, x_1 y_1$, die drei Curven $k_2 k_3 k_4$ aber in den vier Punkten $P, \Pi, xy_1, x_1 y$ sich schneiden.

Die Brianchon'schen Punkte K_1, K_3, K_5 der Sechseiten $p^I \pi^V p^{II} \pi^{VI} p^{III} \pi^{IV}$, $p^I \pi^{IV} p^{II} \pi^V p^{III} \pi^{VI}$, $p^I \pi^{VI} p^{II} \pi^{IV} p^{III} \pi^V$ sind die Pole der Geraden $P \Pi$ in Hinsicht auf die Curven k_1, k_3, k_5 und liegen daher in der Geraden t_{246} , welche den Punkt xy_1 mit dem Punkte $x_1 y$ verbindet. Die Brianchon'schen Punkte K_2, K_4, K_6 der Sechseiten $p^I \pi^{IV} p^{II} \pi^{VI} p^{III} \pi^V$, $p^I \pi^{VI} p^{II} \pi^V p^{III} \pi^{IV}$, $p^I \pi^V p^{II} \pi^{IV} p^{III} \pi^{VI}$ sind die Pole der Geraden $P \Pi$ in Hinsicht auf die Curven $k_2 k_4 k_6$ und liegen daher in der Geraden t_{135} , welche den Punkt xy mit dem Punkte $x_1 y_1$ verbindet.

In der Geraden t_{246} liegen auch K'_1, K'_3, K'_5 welche die Pole der Geraden t_{135} in Hinsicht auf die Curven k_1, k_3, k_5 sind. Ebenso liegen in der Geraden t_{135} die Punkte K'_2, K'_4, K'_6 , welche die Pole der Geraden t_{246} in Hinsicht auf die Curven $k_2 k_4 k_6$ sind. Jede der neun Geraden, welche die Punkte K'_1, K'_3, K'_5 mit den Punkten K'_2, K'_4, K'_6 verbindet, geht durch zwei einander gegenüber liegende von den achtzehn Punkten $p \pi, p' \pi'$. Durch jeden der Punkte $K'_1, K'_2, \dots, K'_6$ gehen aber sechs von den sechsunddreißig Geraden, deren jede nur eine der Curven $k_1, k_2, \dots, k_6$ in einem der Punkte $p \pi$ und zugleich in einem der Punkte $p' \pi'$ schneidet.

Die neun Strahlenbüschel, welche die Punkte $p' \pi'$ zu Mittelpunkten haben, können projectivisch so auf einander bezogen

werden, dass je zwei Büschel, deren Mittelpunkte mit dem Punkte P oder mit dem Punkte Π und also auch mit dem Mittelpunkte eines dritten Büschels in einer und derselben Geraden liegen, ein gerades Gebilde erzeugen, welches im ersten Falle in derjenigen Geraden π , im letzteren aber in derjenigen Geraden p liegt, welche vom Mittelpunkte des dritten Büschels harmonisch getrennt ist. Je drei Büschel, deren Mittelpunkte in einer und derselben von den sechs Curven $k_1, k_2, \dots, k_6$ liegen, erzeugen diese Curve. Es sind hierdurch auch die sechs erwähnten Curven auf die Büschel und daher auch auf einander projectivisch bezogen, und zwar auf die im Satze angegebene Weise. Die Curve k geht immer durch die vier Punkte xy, x_1y_1, xy_1, x_1y .“

„12. Wenn zwei Curven zweiter Ordnung zwei einander gegenüber liegende Eckpunkte eines vollständigen Vierseits mit einander gemein haben und jede auch noch durch zwei außerhalb der anderen liegende Eckpunkte des Vierseits geht, so schneiden sich die Geraden, welche die eine, gleichviel welche, von den beiden Curven in jenen gemeinschaftlichen Punkten berühren, und die Geraden, welche den anderen in den übrigen gemeinschaftlichen Punkten sich anschmiegen, in einem und demselben Punkte. Eine solche Lage hat, was die in der vorigen Nummer betrachteten Curven anbelangt, jede der drei Curven k_1, k_3, k_5 zu jeder der drei Curven k_2, k_4, k_6 , und jede dieser sechs Curven zu jeder Curve k zweiter Ordnung, welche durch sechs homologe Punkte 1, 3, 5, 2, 4, 6 derselben geht.

Es schneiden sich daher die drei Geraden, welche die Curven k_1, k_3, k_5 in den Punkten 1, 3, 5 berühren, in dem Punkte T_{135} , welcher in Hinsicht auf die Curve k der Pol der Geraden t_{155} und zugleich der Pol des Dreieckes 246 ist. Die drei Geraden aber, welche die Curven k_2, k_4, k_6 in den Punkten 2, 4, 6 berühren, schneiden sich in dem Punkte T_{246} , welcher vom Punkte T_{135} , durch die Punkte P, Π harmonisch getrennt und in Hinsicht auf die Curve k der Pol der Geraden t_{246} des Dreieckes 135 ist.

Bewegen sich die sechs Punkte 1, 2, ..., 6 in den sechs Curven $k_1, k_2, \dots, k_6$ als homologe Punkte derselben, so drehen sich die neun Geraden, welche die Eckpunkte des Dreieckes 135 mit den Eckpunkten des Dreieckes 246 verbinden, um die neun Punkte p', π' , während die Geraden 35, 51, 13 um die Punkte K'_1, K'_3, K'_5 und die Geraden 46, 62, 24 und die Punkte K'_2, K'_4, K'_6 sich drehen.

Die Geraden $T_{246}1, T_{246}3, T_{246}5, T_{135}2, T_{135}4, T_{135}6$, welche die Curve k in noch sechs homologen Punkten der Curven $k_1, k_3, k_5, k_2, k_4, k_6$ schneiden, drehen sich um die Punkte, welche in Hinsicht auf diese Curven die Pole der Geraden P, Π sind. Fällt irgend einer der drei Punkte 1, 3, 5 in die Gerade t_{246} , so fallen alle drei in diese Gerade, die drei Punkte 246 aber in die Gerade t_{135} , so dass alsdann die Curve k in den Inbegriff von zwei Geraden übergeht.

Die Aufgabe, in eine gegebene Curve zweiter Ordnung, welche (11) durch die vier Punkte $xy, x_1 y_1, xy_1, x_1 y$ geht, zwei Dreiecke 135, 246 zu beschreiben, so dass die Pascal'schen Geraden der Sechsecke 163254, 123456, u. s. w. mit den gegebenen Geraden p^I, p^{II} , u. s. w. zusammenfallen, lässt nach dem Obigen zwei Auflösungen zu.“

8. Nach diesen schönen Sätzen der Geometrie wollen wir zeigen, wie man das Steiner'sche Gegenpunktpaar P, Π und die durch dieselben gehenden Pascal'sche Geraden $p^I p^{II} p^{III}, \pi^{IV} \pi^V \pi^{VI}$ des Sechsecks 123456 construieren kann, ohne die Schnittpunkte der Gegenseiten desselben zu benützen.

Die Tangenten in den Eckpunkten eines einem Kegelschnitt einbeschriebenen Dreieckes, schneiden die Gegenseiten desselben in drei Punkten einer Geraden. Diese Gerade, sowie ihren Pol nennt Staudt „die Polare und den Pol des Dreieckes in Hinsicht auf den Kegelschnitt. Es sind also die Geraden t_{246}, t_{135} und die Punkte T_{246}, T_{135} der früheren Figur die Polaren und Pole der Dreiecke 135, beziehungsweise 246 in Hinsicht auf den beiden Dreiecken umschriebenen Kegelschnitt k .

Nach Früherem sind diejenigen conjugierten Pole in Hinsicht auf k , welche die Punkte T_{135}, T_{246} harmonisch trennen, die Steiner'schen Gegenpunkt P, Π . Dieselben werden von k stets getrennt, da der Pol der Geraden $|T_{135} T_{246}|$, als Schnittpunkt der stets außerhalb k liegenden Geraden t_{135}, t_{246} , außerhalb k liegt.

Die neun Geraden $K'_i K'_j$, welche die Punkte $K'_1 K'_3 K'_5$ mit den Punkten $K'_2 K'_4 K'_6$ der früheren Figur, verbinden, werden entsprechend von den neun Geraden il , welche die Eckpunkte des Dreieckes 135 mit den Eckpunkten des Dreieckes 246 verbinden, in den neun Punkten $(p' \pi')$ geschnitten. Und die neun Punkte, welche auf den neun Geraden $|K'_i K'_j|$ die Punkte $(p' \pi')$ von den Punkten K'_p, K'_l harmonisch trennen, sind die neun Punkte $(p \pi)$; von letzteren Punkten liegen sechs mal drei in den Pascal'schen Geraden $p^I p^{II} p^{III} \pi^{IV} \pi^V \pi^{VI}$. Man kann also die Punkte P, Π mittelst einer quadratischen Construction unabhängig von den Geraden $p^I p^{II} \dots \pi^{VI}$ und die Geraden selbst mittelst linearen Constructionen, ohne die Schnittpunkte der Gegenseiten des Pascal'schen Sechseckes aufzusuchen, erhalten.

Bezeichnet man die Tangenten des Kegelschnittes k in den Punkten 12 ... 6 mit $t_1 t_2 \dots t_6$, so wird z. B. die Gerade 12, die Verbindungsgerade $K'_1 K'_2$ der Punkte $K'_1 = (t_1, 35), K'_2 = (t_2, 26)$ in dem Punkte $(p^I \pi^{VI})'$ treffen, und der von $(p^I \pi^{VI})'$ durch $K'_1 K'_2$ harmonisch getrennte Punkt $(p^I \pi^{VI})$ gehört den Pascal'schen Geraden p^I, π^{VI} an.

Die von den Punkten K'_1, K'_2 an k gezogenen Tangenten berühren k in den Punkten 11', 22'. Der Schnittpunkt (11', 22') der

Berührungssehnen ist der Pol der Geraden $K'_1 K'_2$, und da sich die Geraden $12, K'_1 K'_2$ in dem Punkte $(p^I \pi^{VI})$ treffen und $(p^I \pi^{VI})'$ $p^I \pi^{VI})$ conjugierte Pole sind in Hinsicht auf k , so geht die Gerade $1' 2'$ ebenfalls durch $(p^I \pi^{VI})'$, während sich die Geraden $1'2, 12'$ im Punkte $(p^I \pi^{VI})$ schneiden.

Daraus können wir schließen, da dies bei allen neun Verbindungsgeraden der Punkte $K_1 K'_2 K'_3$ mit den Punkten $K'_2 K'_4 K'_5$ stattfindet, dass $p^I p^{II} p^{III} \pi^{IV} \pi^V \pi^{VI}$ auch Pascal'sche Geraden des Sechseckes $1' 2' 3' 4' 5' 6'$, und $(p^I p^{II} p^{III} \pi^{IV} \pi^V \pi^{VI})'$ Pascal'sche Geraden der Sechsecke $12' 34' 56', 1'2'3'4'5'6'$, sind. Daher:

Sind 135, 246 zwei beliebige, einem Kegelschnitt k einbeschriebene Dreiecke und hat das Dreieck $1' 3' 5'$ mit dem ersten, das Dreieck $2' 4' 6'$ mit dem zweiten Dreieck in Hinsicht auf k je einen gemeinsamen Pol, und werden diese Pole von den conjugierten Polen P, Π in Hinsicht auf k harmonisch getrennt, so ist P, Π ein Steiner'sches Gegenpunktpaar für die vier Pascal'schen Sechsecke $123456, 1'2'3'4'5'6', 12'3'4'5'6', 1'2'3'4'5'6'$. Die sechs durch P, Π gehenden Pascal'schen Geraden $p^I p^{II} p^{III}, \pi^{IV} \pi^V \pi^{VI}$ des ersten Sechseckes fallen mit sechs Pascal'schen Geraden des zweiten Sechseckes zusammen, und ebenso fallen die sechs durch P, Π gehenden Pascal'schen Geraden $p^I p^{II} p^{III}, \pi^{IV} \pi^V \pi^{VI}$ des dritten Sechseckes mit sechs Pascal'schen Geraden des vierten Sechseckes zusammen. Je zwei der drei ersten Geraden p oder π werden von der dritten durch eine der Geraden p' beziehungsweise π' harmonisch getrennt.

9. Da, wie wir sahen, die Verbindungsgerade eines Steiner'schen Gegenpunktpaares den Kegelschnitt immer in reellen Punkten schneidet, so liegen von den zwanzig Steiner'schen Punkten zehn innerhalb und ihre Gegenpunkte außerhalb des dem Pascal'schen Sechseck umschriebenen Kegelschnittes.

Man kann aber auch im vorhinein bestimmen, welcher der Steiner'schen Punkte eines Gegenpunktpaares innerhalb und welcher außerhalb des Kegelschnittes k liegt.

Hält man bei einem Pascal'schen Sechsecke drei nicht aufeinander folgende Eckpunkte fest, so ergeben die drei ihnen gegenüber liegenden Eckpunkte sechs Permutationen, von welchen drei und die übrigen drei cyklische Permutationen sind. Die Pascal'schen Geraden der ersten drei, und der anderen drei Sechsecke schneiden sich in zwei Steiner'schen Punkten, welche Gegenpunkte sind. So z. B. schneiden sich die Pascal'schen Geraden der Sechsecke

163254 und 163452

123456 123654

143652 143256

in den Steiner'schen Gegenpunkten P, Π .

Es ist nun zu unterscheiden, welcher der Steiner'schen Punkte außerhalb des Kegelschnittes k liegt, denn der andere liegt dann innerhalb desselben.

Ich behaupte: Wenn drei nicht auf einander folgende Eckpunkte, und die ihnen gegenüber liegenden Eckpunkte eines Pascal'schen Sechseckes auf den durch dieselben gehenden Kegelschnitt in demselben Sinne auf einander folgen, so geht die, diesem Pascal'schen Sechsecke zugehörige Pascal'sche Gerade durch einen außerhalb des Kegelschnittes liegenden Steiner'schen Punkt.

Es möge beim Pascal'schen Sechsecke 123456 der Sinn der Eckpunkte 135, 246 auf den umschriebenen Kegelschnitt k derselbe sein, dann können die drei letzteren Punkte in Bezug auf die drei ersteren nur folgende drei Lager haben: 1. Von den Punkten 246 ist keiner von den beiden anderen durch zwei der Punkte 135 getrennt; 2. ein Punkt von 246 wird von den beiden anderen durch einen Punkt und die beiden anderen von 135 getrennt; endlich 3. je zwei der Punkte 246 werden durch zwei der Punkte 135 getrennt. Im 1., 2., 3. dieser Fälle haben beziehungsweise ein, zwei, drei Pascal'sche Geraden der Sechsecke mit dem umschriebenen Kegelschnitt k keinen reellen Punkt gemein, also gehen in jedem Falle die Pascal'schen Geraden dieser Sechsecke durch einen außerhalb des Kegelschnittes k liegenden Steiner'schen Punkt.

10. Sechs Punkte 123456 eines Kegelschnittes k bilden die Eckpunkte von zwanzig Dreiecken oder zehn Paar Ergänzungsdreiecken, wenn je zwei jener Dreiecke, die keinen gemeinsamen Eckpunkt haben, so nennt. Die Pole und Polaren jedes der Dreiecke in Hinsicht auf k , wollen wir wie früher mit $T_{ijl'}$ und t_{ij} bezeichnen, wo die Zeiger ijl mit den Eckpunkten des Ergänzungsdreieckes übereinstimmen.

Von den zwanzig Dreiecken haben fünfzehnmal vier, zwei gemeinsame Eckpunkte; z. B. haben die Dreiecke 123, 124, 125, 126 die gemeinsamen Eckpunkte 12. Untersuchen wir die Lage ihrer Pole $T_{456}, T_{346}, T_{345}$.

Die sechs Tangenten $t_1 t_2 t_3 t_4 t_5 t_6$ von k in den Punkten 123456 schneiden die zwei Tangenten t_1, t_2 , in den sechs Punkten von zwei projectiven Punktreihen, und die Verbindungsgeraden dieser Schnittpunkte mit den Punkten 2, beziehungsweise 1, geben projective Strahlen; also ist

$$2 \left((t_1 t_2) (t_1 t_3) (t_1 t_4) (t_1 t_5) (t_1 t_6) \right) \overline{\wedge} 1 \left((t_2 t_1) 2 (t_2 t_3) (t_2 t_4) (t_2 t_5) (t_2 t_6) \right).$$

Es liegen daher die Schnittpunkte

$$12 T_{456} T_{356} T_{346} T_{345}$$

der sechs entsprechenden Strahlenpaare auf einen Kegelschnitt k_{12} , der k in den Punkte 12 berührt, und für die auf k und k_{12} liegenden sechs Punkten ist

$$123456 \overline{\wedge} 12 T_{456} T_{356} T_{346} T_{345}.$$

Die zwei Kegelschnitte k, k_{12} liegen in Bezug auf die gemeinsame Berührungssehne 12 und den Schnittpunkt (t_1, t_2) der gemeinsamen Tangenten t_1, t_2 , als Collineations-Axen und Mittelpunkt perspectiv; dabei entsprechen obige sechs Punkte einander. Die sechs Seiten des Viereckes $T_{12} = T_{456} T_{356} T_{346} T_{345}$ gehen durch die Schnittpunkte der sechs Seiten des Viereckes 3456 mit der Geraden 12, d. h. durch sechs von den fünfundvierzig Pascal'schen Punkten, wenn man diejenigen Punkte Pascal'sche Punkte nennt, in welchen sich die fünfzehn Seiten eines vollständigen Pascal'schen Sechseckes, außer ihren Eckpunkten, schneiden. Durch jeden dieser sechs Pascal'schen Punkte auf der Berührungssehne 12, geht aber noch je eine Seite der (dem obigen Viereck T_{12} entsprechend entstandenen) Vierecke $T_{34}, T_{56}, T_{35}, T_{46}, T_{36}, T_{45}$, welche denjenigen Kegelschnitten $k_{34}, k_{56}, \dots, k_{45}$ einbeschrieben sind, die k in je zwei Eckpunkten des Viereckes 3456 berühren. Daher:

Sechs Punkte 123456 eines Kegelschnittes k bilden die Eckpunkte von zwanzig Dreiecken, welche in Hinsicht auf k zwanzig Pole haben. Von diesen Polen liegen fünfzehnmal vier auf solchen Kegelschnitten k_{ij} , welche k in zwei Punkten ij der sechs Punkte berühren. Die vier Pole und die Berührungspunkte entsprechen projectiv den sechs angenommenen Punkten und k_{ij} , k sind bei dieser projectiven Beziehung perspectiv in Bezug auf die gemeinsame Berührungssehne ij und ihren Pol.

Die sechs Seiten des Viereckes T_{ij} , dessen Eckpunkte die vier auf k_{ij} liegende Pole sind, gehen durch die sechs auf der Berührungssehne ij liegenden Pascal'schen Punkte. Es gibt fünfzehn solche Vierecke T_{ij} , entsprechend den fünfzehn Kegelschnitten k_{ij} ; ihre neunzig Seiten u gehen paarweise durch die fünfundvierzig Pascal'schen Punkte des Sechseckes 123456; durch jeden der zwanzig Pole gehen neun solche Geraden u .

11. Betrachten wir jetzt zwei von den fünfzehn Kegelschnitten k_{ij} , welche k in denselben von den sechs Punkten 12...6 berühren; z. B. die Kegelschnitte k_{12}, k_{13} . Diese berühren also k in den Punkten 1, 2, beziehungsweise 1, 3, und gehen beide durch den Pol T_{456} . Sie haben in dem Punkte 1 eine dreipunktige Berührung; denn der vierte Schnittpunkt müsste den Schnittpunkt T_{456} von den Berührungssehnern 12, 13 harmonisch trennen. Aber alle Punkte, welche T_{456} von den Geraden 12, 13 harmonisch trennen, liegen in der Tangente t_1 , welche die drei Kegelschnitte k, k_{12}, k_{13} in dem Punkt 1 berührt; also fällt jener vierte Schnittpunkt ebenfalls in diesen Punkt 1.

Betrachtet man ferner die drei Kegelschnitte k_{12}, k_{23}, k_{31} , welche k in je zwei der Eckpunkte des Dreieckes 123 berühren, so sieht man, dass sie alle durch den Pol T_{456} des Dreieckes 123 in Hinsicht auf k gehen und sich gegenseitig in den Eckpunkten dieses Dreieckes dreipunktig berühren.

Die fünfzehn Kegelschnitte k_{ij} reihen sich in zwanzig solchen Tripeln von Kegelschnitten, entsprechend der Anzahl der Dreiecke, in welche man das Sechseck 12...6 zerlegen kann. Also:

Von den fünfzehn Kegelschnitten k_{ij} , welchen der Kegelschnitt k in je zwei der sechs Punkte 123456 berühren und außerdem durch je vier der Pole der zwanzig Dreiecke δ , deren Eckpunkte die Punkte 12...6 sind, gehen, berühren sich in jedem dieser Punkte fünf dreipunktig.

Je drei der Kegelschnitte k_{ij} , welche k in den Eckpunkten eines Dreieckes δ berühren, haben in diesen Eckpunkten paarweise eine dreipunktige Berührung, und schneiden sich außerdem in dem Pole des Dreieckes in Hinsicht auf k . Die neun Geraden u , welche den gemeinsamen Pol mit den übrigen neuen auf diesen drei Kegelschnitten k_{ij} liegenden Polen verbinden, gehen durch diejenigen auf den Seiten des Dreieckes δ liegenden neun Pascal'schen Punkten, welche den Seiten des Ergänzungsdreieckes von δ nicht angehören.

Beiläufig folgt der möglicher Weise noch nicht bekannte Satz:

Sind ABC die Eckpunkte eines Dreieckes, T ein beliebiger Punkt einer Ebene, und trennen die Geraden $t_a t_b t_c$ den Punkt T von den Seitenpaaren des Dreieckes harmonisch, so werden sich die drei Kegelschnitte, welche durch T gehen und je zwei Seiten des Dreieckes $t_a t_b t_c$ in den Eckpunkten des Dreieckes ABC berühren, in diesen Eckpunkten, dreipunktig berühren. Der Punkt T muss nicht innerhalb des Dreieckes ABC liegen.

12. Betrachten wir jetzt zwei der Kegelschnitte k_{ij} , die keine gemeinsamen Berührungspunkte haben, z. B. k_{12}, k_{34} . Der erste berührt k in den Punkten 1, 2 und geht durch die Pole $T_{356}, T_{456}, T_{346}, T_{345}$; der zweite berührt k in den Punkten 3, 4 und geht noch durch die Pole $T_{156}, T_{256}, T_{125}, T_{126}$.

Die Vierecke 1234, $T_{156} T_{256} T_{356} T_{456}$, und das Vierseit $t_1 t_2 t_3 t_4$, dessen Seiten k in den Eckpunkten des ersten Viereckes berühren, haben ein gemeinsames Diagonaldreieck $z_{56} z'_{56} z''_{56}$, da die Gegenseiten

$$\begin{array}{llllll}
 T_{156} T_{256}, T_{256} T_{456} & \text{durch den Pascal'schen Punkt} & (12, 34) \\
 T_{156} T_{356}, T_{256} T_{456} & " & " & " & (13, 24) \\
 T_{156} T_{456}, T_{256} T_{356} & " & " & " & (14, 23)
 \end{array}$$

gehen.

Daraus folgt, dass die zwei Kegelschnitte k_{12}, k_{34} in Bezug auf die zwei Diagonalen

$$\begin{aligned}
 z_{56} &= |(13, 24)(12, 34)| = |(t_1 t_4)(t_2 t_3)|, \\
 z'_{56} &= |(12, 34)(14, 23)| = |(t_1 t_3)(t_2 t_4)|
 \end{aligned}$$

und die ihnen gegenüberliegenden Eckpunkte

$$(z'_{56} z''_{56}) = (14, 23), \quad (z''_{56} z_{56}) = (13, 24)$$

des Diagonaldreieckes $z_{56} z'_{56} z''_{56}$ als Involutionsaxe und Mittelpunkt centrisch-involutorisch liegen.

Denn es werden z. B. von der ersten Diagonale und dem ihr gegenüber liegenden Diagonalepunkt harmonisch getrennt, die Punktepaare 14, 23, $T_{156} T_{456}$, $T_{256} T_{356}$ und die Geradenpaare $t_1 t_4, t_2 t_3$, welche entsprechende Punkte und Geraden jener Kegelschnitte sind.

Diese Involutions-Mittelpunkte und Involutions-Axen sind die stets reellen Contingenzpunkte und gemeinsamen Sehnen der Kegelschnitte k_{12}, k_{34} ; sie trennen die Berührungssehnen 12, 34 der Kegelschnitte kk_{12}, kk_{34} harmonisch, und sind conjugierte Pole und Polaren in Hinsicht auf k . Also:

Je zwei der fünfzehn Kegelschnitte k_{ij} , welche k in vier verschiedenen, also in zwei und zwei, der Eckpunkte des Sechseckes 12...6 berühren, sind centrisch-involutorisch in Bezug auf zwei Diagonale und Diagonalen, als Involutions-Mittelpunkte und Involutions-Axen desjenige Viereckes, dessen Eckpunkte jene vier Berührungspunkte sind. Diese Diagonale und Diagonalen, sind die stets reellen Contingenzpunkte und gemeinsame Sehnen der zwei Kegelschnitte k_{ij} ; sie trennen die zwei Berührungssehnen der zwei Kegelschnitte harmonisch und sind conjugierte Pole und Polaren in Hinsicht auf k .

Für die Kegelschnittpaare $k_{12} k_{34}, k_{23} k_{41}, k_{13} k_{24}$ welche k in den Punktepaaren 12, 34; 23, 41; 13, 24 berühren, sind die stets reellen gemeinsamen Sehnenpaare $z_{56} z'_{56}, z'_{56} z''_{56}, z''_{56} z_{56}$ je zwei Seiten des zum Viereck 1234 und Vierseit $t_1 t_2 t_3 t_4$ gehörigen Diagonaldreieckes $z_{56} z'_{56} z''_{56}$.

Da das Sechseck 123456 in fünfzehn solche Vierecke 1234, welche mit dem Sechsecke vier gemeinsame Punkte haben, zerfällt, und die Seiten ihrer Diagonaldreiecke die stets reellen gemeinsamen

Sehnen sind von zwei der fünfzehn Kegelschnitte k_{ij} , so haben diese fünfzehn Kegelschnitte fünfundvierzig solche reelle gemeinsame Sehnen. (Wir bemerken, dass wir die etwa vorhandenen anderen gemeinsamen Sehnen, auch wenn sie reell sind, hiebei nicht mitzählen.) Daher:

Die stets reellen gemeinsamen Sehnen der fünfzehn Kegelschnitte k_{ij} , sind die fünfundvierzig Diagonalen desjenigen Brianchon'schen Sechsseits $t_1 t_2 \dots t_6$, dessen Seiten den Kegelschnitt k in den sechs Eckpunkten des Pascal'schen Sechsecks 123456 berühren. Aus jedem Pascal'schen Punkte strahlen zwei gemeinsame Sehnen aus und trennen zwei Seiten des Sechsecks harmonisch.

13. Drei Kegelschnitte k_{ij} , welche k in sechs verschiedenen Punkten berühren, haben drei Paar stets reelle gemeinsame Sehnen.

Nehmen wir die Kegelschnitte k_{12}, k_{34}, k_{56} ; von diesen haben

$$\begin{array}{llll} k_{34} k_{56} & \text{die gemeinsamen Sehnen } z_{12} = (t_3 t_6) (t_4 t_5), & z'_{12} = (t_3 t_5) (t_4 t_6), \\ k_{56} k_{12} & \text{'' '' '' } z_{34} = (t_5 t_2) (t_6 t_1), & z'_{34} = (t_5 t_1) (t_6 t_2), \\ k_{12} k_{34} & \text{'' '' '' } z_{56} = (t_1 t_4) (t_2 t_3), & z'_{56} = (t_1 t_3) (t_2 t_4), \end{array}$$

und es schneiden sich

$$\begin{array}{llll} z_{12} z_{34} z_{56} & \text{als Hauptdiagonalen des Sechseits } t_1 t_6 t_3 t_2 t_5 t_4 \\ z'_{12} z_{34} z_{56} & \text{'' '' '' '' } t_1 t_3 t_6 t_2 t_4 t_5 \\ z'_{12} z'_{34} z_{56} & \text{'' '' '' '' } t_1 t_6 t_4 t_2 t_5 t_3 \\ z'_{12} z'_{34} z'_{56} & \text{'' '' '' '' } t_1 t_4 t_6 t_2 t_3 t_5 \end{array}$$

in je einem Brianchon'schen Punkte. Jene gemeinsamen Sehnen bilden daher ein Vierseit $z^{\text{II, III}}$, dessen Diagonaldreieck $\triangle^{\text{II, III}} = [12\ 34\ 56]$, die Berührungssehnen von $k k_{12}, k k_{34}, k k_{56}$ zu Seiten hat. Da man von den fünfzehn Kegelschnitten fünfzehnmal drei solche auswählen kann, welche k in allen sechs Punkten 12...6 berühren, so folgt:

Die fünfzehn Kegelschnitte k_{ij} , theilen sich in fünfzehn solche Tripeln von Kegelschnitten, welche den Kegelschnitt k in allen sechs Eckpunkten des Sechsecks 123456 berühren. Ihre fünfundvierzig stets reellen gemeinsamen Sehnen sind die Seiten von fünfzehn Vierecken. Diese Vierecke sind Polvierecke (d. h. die Gegenseiten sind conjugierte Polaren) in Hinsicht auf k ; ihre sechzig Eckpunkte sind die sechzig Brianchon'sche Punkte desjenigen Sechsseits, dessen Seiten k in den Punkten 12...6 berühren, endlich sind ihre Diagonaldreiecke diejenigen fünf-

zehn Dreiecke, auf dessen Seiten alle sechs Punkte 1 2...6 liegen.

Ferner: Die 45 Diagonalen eines vollständigen Brianchon'schen Sechsseits $t_1 t_2 t_3 t_4 t_5 t_6$, dessen Seiten einen Kegelschnitt k in den sechs Punkten eines Pascal'schen Sechsecks 1 2 3 4 5 6 berühren, spalten sich in Hinsicht auf k in 15 Polvierecke, deren Eckpunkte die 60 Brianchon'schen Punkte sind, und in 15 Poldreiecke. Ebenso bilden die 45 Pascal'schen Punkte die Eckpunkte von 15 Polvierseiten, deren Seiten die 60 Pascal'sche Geraden sind, und in 15 Poldreiseiten. Die Diagonaldreiecke jener 15 Polvierecke haben bloß 15 Seiten, welche mit den 15 Seiten des Pascal'schen Sechsecks zusammenfallen; ebenso sind die 15 Eckpunkte des Brianchon'schen Sechsseits die 15 Eckpunkte der Diagonaldreiecke dieser 15 Polvierseiten.