Ueber die Reduction der binären quadratischen Formen.

Von

A. HURWITZ in Zürich.

§ 1.

Die Farey'schen Polygone.

Bezeichnen x, y, z homogene Dreieckscoordinaten, so durchläuft der Punkt

$$(1) \quad x : y : z = 1 : -\lambda : \lambda^2$$

einen Kegelschnitt K , wenn λ die reellen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ annimmt. Jedem besonderen Werthe λ_0 von λ entspricht ein bestimmter Punkt dieses Kegelschnittes, und wir wollen diesen Punkt kurz als den „Punkt λ_0 “ bezeichnen. Der Einfachheit halber möge die Coordinatenbestimmung so getroffen werden, dass der Kegelschnitt K ein Kreis ist und dass die Punkte $0, 1, \infty$ mit den Ecken eines dem Kreise K einbeschriebenen regulären Dreiecks zusammenfallen. (Vgl. Fig. 1). Wir werden nun in diesem Paragraphen eine Reihe von Definitionen und Sätzen aufstellen, die sich auf diejenigen Punkte des Kreises K beziehen, welche rationalen Werthen von λ entsprechen.

Fig. 1.

Definition 1. Die Verbindungsline zweier Punkte $\frac{r}{u}$ und $\frac{s}{v}$, wo r, u, s, v ganze Zahlen bezeichnen, soll eine „Elementarsehne“ des Kreises K heissen, wenn $rv - su = \pm 1$ ist.

Hiernach werden beispielsweise, da $0 = \frac{0}{1}$, $1 = \frac{1}{1}$, $\infty = \frac{1}{0}$ ist, die Sehnen

$$01, 1\infty, \infty 0$$

Elementarsehnen sein.

Definition 2. Ein dem Kreise K einbeschriebenes Dreieck soll

ein „Elementardreieck“ heissen, wenn jede Seite des Dreiecks eine Elementarsehne ist.

Beispielsweise wird das Dreieck 01∞ ein Elementardreieck sein. Im Anschluss an diese Definition beweisen wir den

Satz 1. Jede Elementarsehne ist Seite von zwei Elementardreiecken, die auf verschiedenen Seiten der Sehne liegen.

Es sei σ eine Elementarsehne, $\frac{r}{u}$ und $\frac{s}{v}$ seien ihre Endpunkte, so ist

$$rv - su = \varepsilon = \pm 1.$$

Soll nun $\frac{p}{q}$ der dritte Eckpunkt eines Elementardreiecks sein, dessen beide andern Eckpunkte $\frac{r}{u}$ und $\frac{s}{v}$ sind, so muss

$$pv - qs = \varepsilon_1 = \pm 1,$$

$$pu - qr = \varepsilon_2 = \pm 1$$

sein. Hieraus folgt, durch Auflösung nach p und q ,

$$\varepsilon p = \varepsilon_1 r - \varepsilon_2 s,$$

$$\varepsilon q = \varepsilon_1 u - \varepsilon_2 v,$$

also entweder $\frac{p}{q} = \frac{r+s}{u+v}$ oder $\frac{p}{q} = \frac{r-s}{u-v}$. Jeder dieser beiden Brüche liefert in Verbindung mit den Brüchen $\frac{r}{u}$ und $\frac{s}{v}$ auch thatsächlich ein Elementardreieck. Da ferner die Punkte $\frac{r}{u}$ und $\frac{s}{v}$ durch die Punkte $\frac{r+s}{u+v}$ und $\frac{r-s}{u-v}$ harmonisch getrennt werden, so liegen die beiden über

Fig. 2.

der Sehne σ möglichen Elementardreiecke zu verschiedenen Seiten der Sehne σ . Damit ist der Satz 1 vollständig bewiesen. Beiläufig sei noch bemerkt, dass man jedes der beiden über der Sehne σ möglichen Elementardreiecke aus dem anderen durch eine einfache geometrische Construction ableiten kann, da die Verbindungslinie der Punkte $\frac{r+s}{u+v}$ und $\frac{r-s}{u-v}$ durch den Pol der Sehne σ geht. (Vgl. Fig. 2.)

Es soll sich nun darum handeln, ein anschauliches Bild von der Gesamtheit aller Elementardreiecke zu gewinnen. Zu dem Ende stellen wir zunächst folgende neue Definition auf:

Definition 3. Man betrachte alle rationalen Zahlen $\frac{r}{u}$, deren Zähler und Nenner absolut genommen die positive ganze Zahl n nicht überschreiten. Die entsprechenden Punkte $\frac{r}{u}$ des Kreises K bilden die

Ecken eines dem Kreise einbeschriebenen convexen Polygones P_n , welches das n^{te} Farey'sche Polygon genannt werden soll.

So ist das erste Farey'sche Polygon P_1 das Viereck $\infty, -1, 0, 1$; das zweite Farey'sche Polygon P_2 das Achteck $\infty, -2, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, 2$ u. s. w. (Vgl. Figur 3, in welcher die Seiten des Polygones P_2 stark ausgezogen sind.)

Wir ergänzen diese Definition noch dadurch, dass wir als „nulltes“ Farey'sches Polygon P_0 das von den Punkten $\infty, 0$ gebildete Zweieck einführen. Es gilt dann allgemein der

Satz 2. Die Parameter der aufeinanderfolgenden Ecken des n^{ten} Farey'schen Polygones P_n bilden die n^{te} Farey'sche Reihe.*)

Fig. 3.

Aus den Eigenschaften der Farey'schen Reihen geht nun hervor:

Satz 3. Jede Seite eines Farey'schen Polygones ist eine Elementarsehne und umgekehrt: jede Elementarsehne ist Seite eines Farey'schen Polygones.

Den zweiten Theil dieses Satzes können wir noch näher präcisiren. Nämlich:

Satz 4. Wenn in der Reihe $P_0, P_1, P_2, \dots$ das Polygon P_n das erste ist, unter dessen Ecken sich beide Endpunkte der Elementarsehne σ finden, so ist σ eine Seite des Polygones P_n .

Hieran knüpfen wir den Beweis des folgenden Satzes:

Satz 5. Das n^{te} Farey'sche Polygon ($n > 0$) setzt sich gerade aus denjenigen Elementardreiecken zusammen, deren Eckpunkte sich unter den Ecken des n^{ten} Farey'schen Polygones befinden.

Oder anders ausgedrückt:

Die Elementardreiecke, die sich aus den Ecken des n^{ten} Farey'schen Polygones bilden lassen, bedecken dieses Polygon einfach und lückenlos.

Für den Fall $n = 1$ ist dieser Satz offenbar richtig, da das Polygon P_1 sich aus den beiden über der Sehne $\infty 0$ möglichen Elementardreiecken $\infty, 0, 1$; $\infty, 0, -1$ zusammensetzt. Wir brauchen also nur zu zeigen, dass der Satz für das Polygon P_{n+1} gilt, wenn wir seine Gültigkeit für das Polygon P_n als schon bewiesen voraussetzen. Nun setzen sich die Elementardreiecke, welche aus den Ecken des $(n+1)^{\text{ten}}$ Polygones gebildet werden können, zusammen

*) Vergl. die Abhandlung des Verfassers: „Ueber die angenäherte Darstellung der Zahlen durch rationale Brüche“ (diese Annalen Bd. 44, pag. 417).

1) aus denjenigen, bei welchen nur Ecken des n^{ten} Polygons zur Verwendung kommen und diese bedecken nach Voraussetzung das n^{te} Polygon einfach und lückenlos;

2) aus denjenigen, bei welchen auch Ecken des $(n+1)^{\text{ten}}$ Polygons, die nicht schon Ecken des n^{ten} Polygons sind, zur Verwendung gelangen. Ist C eine solche Ecke, so liegt dieselbe zwischen zwei aufeinanderfolgenden Ecken A und B des n^{ten} Polygons, mit welchen zusammen sie ein Elementardreieck CAB bestimmt (Satz 3). Da nun, nach Satz 4, CA und CB die einzigen Elementarseiten sind, deren einer Endpunkt mit C , deren anderer Endpunkt mit einer andern Ecke des $(n+1)^{\text{ten}}$ Polygons zusammenfällt, so ist CAB das einzige Elementardreieck, welches C zur einen Ecke hat.

Die zweite Kategorie von Elementardreiecken besteht also aus Dreiecken, die sich auf gewisse Seiten (AB) des n^{ten} Polygons aufsetzen. Offenbar entsteht das $(n+1)^{\text{te}}$ Polygon, indem wir diese Dreiecke zum n^{ten} Polygone hinzufügen, woraus der zu beweisende Satz hervorgeht.

Aus dieser Betrachtung folgt zugleich der

Satz 6. *Ist in der Reihe der Farey'schen Polygone $P_1, P_2, \dots$ das Polygon P_n das erste, unter dessen Ecken sich die drei Eckpunkte A, B, C irgend eines Elementardreiecks befinden, so sind diese Eckpunkte A, B, C aufeinanderfolgende Ecken des Polygons P_n .*

Lassen wir die ganze Zahl n über alle Grenzen wachsen, so nähert sich das Polygon P_n immer mehr dem Kreise K an. Aus dem Satz 5 ergibt sich daher der

Satz 7. *Die Gesamtheit aller Elementardreiecke überdeckt das Innere des Kreises K einfach und lückenlos.*

Die von der Gesamtheit aller Elementardreiecke gebildete Figur stimmt im Wesentlichen mit derjenigen überein, die in den von Herrn Fricke herausgegebenen Vorlesungen Felix Klein's über elliptische Modulfunctionen*) mitgeteilt wird. Herr Klein hat diese Figur aus der der Theorie der Modulfunctionen zu Grunde liegenden Figur abgeleitet. Umgekehrt kann man die letztere und ihre Eigenschaften aus der ersteren ableiten.

§ 2.

Geometrische Darstellung der binären quadratischen Formen.

Wir ordnen nun der binären quadratischen Form

$$(1) \quad f \equiv (a, b, c) \equiv ax^2 + 2bxy + cy^2$$

denjenigen Punkt zu, dessen homogene Coordinaten $a : b : c$ sind.

*) Leipzig 1890, Bd. I, S. 239. Vergl. auch die Bemerkungen am Schlusse der vorliegenden Arbeit.

Es entspricht dann jeder Form ein bestimmter Punkt. Umgekehrt entsprechen irgend einem Punkte (a, b, c) die unendlich vielen Formen

$$(2) \quad \varrho a x^2 + 2\varrho b x y + \varrho c y^2,$$

wo ϱ jeden beliebigen reellen Werth erhalten kann.

Wenn die Determinante D der Form (a, b, c) :

$$(3) \quad D = b^2 - ac$$

verschwindet, so können wir λ so bestimmen, dass

$$(4) \quad a : b : c = 1 : -\lambda : \lambda^2$$

ist. Es entspricht also einer Form mit verschwindender Determinante ein Punkt λ des Kreises K .

Umgekehrt entsprechen nach (2) dem Punkte λ des Kreises K die Formen

$$(5) \quad \varrho x^2 - 2\varrho \lambda x y + \varrho \lambda^2 y^2 = \varrho (x - \lambda y)^2.$$

Man zeigt ferner leicht, dass eine Form f , durch einen Punkt im Innern oder ausserhalb des Kreises K geometrisch dargestellt wird, je nachdem ihre Determinante D negativ oder positiv ist.

Dies vorausgeschickt, betrachten wir eine beliebige lineare Transformation

$$(6) \quad (S) \quad \begin{cases} x = \alpha x' + \beta y', \\ y = \gamma x' + \delta y'. \end{cases}$$

Durch dieselbe geht die Form (1) in die Form

$$(7) \quad fS \equiv f' \equiv a' x'^2 + 2b' x' y' + c' y'^2$$

über, wo

$$(8) \quad \begin{cases} a' = \alpha \alpha^2 + 2b \alpha \gamma + c \gamma^2, \\ b' = \alpha \alpha \beta + b(\alpha \delta + \beta \gamma) + c \gamma \delta, \\ c' = \alpha \beta^2 + 2b \beta \delta + c \delta^2 \end{cases}$$

ist. Es wird demnach durch die Transformation S jedem Punkte (a, b, c) ein bestimmter Punkt (a', b', c') zugeordnet, und ein Blick auf die Gleichungen (8) lehrt, dass die durch diese Zuordnung vermittelte Umformung der Ebene eine Collineation ist. Wir wollen diese, der Transformation S entsprechende Collineation ebenfalls mit S bezeichnen. Bei der Collineation S geht der Kreis K in sich über. In der That werden die Formen (5), welche dem Punkte λ des Kreises K entsprechen, durch die Transformation S in die Formen

$$\varrho [\alpha x' + \beta y' - \lambda(\gamma x' + \delta y')]^2 = \varrho (\alpha - \gamma \lambda)^2 \left(x' - \frac{\delta \lambda - \beta}{-\gamma \lambda + \alpha} y' \right)^2$$

übergeführt. Dem Punkte λ des Kreises K entspricht also vermöge der Collineation S der Punkt λ' des Kreises K , wo

$$(9) \quad \begin{cases} \lambda' = \frac{\delta\lambda - \beta}{-\gamma\lambda + \alpha}, \\ \lambda = \frac{\alpha\lambda' + \beta}{\gamma\lambda' + \delta} \end{cases}$$

ist. Die Peripherie des Kreises K wird also durch die Collineation S projectiv auf sich selber bezogen. Schneidet irgend eine Gerade g den Kreis K in den Punkten λ_1 und λ_2 und sind λ_1' und λ_2' die diesen Punkten bezüglich entsprechenden Punkte, so wird in der Collineation S der Geraden g die Verbindungsgerade g' der Punkte λ_1' und λ_2' entsprechen. Hiernach leuchtet ein, dass die Collineation S durch die projective Beziehung des Kreises K auf sich selber schon vollständig bestimmt ist. Und dieser Umstand bringt es mit sich, dass wir die Transformationstheorie der binären quadratischen Formen auf das Studium der projectiven Beziehungen des Kreises K auf sich selber (also auf das Studium der Formen mit verschwindender Determinante) werden gründen können. *)

Durch die projective Beziehung (9) sind die Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, der Transformation S nur ihren Verhältnissen nach bestimmt. Wir wollen aber zwei Transformationen

$$S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad S' = \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix}$$

als nicht verschieden ansehen; wenn

$$\alpha : \beta : \gamma : \delta = \alpha' : \beta' : \gamma' : \delta'.$$

ist, und diese Festsetzung hat zur Folge, dass die projectivische Beziehung (9) die Transformation S vollständig bestimmt.

Fügen wir hier noch eine Bemerkung hinzu, die sich auf das Vorzeichen der Determinante $\alpha\delta - \beta\gamma$ der Transformation S bezieht! Wenn λ von $-\infty$ bis $+\infty$ wächst, so wird der Punkt λ gerade die Peripherie des Kreises K beschreiben. Den Sinn, in welchem dies geschieht, wollen wir den *positiven* Durchlaufungssinn des Kreises K nennen. Wenn nun der Punkt λ den Kreis K im positiven Sinne durchläuft, so wird der nach (9) entsprechende Punkt λ' den Kreis K gleichzeitig durchlaufen, und zwar ebenfalls im positiven Sinne, wenn $\alpha\delta - \beta\gamma$ positiv ist, dagegen im entgegengesetzten (negativen) Sinne, wenn $\alpha\delta - \beta\gamma$ negativ ist.

Zur Erleichterung der Ausdrucksweise werden wir übrigens weiterhin, sofern kein Missverständniss zu befürchten ist, sagen „der Punkt (a, b, c) oder allgemeiner irgend eine Figur F “ gehe durch die Trans-

*) In gleicher Weise wird man der Transformationstheorie der cubischen Formen die projectivischen Beziehungen einer Raumcurve 3. Ordnung auf sich selber u. s. w. zu Grunde legen können. Vergl. übrigens die allgemeinen Ausführungen am Schlusse der Arbeit.

formation S in den Punkt (a', b', c') bez. in die Figur F' über“, wenn die Collineation S den Punkt (a, b, c) bez. die Figur F in den Punkt (a', b', c') bez. die Figur F' überführt.

§ 3.

Die ganzzahligen linearen Transformationen der Determinante 1.

Wir verstehen von jetzt ab unter einer Transformation S stets eine solche, deren Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ganze Zahlen der Determinante

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

sind. Durch eine Transformation S gehen die Endpunkte $\frac{r}{u}, \frac{s}{v}$ einer Elementarsehne nach (9) in die Punkte $\frac{-\beta u + \delta r}{\alpha u - \gamma r}$ bez. $\frac{-\beta v + \delta s}{\alpha v - \gamma s}$ über. Die letzteren bilden wieder die Endpunkte einer Elementarsehne; denn es ist

$$\begin{aligned} & (\alpha u - \gamma r)(-\beta v + \delta s) - (\alpha v - \gamma s)(-\beta u + \delta r) \\ &= (\alpha\delta - \beta\gamma)(us - vr) = \pm 1. \end{aligned}$$

Somit besteht der

Satz 8. *Durch eine Transformation S geht jede Elementarsehne wieder in eine Elementarsehne über.*

Und hieraus folgt unmittelbar der

Satz 9. *Durch eine Transformation S geht jedes Elementardreieck wieder in ein Elementardreieck über.*

An diesen Satz knüpft sich sofort die Frage: Gibt es Transformationen S , die das Dreieck Δ in das Dreieck Δ' überführen, wo Δ und Δ' irgend zwei Elementardreiecke bezeichnen?

Wir betrachten hier zunächst den Fall, wo Δ' das Dreieck 01∞ ist. Die Ecken des Dreiecks Δ seien die Punkte p, q, r , so sind

$$p = \frac{\beta}{\delta}, \quad q = \frac{\beta + \alpha}{\gamma + \delta}, \quad r = \frac{\alpha}{\gamma}$$

drei aufeinanderfolgende Glieder einer Farey'schen Reihe (Satz 6).

Eine Transformation S , welche Δ in das Dreieck 01∞ überführt, muss nun die Punkte p, q, r in irgend einer Reihenfolge in die Punkte $0, 1, \infty$ überführen. Da aber bei jeder Transformation S der positive Durchlaufungssinn des Kreises K wieder in den positiven Durchlaufungssinn übergeht, so kommen nur die drei Zuordnungen

$$(p, q, r); \quad (q, r, p); \quad (r, p, q)$$

$$(0, 1, \infty); \quad (0, 1, \infty); \quad (0, 1, \infty)$$

in Betracht. Diesen drei Zuordnungen entsprechend erhalten wir die Transformationen

$$(10) \quad S_1 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} -\beta & \alpha + \beta \\ -\delta & \gamma + \delta \end{pmatrix}, \quad S_3 = \begin{pmatrix} \alpha + \beta & -\alpha \\ \gamma + \delta & -\gamma \end{pmatrix},$$

welche das Dreieck Δ in das Dreieck 01∞ überführen. Da jede dieser Transformationen eine andere Ecke des Dreiecks Δ in den Punkt ∞ überführt, so können wir den Satz aussprechen:

Satz 10. Jedes Elementardreieck Δ lässt sich durch eine einzige Transformation S so in das Dreieck 01∞ überführen, dass eine bestimmte der Ecken des Elementardreiecks in den Punkt ∞ übergeht.

Den drei Ecken eines Elementardreiecks entsprechend giebt es so drei Transformationen (10), die dasselbe in das Dreieck 01∞ überführen.

Sind nun Δ und Δ' irgend zwei Elementardreiecke, S' eine der drei Transformationen, die Δ' in das Dreieck 01∞ überführen, und bezeichnet S eine Transformation, durch die Δ in Δ' übergeht, so ist klar, dass durch die zusammengesetzte Transformation SS' das Dreieck Δ in das Dreieck 01∞ übergeht. Daher ist entweder $SS' = S_1$ oder $SS' = S_2$ oder $SS' = S_3$. Hieraus folgt, dass es drei Transformationen, nämlich

$$S_1(S')^{-1}, S_2(S')^{-1}, S_3(S')^{-1}$$

giebt, die das Dreieck Δ in das Dreieck Δ' überführen.

Specialisiren wir den Satz 10 auf den Fall, wo das Dreieck Δ mit dem Dreieck 01∞ zusammenfällt, also $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\delta = 1$ ist, so erhalten wir das Resultat:

Satz 11. Das Elementardreieck 01∞ geht durch die Transformationen

$$(11) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und nur durch diese in sich über.

Die diesen Transformationen (11) entsprechenden Collineationen haben eine einfache geometrische Bedeutung. Offenbar sind dieselben diejenigen Drehungen der Ebene um den Mittelpunkt O des Kreises K , bei welchen das Dreieck 01∞ mit sich zur Deckung kommt.

Was die Elementarsehnen angeht, so wird jede solche Sehne σ durch zwei Transformationen S in die Sehne 0∞ (und durch ebenso-viele Transformationen in jede andere Elementarsehne) übergehen. Denn die Sehne σ ist Seite von zwei Elementardreiecken und jedes der letzteren lässt sich durch eine einzige Transformation so in das Dreieck 01∞ überführen, dass σ in die Seite 0∞ übergeht.

Jede Elementarsehne σ geht durch eine einzige von der Identität verschiedene Transformation in sich über, nämlich durch eine der drei Transformationen, welche das eine der beiden über σ möglichen Elementardreiecke in das andere überführen. Für die Elementarsehne 0∞ insbesondere ist die betreffende Transformation diejenige, welche

die Punkte $0, 1, \infty$ bez. in $\infty, -1, 0$ überführt, also, wie eine leichte Rechnung zeigt, die Transformation

$$\begin{pmatrix} 0, & -1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix}.$$

Punkte der Sehne 0∞ , die durch diese Transformation einander zugewiesen werden, sind Spiegelpunkte von einander bezüglich des Durchmessers 01 .

§ 4.

Reduction der quadratischen Formen mit negativer Determinante.

Jede quadratische Form, deren Determinante negativ ist, wird durch einen Punkt im Innern des Kreises K dargestellt. Wir setzen nun in Bezug auf diese Formen folgende Definition fest:

Definition 4. Eine Form (a, b, c) von negativer Determinante heisst „reducirt“, wenn der ihr entsprechende Punkt (a, b, c) im Innern oder auf dem Rande des Dreiecks 01∞ liegt.

Da die Elementardreiecke das Innere des Kreises K lückenlos bedecken, so wird der einer beliebigen Form negativer Determinante entsprechende Punkt im Innern oder auf dem Rande irgend eines Elementardreiecks Δ liegen. Jede der drei Transformationen S , durch die das Dreieck Δ in das Dreieck 01∞ übergeht, führt offenbar die betreffende Form in eine reducirt Form über. Es gilt daher der

Satz 12. Jede Form negativer Determinante ist einer reducirten Form äquivalent.

Ist (a, b, c) eine reducirt Form, deren repräsentirender Punkt im Innern (nicht auf dem Rande) des Dreiecks 01∞ liegt, so wird dieselbe durch die und nur durch die Transformationen S wieder in eine reducirt Form übergehen, welche das Dreieck 01∞ in sich überführen.

Unter Rücksicht auf den Satz 11 folgt hieraus:

Satz 13. Die reducirten Formen, deren repräsentirende Punkte im Innern (nicht auf dem Rande) des Dreiecks 01∞ liegen, ordnen sich in Tripel unter einander äquivalenter, wie

$(a, b, c), (c, -(b+c), a+2b+c), (a+2b+c, -(a+b), a).$
Zwei solche reducirt Formen sind nur dann äquivalent, wenn sie demselben Tripel angehören.

Die drei Formen eines solchen Tripels sind von einander verschieden, mit Ausnahme des Falles

$$a = -2b = c,$$

in welchem die drei Formen unter einander identisch werden. Der

Repräsentant der Formen, für welche $a = -2b = c$ ist, ist der Mittelpunkt O des Kreises K , was unmittelbar aus der geometrischen Bedeutung der Transformationen (11) einleuchtet.

Ist (a, b, c) eine reducirte Form, deren Repräsentant auf einer Seite, etwa auf der Seite 0∞ des Dreiecks 01∞ liegt, so geht dieselbe durch die Transformationen (11) in äquivalente Formen über, deren Repräsentanten auf den Seiten 01 bez. 1∞ liegen. Ferner wird die Transformation S die Form (a, b, c) dann und nur dann in eine Form, deren Repräsentant ebenfalls auf der Seite 0∞ liegt, überführen, wenn die Transformation S die Sehne 0∞ fest lässt, wenn also S entweder die identische oder die Transformation $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist. Aus diesen Bemerkungen ergibt sich der

Satz 14. *Die reducirten Formen, deren repräsentirende Punkte auf den Seiten des Dreiecks 01∞ liegen, gruppieren sich zu je sechs unter einander äquivalenten, wie*

$$(a, 0, c), (c, -c, a+c), (a+c, -a, a), \\ (c, 0, a), (a, -a, a+c), (a+c, -c, c).$$

Zwei solche reducirte Formen sind nur dann äquivalent, wenn sie einer derartigen Gruppe von sechs Formen angehören.

Die sechs Formen sind, wie am einfachsten aus der geometrischen Gruppierung der entsprechenden Punkte hervorgeht, stets von einander verschieden, mit einziger Ausnahme des Falles, wo die Repräsentanten der Formen mit den Mitten der Seiten des Dreiecks 01∞ zusammenfallen. Dann reduciren sich die sechs Formen auf nur drei, nämlich

$$(a, 0, a), (a, -a, 2a), (2a, -a, a).$$

Betrachtet man a, b, c als laufende Coordinaten, so sind die Gleichungen der Seiten $0\infty, \infty 1, 10$ des Dreiecks 01∞ bezüglich

$$(12) \quad b = 0, \quad a + b = 0, \quad c + b = 0,$$

und hieraus folgt:

Satz 15. *Die Form (a, b, c) negativer Determinante ist eine reducirte Form, wenn die nicht verschwindenden unter den Zahlen $-b, a+b, c+b$ gleiches Vorzeichen haben.*

Die Vorzeichen der Verhältnisse $\frac{-b}{a+b}, \frac{-b}{c+b}, \frac{a+b}{c+b}$ sind nämlich im Innern des Dreiecks 01∞ constant und ändern sich beim Ueberschreiten der Seiten des Dreiecks. Indem man diese Verhältnisse für den Mittelpunkt O des Kreises K , dessen Coordinaten

$$a : b : c = 2 : -1 : 2$$

sind, berechnet, erkennt man, dass die Verhältnisse im Innern des Dreiecks positiv sind.

Die in diesem Paragraphen entwickelten Sätze enthalten die vollständige Theorie der Reduction quadratischer Formen von negativer Determinante. Wir fügen nur noch zwei Bemerkungen hinzu:

Erstens: Ist irgend eine Form gegeben, so hat man, um dieselbe zu reduciren, dasjenige Elementardreieck aufzusuchen, in welches der die Form repräsentirende Punkt fällt. Wie dieses auf Grund eines einfachen Algorithmus geschieht, wollen wir im nächsten Paragraphen zeigen.

Zweitens: Will man die Definition der reducirten Formen so stellen, dass jede Form ausnahmslos einer und nur einer reducirten Form äquivalent ist, so erzielt man dies offenbar dadurch, dass man eine Form reducirt nennt, wenn ihr Repräsentant dem Dreieck 00∞ angehört, wobei nur die stark ausgezeichnete Hälfte des Randes des Dreiecks zu diesem zu rechnen ist. (Vgl. Fig. 1.)

§ 5.

Algorithmus zur Reduction einer Form von negativer Determinante.

Um das Elementardreieck zu bestimmen, in dessen Innern oder auf dessen Rand der Punkt (a, b, c) liegt, welcher die Form negativer Determinante

$$(13) \quad f = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

repräsentirt, suchen wir in der Reihe der Farey'schen Polygone $P_0, P_1, P_2, \dots$ das erste auf, in welches der Punkt (a, b, c) fällt. Ist P_n irgend ein Farey'sches Polygon, so setzt sich das Innere des Kreises K zusammen aus dem Polygone P_n und den Kreissegmenten, die über den Seiten des Polygons P_n liegen. Liegt nun der Punkt (a, b, c) ausserhalb (auch nicht auf dem Rande) des Polygons P_n , so muss sich derselbe in einem dieser Kreissegmente befinden. Sind die Punkte p und r die Endpunkte der Seite des Polygons P_n , welche das betreffende Kreissegment begrenzt, so sollen die Brüche p und r ein „Näherungspaar“ des Punktes (a, b, c) oder der Form (a, b, c) heissen.

Den Polygonen $P_0, P_1, P_2, \dots$ entspricht so je ein Näherungspaar des Punktes (a, b, c) und zwar so lange, bis wir an ein Polygon gelangen, auf dessen Rand oder in dessen Inneres der Punkt (a, b, c) fällt. Wir setzen voraus, dass die Brüche p und r in derselben Form geschrieben werden, in welcher sie als aufeinanderfolgende Glieder der Farey'schen Reihe erscheinen.*) Insbesondere ist zu beachten, dass

*) In jeder Farey'schen Reihe ist $\frac{-1}{0}$ das erste, $\frac{1}{0}$ das letzte Glied; alle anderen Glieder werden als reducirte Brüche mit positivem Nenner geschrieben.

das aus dem Polygone P_0 (dem Zweieck 0∞) entnommene Näherungspaar

$$p = \frac{0}{1}, \quad r = \frac{1}{0} \quad \text{oder} \quad p = \frac{-1}{0}, \quad q = \frac{0}{1}$$

ist, je nachdem der Punkt (a, b, c) sich mit dem Punkte 1 des Kreises K oder mit dem Punkte -1 des Kreises K auf derselben Seite der Geraden 0∞ befindet.

Zur Bestimmung der Näherungspaare eines Punktes (a, b, c) dienen folgende Betrachtungen. Es sei

$$(14) \quad p = \frac{\xi_2}{\eta_2}, \quad r = \frac{\xi_1}{\eta_1}$$

ein Näherungspaar. In der ersten Farey'schen Reihe, in welcher p und r nicht mehr aufeinanderfolgende Glieder sind, tritt der Bruch

$$(15) \quad q = \frac{\xi_3}{\eta_3}, \quad \text{wo} \quad \xi_3 = \xi_1 + \xi_2, \quad \eta_3 = \eta_1 + \eta_2,$$

zwischen p und r . Liegt der Punkt (a, b, c) im Innern des Dreiecks pqr oder auf einer der beiden Seiten pq , qr , so ist (p, r) das letzte überhaupt existirende Näherungspaar. Liegt der Punkt (a, b, c) in dem von pq begrenzten Kreissegment, so bilden die Brüche p, q , liegt er in dem von qr begrenzten Kreissegment, die Brüche q, r das auf (p, r) folgende Näherungspaar. Nun gehen durch die Transformation

$$(16) \quad S = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \eta_1 & \eta_2 \end{pmatrix}$$

die Punkte p, q, r in die Punkte $0, 1, \infty$ bez. über. Durch dieselbe Transformation gehe die Form (a, b, c) in die Form (a', b', c') über. Dann wird der Punkt (a', b', c') gerade so zu dem Dreieck 01∞ liegen, wie der Punkt (a, b, c) zu dem Dreieck pqr . Es folgt also:

1) Liegt der Punkt (a', b', c') im Dreieck 01∞ oder auf einer der Seiten $01, 1\infty$, was der Fall ist, wenn die Quotienten

$$\frac{b'}{a' + b'}, \quad \frac{b'}{c' + b'}$$

beide negativ sind oder einer von ihnen unendlich ist, so ist p, r das letzte existirende Näherungspaar. Zugleich geht die Form (a, b, c) durch die Transformation S in die reducirte Form (a', b', c') über.

2) Liegt der Punkt (a', b', c') in dem von 01 begrenzten Kreissegment, was der Fall ist, wenn $\frac{b'}{c' + b'}$ positiv ist, so ist (p, q) das auf (p, r) folgende Näherungspaar.

3) Liegt der Punkt (a', b', c') in dem von 1∞ begrenzten Kreis-segment, was der Fall ist, wenn $\frac{b'}{a'+b'}$ positiv ist, so ist (q, r) das auf (p, r) folgende Näherungspaar.

Was die Werthe von $a', b', c', a' + b', c' + b'$ angeht, so erhält man dieselben auf folgende Weise: Man setze

$$(17) \quad f_i = a\xi_i^2 + 2b\xi_i\eta_i + c\eta_i^2, \quad f_{ik} = a\xi_i\xi_k + b(\xi_i\eta_k + \xi_k\eta_i) + c\eta_i\eta_k \\ (i, k = 1, 2, 3)$$

und stelle diese Werthe mit r und p in dieser Folge zusammen:

$$(18) \quad r = \frac{\xi_1}{\eta_1}, \quad p = \frac{\xi_2}{\eta_2}, \quad f_1, f_{12}, f_2, f_{13}, f_{23}, f_3.$$

Es bestehen dann die Gleichungen:

$$(19) \quad f_{13} = f_1 + f_{12}, \quad f_{23} = f_2 + f_{12}, \quad f_3 = f_{13} + f_{23},$$

so dass man durch einfache Additionen die Werthe f_{13}, f_{23}, f_3 aus f_1, f_{12}, f_2 erhält. Da nun offenbar

$$a' = f_1, \quad b' = f_{12}, \quad c' = f_2$$

ist, so hat man

$$a' + b' = f_{13}, \quad c' + b' = f_{23}.$$

Es ist daher p, r das letzte Näherungspaar (und (a, b, c) geht durch $\left(\frac{\xi_1}{\eta_1}, \frac{\xi_2}{\eta_2}\right)$ in die reducirte Form (f_1, f_{12}, f_2) über), wenn die Werthe f_{13}, f_{23} entgegengesetztes Zeichen haben, wie f_{12} , oder wenn einer dieser Werthe verschwindet. Andernfalls folgt auf das Paar $\frac{\xi_1}{\eta_1}, \frac{\xi_2}{\eta_2}$ das Paar $\frac{\xi_3}{\eta_3}, \frac{\xi_2}{\eta_2}$ oder das Paar $\frac{\xi_1}{\eta_1}, \frac{\xi_3}{\eta_3}$, je nachdem f_{12} und f_{23} oder f_{12} und f_{13} gleiche Zeichen haben.

Ausgehend von dem ersten Näherungspaar

$$\frac{1}{0}, \frac{0}{1}, \quad \text{dem die Werthe } f_1 = a, \quad f_{12} = b, \quad f_2 = c,$$

bez.

$$\frac{0}{1}, \frac{-1}{0}, \quad \text{dem die Werthe } f_1 = c, \quad f_{12} = -b, \quad f_2 = a$$

entsprechen, kann man hiernach successive alle Näherungspaare durch einfache Additionen finden und erhält mit dem letzten Näherungspare eine Transformation, welche die Form (a, b, c) in eine reducirte überführt. Was das erste Näherungspaar angeht, so ist dasselbe $\frac{0}{1}, \frac{-1}{0}$ oder $\frac{1}{0}, \frac{0}{1}$, je nachdem $\frac{b}{a+b}, \frac{b}{c+b}$ beide positiv sind oder nicht.

Beispiel 1.

Die Form (78, -53, 37) zu reduciren.

Man erhält folgende Tabelle:

r	p	f_1	f_{12}	f_2	f_{13}	f_{23}	f_3
$\frac{1}{0}$	$\frac{0}{1}$	78	-53	37	25	-16	9
$\frac{1}{1}$	$\frac{0}{1}$	9	-16	37	-7	21	14
$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	9	-7	14	2	7	9

Die gegebene Form geht also durch die Transformation $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ in die reducirte Form (9, -7, 14) über.

Beispiel 2.

Die Form (41, 35, 30) zu reduciren.

Man erhält in diesem Falle folgende Tabelle:

r	p	f_1	f_{12}	f_2	f_{13}	f_{23}	f_3
$\frac{0}{1}$	$\frac{-1}{0}$	30	-35	41	-5	6	1
$\frac{0}{1}$	$\frac{-1}{1}$	30	-5	1	25	-4	21
$\frac{-1}{2}$	$\frac{-1}{1}$	21	-4	1	17	-3	14
$\frac{-2}{3}$	$\frac{-1}{1}$	14	-3	1	11	-2	9
$\frac{-3}{4}$	$\frac{-1}{1}$	9	-2	1	7	-1	6
$\frac{-4}{5}$	$\frac{-1}{1}$	6	-1	1	5	0	5

Die gegebene Form geht also durch die Transformation $\begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ in die reducirte Form (6, -1, 1) über.

Die dem letzten Näherungspaare entsprechenden Werthe $f_1, f_{12}, f_2, f_{13}, f_{23}, f_3$ liefern übrigens, wie aus den Sätzen 13 und 14 folgt, unmittelbar alle reducirten Formen, denen die ursprünglich gegebene Form (a, b, c) äquivalent ist. Diese reducirten Formen sind nämlich $(f_1, f_{12}, f_2), (f_2, -f_{23}, f_3), (f_3, -f_{13}, f_1)$, zu denen noch die durch

Vertauschung der äusseren Coefficienten entstehenden Formen hinzutreten, falls eine der drei Zahlen f_{12}, f_{13}, f_{23} verschwindet. So sind z. B. die der Form $(78, -53, 37)$ äquivalenten reducirten Formen die folgenden:

$$(9, -7, 14) \quad (14, -7, 9) \quad (9, -2, 9),$$

und die der Form $(41, 35, 30)$ äquivalenten reducirten Formen lauten:

$$(6, -1, 1), \quad (1, 0, 5), \quad (5, -5, 6),$$

$$(1, -1, 6), \quad (5, 0, 1), \quad (6, -5, 5).$$

§ 6.

Reduction der quadratischen Formen mit positiver Determinante.

Eine Form (a, b, c) , deren Determinante $D = b^2 - ac$ positiv ist, wird durch einen Punkt ausserhalb des Kreises K repräsentirt. Wir wollen indessen, da sich dieses als zweckmässig erweist, an Stelle dieses Punktes seine Polare in Bezug auf den Kreis K als Repräsentanten der Form betrachten.

Die Gleichung dieser Polare lautet

$$(20) \quad ax - 2by + cz = 0,$$

wo x, y, z die laufenden Coordinaten bezeichnen. Die Parameter der Durchschnittspunkte der Geraden (20) mit dem Kreise K sind die Wurzeln der Gleichung

$$(21) \quad a\lambda^2 + 2b\lambda + c = 0$$

und haben also die Werthe:

$$(22) \quad \lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{a}, \quad \lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{a}.$$

Das Zeichen $\sqrt{D}$ soll hier den positiven Werth der Quadratwurzel bedeuten und die Wurzel λ_1 möge als die „erste“, die Wurzel λ_2 als die „zweite“ Wurzel der Form (a, b, c) bezeichnet werden.

Geht die Form (a, b, c) durch eine Transformation S in die Form (a', b', c') über, so geht bei der entsprechenden Collineation S die Gerade $\lambda_1 \lambda_2$, welche die Form (a, b, c) repräsentirt, in die Gerade $\lambda'_1 \lambda'_2$ über, welche die Form (a', b', c') repräsentirt. Und zwar zeigt eine kurze Rechnung*), dass sich die ersten Wurzeln und die zweiten Wurzeln entsprechen, d. h. dass bei der Collineation S der Punkt λ_1 des Kreises K in den Punkt λ'_1 , der Punkt λ_2 in den Punkt λ'_2 übergeht.

*) Vgl. Dirichlet, Vorlesungen über Zahlentheorie, herausgegeben von R. Dedekind, 4. Auflage, (Braunschweig 1894) 4. Abschnitt, § 73.

Wir bemerken noch, dass wir, um triviale Ausnahmen zu vermeiden, nur Formen betrachten wollen, deren Wurzeln λ_1, λ_2 irrational sind.

Dies vorausgeschickt, definiren wir die reducirten Formen so:

Definition 5. Eine Form (a, b, c) von positiver Determinante heisst reducirt, wenn ihre erste Wurzel λ_1 positiv, ihre zweite Wurzel λ_2 negativ ist.

Für eine reducirte Form liegen die Punkte λ_1 und λ_2 des Kreises K auf verschiedenen Seiten der Elementarsehne 0∞ , nämlich λ_1 auf derjenigen Seite, auf welcher der Punkt $+1$ und λ_2 auf derjenigen Seite, auf welcher der Punkt -1 liegt. Die der Form entsprechende Gerade $\lambda_1\lambda_2$ schneidet also die Elementarsehne 0∞ .

Aus den Gleichungen

$$\lambda_1 - \lambda_2 = \frac{2\sqrt{D}}{a}, \quad \lambda_1\lambda_2 = \frac{c}{a}$$

liest man unmittelbar den Satz ab:

Satz 16. Eine Form (a, b, c) von positiver Determinante ist dann und nur dann reducirt, wenn ihr erster Coefficient a positiv, ihr letzter Coefficient c negativ ist.

Bezeichnet jetzt (a, b, c) eine beliebige Form positiver Determinante und ist pr eine Elementarsehne, welche die der Form entsprechende Gerade $\lambda_1\lambda_2$ trifft, so giebt es zwei Transformationen S , welche pr in die Elementarsehne 0∞ überführen. Offenbar geht durch die eine dieser beiden Transformationen die Form (a, b, c) in eine reducirte Form über. Da aber die Gerade $\lambda_1\lambda_2$ nothwendig gewisse Elementardreiecke durchschneidet (denn diese erfüllen das Innere des Kreises K lückenlos), so giebt es stets auch Elementarsehnen pr , welche die Gerade $\lambda_1\lambda_2$ treffen. Es folgt also:

Satz 17. Jede Form (a, b, c) positiver Determinante ist einer reducirten Form äquivalent. Und zwar entspricht jeder Elementarsehne, welche die die Form repräsentirende Gerade $\lambda_1\lambda_2$ trifft, eine ganz bestimmte Transformation S , welche die Form in eine reducirte Form überführt.

Bezeichnen wir mit

$$(23) \quad p = \frac{\xi_2}{\eta_2}, \quad r = \frac{\xi_1}{\eta_1}$$

die Parameter der Endpunkte einer $\lambda_1\lambda_2$ treffenden Elementarsehne, so dass $\frac{\xi_2}{\eta_2}, \frac{\xi_1}{\eta_1}$ zwei aufeinander folgende Glieder einer Farey'schen Reihe sind, so werden

$$(24) \quad S_1 = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \eta_1 & \eta_2 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} -\xi_2 & \xi_1 \\ -\eta_2 & \eta_1 \end{pmatrix}$$

die beiden Transformationen sein, die pr in die Elementarsehne 0∞ überführen. Wenn wir ferner für die Form positiver Determinante

$$(25) \quad f = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

dieselben Bezeichnungen beibehalten, die wir in § 5 durch die Gleichungen (17) für Formen negativer Determinante eingeführt haben, so geht die Form (a, b, c) durch die Transformationen (24) in die Formen (f_1, f_{12}, f_2) bez. $(f_2, -f_{12}, f_1)$ über. Von diesen beiden Formen ist die erste oder die zweite reducirt, je nachdem von den beiden Zahlen f_1, f_2 die erste oder die zweite positiv ist.

Es ist nun zweckmässig, folgende Festsetzung zu treffen:

Definition 6. Ist (A, B, C) eine Form positiver Determinante, deren äussere Coefficienten A, C entgegengesetzte Vorzeichen haben, so soll $(A, B, C)_e$ die Form (A, B, C) oder die Form $(C, -B, A)$ bedeuten, je nachdem A oder C positiv ist.

Wir können dann folgenden Satz aussprechen:

Satz 18. Die der Form (25) äquivalente reducirte Form, welche der durch die Parameter (23) bestimmten Elementarsehne entspricht, ist die Form $(f_1, f_{12}, f_2)_e$. Die entsprechende Transformation ist die Transformation S_1 oder S_2 , je nachdem f_1 oder f_2 positiv ist.

§ 7.

Die Ketten reducirter Formen.

Wir wollen nun zunächst die Gesamtheit der Elementarsehnen näher betrachten, welche die einer Form (a, b, c) positiver Determinante entsprechende Gerade $\lambda_1 \lambda_2$ treffen. Zu dem Ende sei Δ irgend ein Elementardreieck, welches von der Geraden $\lambda_1 \lambda_2$ durchschnitten wird; σ und σ' seien die Seiten des Dreiecks Δ , welche von der Geraden $\lambda_1 \lambda_2$ getroffen werden. Und zwar möge ein Punkt, der die Gerade $\lambda_1 \lambda_2$ in der Richtung von λ_2 nach λ_1 durchläuft, durch die Seite σ in das Dreieck Δ eintreten, durch die Seite σ' austreten. Die beiden Seiten σ und σ' sind Elementarsehnen, welche die Gerade $\lambda_1 \lambda_2$ treffen. Wir wollen dieselben als „Nachbarsehnen“ (bezüglich der Form (a, b, c)) bezeichnen und des Näheren σ' die „rechte“ Nachbarsehne von σ und σ die „linke“ Nachbarsehne von σ' nennen. Da jede Elementarsehne Seite von zwei Elementardreiecken ist, die zu verschiedenen Seiten der Elementarsehne liegen, so folgt sofort:

Satz 19. Jede die Gerade $\lambda_1 \lambda_2$ treffende Elementarsehne besitzt eine einzige rechte und eine einzige linke Nachbarsehne.

Indem wir jetzt mit σ_0 irgend eine Elementarsehne bezeichnen, welche die Gerade $\lambda_1 \lambda_2$ trifft, können wir, von σ_0 ausgehend, eine nach rechts und links unbegrenzte Reihe von Elementarsehnen

$$(26) \quad \dots, \sigma_{-2}, \sigma_{-1}, \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \dots$$

bilden, von denen jede die Gerade $\lambda_1 \lambda_2$ trifft und die rechte Nachbarsehne der vorhergehenden und die linke Nachbarsehne der folgenden ist. *) Da die Stücke der Geraden $\lambda_1 \lambda_2$,

Fig. 4.

die von aufeinander folgenden Sehnen der Reihe (26) abgeschnitten werden, sich aneinander legend die ganze Gerade $\lambda_1 \lambda_2$ ausfüllen, so ist klar, dass jede $\lambda_1 \lambda_2$ treffende Elementarsehne in der Reihe (26) ihren Platz findet. Jeder einzelnen Elementarsehne σ_i entspricht nun eine bestimmte Transformation S_i , welche die Form (a, b, c) in eine reducirte Form φ_i überführt. Der Reihe (26) entsprechend erhalten wir also eine Reihe von Transformationen

$$(27) \quad \dots, S_{-2}, S_{-1}, S_0, S_1, S_2, \dots$$

die, auf die Form f angewandt, die Reihe der f äquivalenten reducirten Formen

$$(28) \quad \dots \varphi_{-2}, \varphi_{-1}, \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$$

ergeben.

Definition 7. Die Formenreihe (28) soll die zur Form f gehörige „Kette reducirter Formen“ heißen.

Man beachte, dass durch die Form f die zugehörige Kette nur in Bezug auf die *Aufeinanderfolge* ihrer Glieder bestimmt ist. Diejenige Elementarsehne nämlich, die wir mit σ_0 bezeichneten, haben wir willkürlich aus der Gesamtheit derjenigen, welche die Gerade $\lambda_1 \lambda_2$ treffen, ausgewählt. Hätten wir nun diejenige Elementarsehne mit σ_0 bezeichnet, die in der Reihe (26) den Index n trägt, so ist klar, dass wir an Stelle der Kette (28) die folgende

$$(28') \quad \dots \varphi_{n-2}, \varphi_{n-1}, \varphi_n, \varphi_{n+1}, \varphi_{n+2}, \dots$$

erhalten hätten, die aus der Kette (28) durch eine Verschiebung aller Glieder hervorgeht.

Wir werden nun die Kette (28') als nicht verschieden von der Kette (28) ansehen, also zwei Ketten als identisch betrachten, wenn die eine aus der anderen durch eine bloße Verschiebung der Glieder hervorgeht. Dann leuchtet ein, dass durch eine Form f die zugehörige Kette reducirter Formen vollständig bestimmt ist.

Wir beweisen nun den folgenden Satz, welcher die Theorie der Reduction quadratischer Formen von positiver Determinante zum Abschluss bringt:

*) Vgl. Fig. 4.

Satz 20. *Zwei Formen von positiver Determinante sind stets und nur dann äquivalent, wenn zu der einen Form dieselbe Kette reducirter Formen gehört, wie zu der anderen Form.*

Es sei f irgend eine Form positiver Determinante, die durch die Transformation S in die Form f' übergehe, so dass

$$(29) \quad fS = f'$$

ist. Die zu der Form f' gehörigen Reihen von Elementarsehnen, Transformationen und reducirten Formen mögen bezüglich mit

$$(30) \quad \dots \sigma'_{-2}, \sigma'_{-1}, \sigma'_0, \sigma'_1, \sigma'_2, \dots$$

$$(31) \quad \dots S'_{-2}, S'_{-1}, S'_0, S'_1, S'_2, \dots$$

$$(32) \quad \dots \varphi'_{-2}, \varphi'_{-1}, \varphi'_0, \varphi'_1, \varphi'_2, \dots$$

bezeichnet werden. Da nun durch die Transformation S die Gerade $\lambda_1 \lambda_2$, welche die Form f repräsentirt, in die Gerade $\lambda'_1 \lambda'_2$ übergeht, die die Form f' repräsentirt, so wird die Reihe der Elementarsehnen (26) durch die Transformation S in die Reihe der Elementarsehnen (30) übergehen. Nehmen wir an, dass σ_0 in σ'_n übergeht, so wird σ_1^* in σ_{n+1}^* , σ_2^* in σ_{n+2}^* u. s. w., allgemein

$$\sigma_i \text{ in } \sigma'_{n+i} \quad (i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

übergehen. Die Transformation $S^{-1}S_i$ führt die Sehne σ'_{n+i} in die Elementarsehne 0∞ über, und man schliesst daraus sofort, dass

$$(33) \quad S'_{n+i} = S^{-1}S_i, \text{ und } S = S_i(S'_{n+i})^{-1} \quad (i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

ist. Nun geht die Form φ'_{n+i} durch die Transformation S'_{n+i} aus der Form f' hervor. Es ist also

$$\varphi'_{n+i} = f' S'_{n+i} = f S \cdot S^{-1} S_i = f S_i = \varphi_i \quad (i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Damit sind wir zu folgendem Resultate gelangt:

Satz 21. *Geht die Form f durch die Transformation S in f' über und sind (28) und (32) die zu den Formen f und f' gehörigen Ketten reducirter Formen, sowie (27) und (31) die bez. entsprechenden Reihen von Transformationen, so ist, für jeden Index i ,*

$$(34) \quad \varphi'_{n+i} = \varphi_i, \quad S = S_i(S'_{n+i})^{-1},$$

unter n eine feste ganze Zahl verstanden.

Die Zahl n ist, nach Fixirung der Ketten (28), (32), durch die Transformation S eindeutig bestimmt. Denn aus

$$S = S_i(S'_{n+i})^{-1} = S_i(S'_{m+i})^{-1} \text{ folgt } S'_{n+i} = S'_{m+i}$$

und daher $n = m$, weil die Transformationen (31) sämmtlich von einander verschieden sind, da jede eine andere Elementarsehne in die Sehne 0∞ überführt.

Betrachten wir jetzt irgend zwei Formen f und f' von positiver Determinante, und nehmen wir an, dass die zu ihnen gehörenden Ketten (28) bez. (32) irgend ein Glied gemeinsam haben, dass etwa

$$\varphi_0 = \varphi'_n$$

sei, so folgt, aus

$$fS_0 = \varphi_0, \quad f'S'_n = \varphi'_n,$$

dass f durch die Transformation

$$S = S_0(S'_n)^{-1}$$

in f' übergeht. Der Satz 21 lässt sich hiernach so umkehren:

Satz 22. *Wenn die zu zwei Formen f und f' gehörenden Ketten (28) bez. (32) irgend ein Glied gemeinsam haben, wenn etwa $\varphi_0 = \varphi_n$ ist, so geht die Form f durch die Transformation $S_0(S'_n)^{-1} = S$ in die Form f' über. Zugleich ist dann (nach Satz 21) für jeden Index i*

$$\varphi_i = \varphi'_{n+i} \quad \text{und} \quad S = S_i(S'_{n+i})^{-1}.$$

Aus den Sätzen 21 und 22 geht der Satz 20 unmittelbar als Corollar hervor.

§ 8.

Transformation einer Form positiver Determinante in sich.

Wenden wir die Sätze 21 und 22 auf den Fall an, wo die Form f' mit der Form f identisch ist, so erhalten wir folgende Methode zur Bestimmung aller Transformationen S , welche die beliebige Form f positiver Determinante in sich überführen.

Man nehme aus der zu f gehörigen Kette reducirter Formen (28) irgend eine Form, etwa φ_0 und suche alle Formen der Kette, die mit φ_0 identisch sind. Ist φ_n eine solche Form, also $\varphi_n = \varphi_0$, so ist $S = S_0 S_n^{-1}$ eine f in sich selbst überführende Transformation. Zugleich ist dann für jeden Index i die Form φ_{n+i} mit φ_i identisch. Bezeichnet also $|n|$ den numerischen Werth von n , so besteht die Kette (28) aus der periodischen Wiederholung der $|n|$ Formen

$$\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{|n|-1}.$$

Durch bekannte einfache Schlüsse folgert man hieraus:

Satz 23. *Die Form f besitzt stets und nur dann Transformationen in sich, die von der identischen Transformation verschieden sind, wenn in der zu f gehörenden Kette (28) reducirter Formen ein und dieselbe Form mehrfach auftritt. Ist dann in der Reihe $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$ die Form φ_m die erste, welche mit φ_0 identisch ist, so besteht die Kette (28) aus der periodischen Wiederholung der m Formen*

$$\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{m-1}.$$

Die Transformation $S = S_0 S_m^{-1}$ führt f in sich über und jede andere Transformation, die ebenfalls f in sich überführt, ist eine Potenz der Transformation S .

Dieser Satz findet unmittelbare Anwendung auf den Fall, wo die Coefficienten a, b, c der Form f ganze Zahlen sind. Denn für eine

reducirte Form (A, B, C) der Determinante $B^2 - AC = b^2 - ac = D$ ist der Coefficient A positiv, der Coefficient C negativ. Es giebt also, da

$$B^2 + A \cdot (-C) = D$$

sein muss, nur eine endliche Anzahl solcher reducirter Formen, und in der zu f gehörenden Kette (28) muss also nothwendig ein- und dieselbe Form mehrfach auftreten. Jede ganzzahlige Form positiver Determinante besitzt also von der Identität verschiedene Transformationen in sich, die auf Grund des Satzes (23) bestimmt werden können. Umgekehrt zeigt man leicht, dass jede Form, die eine Transformation in sich besitzt, eine ganzzahlige Form ist, oder doch in eine solche durch Division mit einem ihren Coefficienten eventuell gemeinsamen Factor übergeht. *)

§ 9.

Algorithmus zur Reduction einer Form von positiver Determinante.

Es sei

$$(35) \quad f = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

irgend eine Form positiver Determinante, λ_1 und λ_2 ihre beiden Wurzeln. Wir entnehmen aus jeder Farey'schen Reihe (mit der „nullten“ beginnend) die beiden aufeinander folgenden Glieder, zwischen welchen λ_1 liegt. Auf diese Weise erhalten wir die Paare von Näherungsbrüchen der Wurzel λ_1 , die wir mit

$$(36) \quad \pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-1}, \pi_n^{(1)}, \pi_{n+1}^{(1)}, \dots$$

bezeichnen. **) Indem wir annehmen, dass das Paar $\pi_n^{(1)}$ aus der ersten Farey'schen Reihe stammt, welche ein zwischen die beiden Wurzeln λ_1 und λ_2 fallendes Glied enthält, werden die aus den vorhergehenden Reihen stammenden Paare zugleich Näherungspaare der Wurzel λ_2 sein. Die Reihe der Näherungspaare der Wurzel λ_2 bezeichnen wir mit

$$(37) \quad \pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-1}, \pi_n^{(2)}, \pi_{n+1}^{(2)}, \dots$$

Jedes in den Reihen (36) und (37) auftretende Paar besteht aus zwei Brüchen

$$(38) \quad p = \frac{\xi_2}{\eta_2}, \quad r = \frac{\xi_1}{\eta_1},$$

*) Vgl. Dirichlet, Vorlesungen über Zahlentheorie, Abschnitt IV, wo sich die hierhergehörige Litteratur (pag. 200) findet. Vgl. auch die weiter unten erwähnten Stellen in Klein-Fricke's Vorlesungen über elliptische Modulfunctionen.

**) Man sehe die oben citirte Abhandlung des Verfassers über die angenäherte Darstellung der Zahlen durch rationale Brüche.

die zwei aufeinander folgende Glieder einer Farey'schen Reihe bilden. Indem wir

$$(39) \quad \xi_3 = \xi_1 + \xi_2, \quad \eta_3 = \eta_1 + \eta_2, \quad q = \frac{\xi_3}{\eta_3}$$

setzen und die Bezeichnungen von § 5 beibehalten, ordnen wir den Brüchen

$$r = \frac{\xi_1}{\eta_1}, \quad p = \frac{\xi_2}{\eta_2}$$

die Zahlen

$$(40) \quad f_1, f_{12}, f_2, f_{13}, f_{23}, f_3$$

zu, von denen die drei letzten aus den drei ersten sich vermöge der Gleichungen

$$(41) \quad f_{13} = f_1 + f_{12}, \quad f_{23} = f_2 + f_{12}, \quad f_3 = f_{13} + f_{23}$$

ableiten lassen.

Wir wollen nun zunächst zeigen, wie man aus irgend einem Paare (38) der Reihen (36) und (37) das nächstfolgende Paar der betreffenden Reihe finden kann, welches entweder das Paar pq oder das Paar qr sein wird.

Die Punkte p, q, r des Kreises K gehen durch die Transformation $\begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \eta_1 & \eta_2 \end{pmatrix}$ in die Punkte $0, 1, \infty$ bez. über. Durch dieselbe Transformation geht die Form f in die Form

$$f_1 x^2 + 2f_{12} xy + f_2 y^2,$$

also die Punkte λ_1 und λ_2 in die Punkte λ_1' bez. λ_2' über, wo λ_1', λ_2' die Wurzeln der Gleichung

$$(42) \quad f_1 \lambda'^2 + 2f_{12} \lambda' + f_2 = 0$$

bezeichnen. Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass das Paar (p, r) sich unter den Paaren $\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_{n-1}$ findet, ist nun die, dass die Punkte λ_1 und λ_2 beide zwischen p und r , d. h. auf dem Bogen pqr des Kreises K liegen, also λ_1' und λ_2' auf dem Bogen 01∞ . Diese Bedingung ist damit gleichbedeutend, dass λ_1' und λ_2' positiv sind, oder, was offenbar auf dasselbe hinauskommt, dass f_1 und f_2 unter einander gleiches, aber entgegengesetztes Vorzeichen wie f_{12} besitzen.

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass das Paar (p, r) sich unter den übrigen Paaren der Reihen (36) und (37) findet ist die, dass p und r die Punkte λ_1 und λ_2 trennen, dass also die Elementarsehne pr die Gerade $\lambda_1 \lambda_2$ trifft. Diese Bedingung ist damit gleichbedeutend, dass λ_1' und λ_2' entgegengesetztes Vorzeichen oder, was auf dasselbe hinauskommt, dass f_1 und f_2 entgegengesetztes Vorzeichen besitzen. Hieraus schliessen wir:

1) Ist (p, r) eines der ersten n Paare, die den Reihen (36) und (37) gemeinsam sind, so dass f_1 und f_2 dasselbe, aber entgegengesetztes Vorzeichen wie f_{12} haben, so unterscheiden wir zwei Fälle:

- a) f_3 hat dasselbe Vorzeichen wie f_1 und f_2 . Dann folgt auf das Paar (p, r) in beiden Reihen das Paar (p, q) , wenn f_{23} das Vorzeichen von f_{12} hat, dagegen das Paar (q, r) , wenn f_{13} das Vorzeichen von f_{12} hat.
- b) f_3 hat entgegengesetztes Vorzeichen wie f_1 und f_2 . Dann ist (p, r) das letzte gemeinsame Paar π_{n-1} und es folgt auf dieses Paar das Paar (q, r) in derjenigen Reihe, welche der grösseren der Wurzeln λ_1, λ_2 entspricht, dagegen das Paar (p, q) in der der kleineren Wurzel entsprechenden Reihe.

Aus der Gleichung $\lambda_1 - \lambda_2 = \frac{2\sqrt{D}}{a}$ folgt beiläufig, dass λ_1 oder λ_2 die grössere Wurzel ist, je nachdem a positiv oder negativ ist.

2) Ist (p, r) irgend ein anderes Paar aus den Reihen (36) und (37), so sind f_1 und f_2 von entgegengesetztem Zeichen. Es folgt dann auf das Paar (p, r) in der betreffenden Reihe das Paar (p, q) , wenn f_3 und f_2 , dagegen das Paar (q, r) , wenn f_1 und f_3 entgegengesetztes Zeichen haben.

Hiernach kann man, ausgehend von dem ersten Paare, successive alle Paare der Reihen (36) und (37), sowie die jedem Paare zugeordneten Zahlen (40) leicht bestimmen. Damit ist dann aber auch die Reduction der Form f vollständig durchgeführt. Denn ist (p, r) irgend eines der Paare

$$\pi_n^{(1)}, \pi_{n+1}^{(1)}, \dots, \pi_n^{(2)}, \pi_{n+1}^{(2)}, \dots$$

so trifft die entsprechende Elementarsehne pr die Gerade λ_1, λ_2 und dieser Elementarsehne entspricht die f äquivalente reducirte Form $(f_1, f_{12}, f_2)_q$. (Vgl. Satz 18.) Die Elementarsehnen, welche den Paaren

$$\dots, \pi_{n+1}^{(2)}, \pi_n^{(2)}, \pi_n^{(1)}, \pi_{n+1}^{(1)}, \dots$$

entsprechen, stimmen aber offenbar mit der Reihe der Elementarsehnen (26) überein, so dass man unmittelbar die ganze Kette reducirter Formen erhält, die zu f gehört. Dabei ist nur zu beachten, dass für den Fall $n = 0$, in welchem die beiden Reihen (36) und (37) keine gemeinsamen Anfangsglieder haben, den beiden Paaren $\pi_0^{(1)}$ und $\pi_0^{(2)}$, von denen das eine aus den Brüchen $\frac{-1}{0}, \frac{0}{1}$, das andere aus den Brüchen $\frac{0}{1}, \frac{1}{0}$ besteht, dieselbe Elementarsehne 0∞ entspricht.

Ein paar Beispiele mögen den Algorithmus zur Bestimmung der Reihen (36) und (37), nebst den jedem Paare der Reihen zugeordneten Zahlen (40) erläutern.

1. Beispiel.

$$f = 62x^2 - 2 \cdot 95xy + 145y^2 \equiv (62, -95, 145).$$

Man erhält die folgende Tabelle:

Erste Wurzel.

	$\frac{\xi_1}{\eta_1}$	$\frac{\xi_2}{\eta_2}$	f_1	f_{12}	f_2	f_{13}	f_{23}	f_3
π_0	$\frac{1}{0}$	$\frac{0}{1}$	62	-95	145	-33	50	17
π_1	$\frac{1}{0}$	$\frac{1}{1}$	62	-33	17	29	-16	13
π_2	$\frac{2}{1}$	$\frac{1}{1}$	13	-16	17	-3	1	-2
$\pi_3^{(1)}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{2}$	13	-3	-2	10	-5	5
$\pi_4^{(1)}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{3}{2}$	5	-5	-2	0	-7	-7
$\pi_5^{(1)}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{8}{5}$	5	0	-7	5	-7	-2
$\pi_6^{(1)}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{13}{8}$	5	5	-2	10	3	13
$\pi_7^{(1)}$	$\frac{13}{11}$	$\frac{13}{8}$	13	3	-2	16	1	17
$\pi_8^{(1)}$	$\frac{31}{19}$	$\frac{13}{8}$	17	1	-2	18	-1	17
$\pi_9^{(1)}$	$\frac{44}{27}$	$\frac{13}{8}$	17	-1	-2	16	-3	13
$\pi_{10}^{(1)}$	$\frac{57}{35}$	$\frac{13}{8}$	13	-3	-2			

Zweite Wurzel.

	$\frac{\xi_1}{\eta_1}$	$\frac{\xi_2}{\eta_2}$	f_1	f_{12}	f_2	f_{13}	f_{23}	f_3
$\pi_3^{(2)}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{1}$	-2	1	17	-1	18	17
$\pi_4^{(2)}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	-2	-1	17	-3	16	13
$\pi_5^{(2)}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{5}$	-2	-3	13	-5	10	5
$\pi_6^{(2)}$	$\frac{8}{2}$	$\frac{10}{7}$	-2	-5	5	-7	0	-7
$\pi_7^{(2)}$	$\frac{13}{9}$	$\frac{10}{7}$	-7	0	5	-7	5	-2
$\pi_8^{(2)}$	$\frac{23}{16}$	$\frac{10}{7}$	-2	5	5	3	10	13
$\pi_9^{(2)}$	$\frac{23}{16}$	$\frac{33}{23}$	-2	3	13	1	16	17
$\pi_{10}^{(2)}$	$\frac{23}{16}$	$\frac{56}{39}$	-2	1	17			

Die zu der Form f gehörige Kette reducirter Formen entsteht aus der periodischen Wiederholung der Formen: $(13, -3, -2)$, $(5, -5, -2)$, $(5, 0, -7)$, $(5, 5, -2)$, $(13, 3, -2)$, $(17, 1, -2)$, $(17, -1, -2)$.

$$f = 7x^2 - 8xy - 3y^2 \equiv (7, -4, -3).$$

Erste Wurzel.

Zweite Wurzel.

	$\frac{\xi_1}{\eta_1}$	$\frac{\xi_2}{\eta_2}$	f_1	f_{12}	f_2	f_{13}	f_{23}	f_3
$\pi_0^{(1)}$	$\frac{1}{0}$	$\frac{0}{1}$	7	-4	-3	3	-7	-4
$\pi_1^{(1)}$	$\frac{1}{0}$	$\frac{1}{1}$	7	3	-4	10	-1	9
$\pi_2^{(1)}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{1}{1}$	9	-1	-4	8	-5	3
$\pi_3^{(1)}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{1}$	3	-5	-4	-2	-9	-11
$\pi_4^{(1)}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	3	-2	-11	1	-13	-12
$\pi_5^{(1)}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{5}$	3	1	-12	4	-11	-7
$\pi_6^{(1)}$	$\frac{8}{2}$	$\frac{10}{7}$	3	4	-7	7	-3	4
$\pi_7^{(1)}$	$\frac{13}{9}$	$\frac{10}{7}$	4	-3	-7	1	-10	-9
$\pi_8^{(1)}$	$\frac{13}{9}$	$\frac{23}{16}$	4	1	-9	5	-8	-3
$\pi_9^{(1)}$	$\frac{13}{9}$	$\frac{36}{25}$	4	5	-3	9	2	11
$\pi_{10}^{(1)}$	$\frac{49}{34}$	$\frac{36}{25}$	11	2	-3	13	-1	12
$\pi_{11}^{(1)}$	$\frac{85}{59}$	$\frac{36}{25}$	12	-1	-3	11	-4	7
$\pi_{12}^{(1)}$	$\frac{121}{84}$	$\frac{36}{25}$	7	-4	-3			
$\pi_{13}^{(2)}$	$\frac{121}{84}$	$\frac{25}{84}$	-3	4	7			

Die zu der Form f gehörige Kette reducirter Formen entsteht aus der periodischen Wiederholung der Formen:
 $(7, -4, -3), (7, 3, -4), (9, -1, -4), (3, -5, -4), (3, -2, -11), (3, 1, -12), (3, 4, -7), (4, -3, -7), (4, 1, -9), (4, 5, -3), (11, 2, -3), (12, -1, -3).$

§ 10.

Die Charakteristiken quadratischer Irrationalitäten.

Auf Grund der Betrachtungen des vorigen Paragraphen ist es leicht die Charakteristiken der Wurzeln λ_1 und λ_2 einer quadratischen Form (35) zu bestimmen*). Wir nehmen der Einfachheit halber an, dass der erste Coefficient a der Form f positiv sei. Dann sind die den Paaren $\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_{n-1}$ entsprechenden Zahlen f_{12} negativ. Die Zahlen f_1 , welche den Paaren $\pi_n^{(1)}, \pi_{n+1}^{(1)}, \dots$ entsprechen, sind positiv, diejenigen, welche den Paaren $\pi_n^{(2)}, \pi_{n+1}^{(2)}, \dots$ entsprechen, negativ. Von den beiden Wurzeln λ_1, λ_2 ist ferner die erste die grössere.

Es sei nun (p, r) irgend ein Paar, welches in einer der Reihen (36), (37) auftritt. Dann ist das folgende Paar (p, q) oder das Paar (q, r) , je nachdem q grösser oder kleiner ist als λ_1 bez. λ_2 . Im ersten Falle entspricht dem Bruche q das Vorzeichen $+$, im zweiten Falle das Vorzeichen $-$ in der Charakteristik von λ_1 bez. λ_2 . Aus den Gesetzen, nach welchen aus dem Paare (p, r) das folgende Paar gefunden wird, geht nun hervor:

1) Ist (p, r) eines der Paare $\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_{n-2}$, so tritt der erste oder der zweite Fall ein, je nachdem f_{13} positiv oder negativ ist.

2) Ist (p, r) das Paar π_{n-1} , so tritt der erste oder der zweite Fall ein, je nachdem es sich um die Reihe (37), welche der zweiten Wurzel λ_2 , oder um die Reihe (36) handelt, welche der ersten Wurzel λ_1 entspricht.

3) Ist (p, r) eines der Paare $\pi_n^{(1)}, \pi_{n+1}^{(1)}, \dots$, so tritt der erste oder der zweite Fall ein, je nachdem f_3 positiv oder negativ ist.

4) Ist (p, r) eines der Paare $\pi_n^{(2)}, \pi_{n+1}^{(2)}, \dots$, so tritt der erste oder der zweite Fall ein, je nachdem f_3 negativ oder positiv ist.

Bezeichnen daher $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-2}$ die Vorzeichen der Zahlen f_{13} , die den Paaren $\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_{n-2}$ bezüglich entsprechen, ferner $\varepsilon_x^{(1)}$ bez. $-\varepsilon_x^{(2)}$ das Vorzeichen der Zahl f_3 , die dem Paare $\pi_x^{(1)}$ bez. $\pi_x^{(2)}$ entspricht, so ist

$$(43) \quad \dots \varepsilon_0 \varepsilon_1 \dots \varepsilon_{n-2} \eta \varepsilon_n^{(1)} \varepsilon_{n+1}^{(1)} \varepsilon_{n+2}^{(1)} \dots \quad (\eta = -)$$

die Charakteristik von λ_1 , und

$$(44) \quad \dots \varepsilon_0 \varepsilon_1 \dots \varepsilon_{n-2} \varepsilon \varepsilon_n^{(2)} \varepsilon_{n+1}^{(2)} \varepsilon_{n+2}^{(2)} \dots \quad (\varepsilon = +)$$

die Charakteristik von λ_2 , wobei die beiden ersten Glieder in jeder Charakteristik durch Punkte angedeutet sind. Was diese beiden ersten

*) Für diesen Paragraphen sehe man wieder die Abhandlung des Verfassers „über die angenäherte Darstellung der Zahlen durch rationale Brüche“.

Glieder angeht, so sind dieselben für den Fall, dass gemeinsame Paare nicht auftreten, also $n = 0$ ist, $\varepsilon\eta$ für die Charakteristik von λ_1 und $\eta\varepsilon$ für die Charakteristik von λ_2 .

Treten gemeinsame Paare $\pi_0, \pi_1, \dots$ auf, so sind die beiden ersten Glieder in beiden Charakteristiken $\varepsilon\eta$ oder $\eta\varepsilon$, je nachdem π_0 aus den Brüchen $\frac{1}{0}, \frac{0}{1}$ oder aus den Brüchen $\frac{0}{1}, \frac{-1}{0}$ besteht. Dabei bedeutet ε das Vorzeichen $+$, η das Vorzeichen $-$.

Beispielsweise sind die Charakteristiken der ersten und zweiten Wurzel der Form (62, -95 , 145) bezüglich

$$\begin{aligned}\varepsilon\eta\eta\varepsilon\eta\varepsilon\eta\eta\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\eta\eta\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\dots &= \varepsilon\eta^2\varepsilon\eta\varepsilon\eta^2\varepsilon^5\eta^2\varepsilon^5\dots, \\ \varepsilon\eta\eta\varepsilon\varepsilon\eta\eta\eta\varepsilon\varepsilon\varepsilon\eta\eta\eta\eta\varepsilon\varepsilon\eta\eta\dots &= \varepsilon\eta^2\varepsilon^2\eta^3\varepsilon^2\eta^5\varepsilon^2\eta^5\dots,\end{aligned}$$

Für die Wurzeln der Form (7, -4 , -3) lauten die Charakteristiken bezüglich

$$\begin{aligned}\varepsilon\eta\eta\varepsilon\varepsilon\eta\eta\eta\varepsilon\eta\eta\varepsilon\varepsilon\varepsilon\dots &= \varepsilon\eta^2\varepsilon^2\eta^3\varepsilon\eta^2\varepsilon^3\eta\varepsilon^2\eta^3\dots, \\ \eta\varepsilon\eta\eta\eta\varepsilon\varepsilon\varepsilon\eta\varepsilon\varepsilon\varepsilon\eta\eta\varepsilon\dots &= \eta\varepsilon\eta^3\varepsilon^2\eta^3\varepsilon^2\eta^2\varepsilon\eta^3\varepsilon^2\dots.\end{aligned}$$

Handelt es sich, wie in diesen Beispielen, um eine Form mit ganzzahligen Coefficienten, so bilden die den Paaren $\pi_n^{(1)}, \pi_{n+1}^{(1)}, \dots$ und ebenso die den Paaren $\pi_n^{(2)}, \pi_{n+1}^{(2)}, \dots$ entsprechenden Zahlen f_3 eine periodische Reihe, und die Charakteristiken von λ_1 und λ_2 werden daher periodisch.

Um die hierbei stattfindenden Umstände näher zu bestimmen, betrachten wir zuerst den Fall, wo gemeinsame Paare $\pi_0, \pi_1, \dots$ nicht auftreten. Dieser Fall, der durch das zweite Beispiel erläutert wird, findet statt, wenn die Form f eine reducirte Form ist. Jedem Zahlenpaar (p, r) , welches in der Reihe (36) oder (37) auftritt, entspricht die reducirte Form $(f_1, f_{12}, f_2)_q$, und der dem Zahlenpaare entsprechende Werth von f_3 ist gleich $f_{13} + f_{23} = f_1 + 2f_{12} + f_2$.

Indem wir annehmen, dass die Formenperiode aus m Gliedern bestehe, bezeichnen wir die reducirten Formen, welche den Paaren $\pi_0^{(1)}, \pi_1^{(1)}, \dots, \pi_{m-1}^{(1)}$ entsprechen, bezüglich mit

$$(45) \quad (a_0, b_0, c_0), (a_1, b_1, c_1), \dots, (a_{m-1}, b_{m-1}, c_{m-1}).$$

Den Paaren $\pi_{m-1}^{(2)}, \pi_{m-2}^{(2)}, \dots, \pi_0^{(2)}$ entsprechen dann bez. die reducirten Formen

$$(46) \quad (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), \dots, (a_m, b_m, c_m) \equiv (a_0, b_0, c_0).$$

Ferner sind die Zahlen f_3 , welche den ersten Paaren entsprechen, bez.

$$(47) \quad a_0 + 2b_0 + c_0, a_1 + 2b_1 + c_1, \dots, a_{m-1} + 2b_{m-1} + c_{m-1},$$

die Zahlen f_3 , welche den zweiten Paaren entsprechen, bez.

$$(48) \quad a_1 - 2b_1 + c_1, a_2 - 2b_2 + c_2, \dots, a_m - 2b_m + c_m.$$

Nun zeigt man aber leicht, dass die Zahlen (47) der Reihe nach dieselben Vorzeichen haben, wie die Zahlen (48). In der That, die auf (a_i, b_i, c_i) folgende Form $(a_{i+1}, b_{i+1}, c_{i+1})$ ist durch die Gleichungen

$$a_{i+1} = a_i, \quad b_{i+1} = a_i + b_i, \quad c_{i+1} = a_i + 2b_i + c_i$$

oder durch die Gleichungen

$$a_{i+1} = a_i + 2b_i + c_i, \quad b_{i+1} = b_i + c_i, \quad c_{i+1} = c_i$$

bestimmt, je nachdem $a_i + 2b_i + c_i$ negativ oder positiv ist. Im ersten Falle ist aber $a_{i+1} - 2b_{i+1} + c_{i+1} = c_i$, also negativ, im zweiten Falle ist $a_{i+1} - 2b_{i+1} + c_{i+1} = a_i$, also positiv, w. z. b. w.

Die Charakteristiken von λ_1 und λ_2 haben daher die Gestalt

$$\varepsilon \eta \mid \varepsilon_0^{(1)} \varepsilon_1^{(1)} \dots \varepsilon_{m-1}^{(1)} \mid \varepsilon_0^{(1)} \varepsilon_1^{(1)} \dots \varepsilon_{m-1}^{(1)} \mid \dots,$$

bez.

$$\eta \varepsilon \mid \varepsilon_0^{(2)} \varepsilon_1^{(2)} \dots \varepsilon_{m-1}^{(2)} \mid \varepsilon_0^{(2)} \varepsilon_1^{(2)} \dots \varepsilon_{m-1}^{(2)} \mid \dots,$$

wobei

$$\varepsilon_0^{(2)} = -\varepsilon_{m-1}^{(1)}, \quad \varepsilon_1^{(2)} = -\varepsilon_{m-2}^{(1)}, \dots, \quad \varepsilon_{m-1}^{(2)} = -\varepsilon_0^{(1)}$$

ist. Indem wir der Einfachheit halber die Bezeichnung dahin abändern, dass wir $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$ an Stelle von $\varepsilon_0^{(1)}, \varepsilon_1^{(1)}, \dots, \varepsilon_{m-1}^{(1)}$ bez. schreiben, indem wir ferner berücksichtigen, dass die Charakteristik von $-\lambda_2$ aus der von λ_2 hervorgeht, wenn man in dieser alle Vorzeichen umkehrt, können wir den Satz aussprechen:

Satz 24. *Für eine Form (a, b, c) deren erster Coefficient a positiv, deren letzter Coefficient c negativ ist, haben die Charakteristiken der ersten (positiven) Wurzel und der negativ genommenen zweiten (negativen) Wurzel die Gestalt*

$$\varepsilon \eta \eta_1 \eta_2 \dots \eta_m \eta_1 \eta_2 \dots \eta_m \dots$$

bezüglich

$$\varepsilon \eta \eta_m \eta_{m-1} \dots \eta_1 \eta_m \eta_{m-1} \dots \eta_1 \dots$$

Wir betrachten nun zweitens den Fall, wo gemeinsame Paare in den Reihen (36) und (37) auftreten. Dieser Fall tritt ein, wenn λ_1 und λ_2 dasselbe Vorzeichen haben, also die äusseren Coefficienten a, c der Form beide positiv sind. Es sei wieder m die Anzahl der Glieder der Formenperiode. Dann haben die Charakteristiken von λ_1 und λ_2 die Gestalt

$$\dots \varepsilon_0 \varepsilon_1 \dots \varepsilon_{n-2} \eta \mid \varepsilon_n^{(1)} \varepsilon_{n+1}^{(1)} \dots \varepsilon_{n+m-1}^{(1)} \mid \varepsilon_n^{(1)} \varepsilon_{n+1}^{(1)} \dots \varepsilon_{n+m-1}^{(1)} \mid \dots,$$

bezüglich

$$\dots \varepsilon_0 \varepsilon_1 \dots \varepsilon_{n-2} \varepsilon \mid \varepsilon_n^{(2)} \varepsilon_{n+1}^{(2)} \dots \varepsilon_{n+m-1}^{(2)} \mid \varepsilon_n^{(2)} \varepsilon_{n+1}^{(2)} \dots \varepsilon_{n+m-1}^{(2)} \mid \dots,$$

wo die beiden ersten durch Punkte angedeuteten Glieder in beiden Charakteristiken $\varepsilon\eta$ oder $\eta\varepsilon$ sind, je nachdem λ_1 und λ_2 positiv oder negativ sind. Nun zeigt man wieder leicht durch die Betrachtung der reducirten Formen, die den Paaren $\pi_n^{(1)}, \dots, \pi_{n+m-1}^{(1)}$ und $\pi_n^{(2)}, \dots, \pi_{n+m-1}^{(2)}$ entsprechen, dass

$$\varepsilon_n^{(2)} = -\varepsilon_{n+m-2}^{(1)}, \varepsilon_{n+1}^{(2)} = -\varepsilon_{n+m-3}^{(1)}, \dots, \varepsilon_{n+m-2}^{(2)} = -\varepsilon_n^{(1)}, \varepsilon_{n+m-1}^{(2)} = -\varepsilon_{n+m-1}^{(1)}$$

ist. Indem wir von der Charakteristik von λ_2 wieder zu der von $-\lambda_2$ übergehen und zugleich für die in den Charakteristiken auftretenden Vorzeichen andere Bezeichnungen einführen, erhalten wir den

Satz 25. Für eine Form (a, b, c) , deren äussere Coefficienten a und c positiv sind, haben die Charakteristiken der ersten Wurzel und der negativ genommenen zweiten Wurzel die Gestalt

$$\varepsilon_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{n+1} \eta \eta_1 \eta_2 \dots \eta_{m-1} \eta_m \eta_1 \eta_2 \dots \eta_{m-1} \eta_m \dots$$

bezüglich

$$\varepsilon'_0 \varepsilon'_1 \varepsilon'_2 \dots \varepsilon'_{n+1} \eta \eta_{m-1} \eta_{m-2} \dots \eta_1 \eta_m \eta_{m-1} \eta_{m-2} \dots \eta_1 \eta_m \dots,$$

wo

$$\varepsilon'_x = -\varepsilon_x \quad (x=0, 1, 2, \dots, n+1)$$

ist.

Von der Charakteristik einer Grösse geht man leicht zu der Kettenbruchentwicklung derselben über. Und so enthalten insbesondere die Sätze 24 und 25 das bekannte Theorem, dass die natürlichen Kettenbruchentwicklungen der beiden Wurzeln einer ganzzahligen quadratischen Gleichung periodisch sind, und dass die Periode in der Entwicklung der einen Wurzel dieselben Zahlen jedoch in umgekehrter Reihenfolge enthält, wie die Periode in der Entwicklung der anderen Wurzel.

Es mögen hier noch einige Bemerkungen über die im Vorstehenden entwickelte Theorie, über ihre Beziehungen zu älteren Untersuchungen und über ihre Verallgemeinerungen folgen.

In letzter Instanz liegt unserer Theorie die Untersuchung der ganzzahligen Formen mit verschwindender Determinante zu Grunde. Indem wir nämlich die Formen durch die Punkte einer Ebene repräsentirten, wurden die ganzzahligen Formen mit verschwindender Determinante durch diejenigen Punkte eines Kegelschnittes (des Kreises K) dargestellt, welche rationalen Parametern entsprechen, und die Betrachtung dieser Punkte, mit welcher unsere Untersuchung sogleich anhebt, bildet den Angelpunkt der Theorie. Bei der erwähnten geometrischen Repräsentation stellen sich die unimodularen ganzzahligen linearen Transformationen der quadratischen Formen als eine

Gruppe von Collineationen dar, der gegenüber jenes System von Punkten des Kegelschnitts mit rationalen Parametern invariant ist. Betrachtet man die Gerade, welche irgend zwei Punkte dieses Systemes, deren Parameter in reducirter Form $\frac{x}{u}$ und $\frac{s}{v}$ seien, verbindet, so ist der absolute Werth der Determinante $rv - su$ rücksichtlich unsere Gruppe von Collineationen eine Invariante jener Geraden. Man gelangt so naturgemäss zu dem Begriff der Elementarsehnen: es sind das diejenigen Geraden, deren Invariante den kleinstmöglichen Werth 1 besitzt. Indem wir uns nun die Gesamtheit aller Elementarsehnen construiren, erhalten wir eine Figur, die uns die Gruppierung aller Punkte der Ebene gegenüber den Collineationen der Gruppe übersehen lässt und uns damit die Mittel an die Hand giebt, die Theorie der Reduction der quadratischen Formen zu begründen.

Dabei ist besonders hervorzuheben, dass sich die wesentlichen Eigenschaften dieser Figur aus dem Begriff der Elementarsehne auf die leichteste und ungezwungenste Weise ergeben.

Schon oben haben wir erwähnt, dass die in Rede stehende „Elementarsehnenfigur“ von Herrn Klein aus jener „Modulfigur“ (wie wir sie kurz nennen wollen) abgeleitet worden ist, welche der Theorie der Modulfunctionen zu Grunde liegt und die aus einem gewissen System von Kreisbogendreiecken besteht, welche die eine Hälfte der complexen Zahlenebene einfach und lückenlos bedecken. In abstracto kann man die beiden Figuren geradezu als identisch ansehen, insofern sie verschiedene geometrische Einkleidungen derselben analytischen Ideenbildung sind*). Der Gedanke nun, die Theorie der Reduction binärer quadratischer Formen auf die Modulfigur zu gründen, wurde von Herrn Klein schon 1879 in einer Vorlesung, welcher der Verfasser

*) Die geometrische Einkleidung ist hier, wie in allen ähnlichen Fällen, einerseits an sich ganz unwesentlich (so werthvoll sie für die Ideenbildung und für die Abkürzung der Ausdrucksweise auch sein mag), andererseits ist sie natürlich auf die verschiedensten Weisen möglich. Für welche Art der Einkleidung man sich entscheiden will, wird man immer von Zweckmässigkeitsgründen abhängen lassen. So wird man in der Theorie der Modulfunctionen der Modulfigur den Vorzug geben, während in der Theorie der Reduction der quadratischen Formen die Elementarsehnenfigur als die angemessenere erscheint. Vielleicht ist es übrigens zweckmässig, die letztere Figur auch denjenigen functionentheoretischen Untersuchungen zu Grunde zu legen, die sich auf die von Dirichlet, Kronecker,

Weber und anderen betrachteten Reihen der Gestalt $\sum_a \frac{1}{a^s}$ (und ähnliche) beziehen,

wo sich die Summe auf die ersten Coefficienten aller Formen einer Classe positiver Formen erstreckt.

Bemerkt sei übrigens noch, dass man, um volle Uebereinstimmung zwischen beiden Figuren zu erzielen, die Elementarsehnenfigur durch Aufnahme aller Geraden ergänzen muss, deren Invariante gleich 2 ist.

damals als Studirender beiwohnte, ausführlich erörtert. Andererseits war auch der Zusammenhang der Modulfigur mit der Theorie der Reduction quadratischer Formen negativer Determinante in Herrn Dedekind's Abhandlung über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen (Crelle's Journal Bd. 83, 1877) klar hervorgetreten und Stephen Smith hatte in einer Arbeit „Sur les équations modulaires“ (Atti della Accademia Reale di Lincei, Bd. I. 1877) die Figur für Formen positiver Determinante verwendet. In seiner Abhandlung „Grundlagen einer independenten Theorie der elliptischen Modulfunctionen und Theorie der Multiplicatorgleichungen erster Stufe“ (Diese Annalen Bd. 18, pag. 528) hat der Verfasser sodann die wesentlichen Eigenschaften der Modulfigur auf directem Wege bewiesen, wodurch auch für die Anwendung der Figur auf die Reduction der quadratischen Formen eine feste Grundlage gegeben war. Ist die dort gegebene Darstellung an sich auch ausreichend, so leidet sie doch an dem Mangel, dass sie keine Ableitung der Figur giebt, sondern die wesentlichen Elemente der Figur wie etwas Gegebenes annimmt. In dieser Hinsicht hat jene Darstellung durch Herrn Fricke eine Ergänzung erfahren, und zwar auf Grund einer Idee, die derselbe auch in vielen analogen Fällen mit glücklichem Erfolge angewandt hat*). Die Idee besteht darin, die Gruppe der ganzzahligen linearen Transformationen

$$x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} \quad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1)$$

durch Hinzufügung der Transformation $x' = -\bar{x}$ zu erweitern. Dabei bedeuten x und x' complexe Variable und $\bar{x}$ die zu x conjugirt complexe Grösse. In der erweiterten Gruppe giebt es nun gewisse Transformationen (Spiegelungen), welche ganze Linien (Gerade oder Kreise) Punkt für Punkt fest lassen und diese Linien geben unmittelbar die Begrenzungen der Gebiete ab, welche die Modulfigur bilden.

Was nun die Stellung der vorliegenden Arbeit zu den soeben besprochenen Untersuchungen angeht, so ist erstens zu bemerken, dass wir eine Ableitung der Modulfigur und ihrer Eigenschaften gegeben haben, die auf einem durchaus neuen Principe beruht. Sodann haben wir zweitens die Theorie der Reduction der quadratischen Formen auf Grund der Figur nach der zahlentheoretischen Seite hin vollständig durchgeführt. Hierzu war die Verwendung der Theorie der Farey'schen Reihen unumgänglich. Wollte man auf die zahlentheoretische Durchführung verzichten und sich mit einer Skizzirung im Allgemeinen

*) Vergl. Klein-Fricke, Elliptische Modulfunctionen, Bd. I, pag. 223 ff., Fricke „Ueber eine besondere Classe discontinuirlicher Gruppen reeller linearer Substitutionen“, diese Annalen Bd. 38, pag. 50 und 461. Man sehe auch die Abhandlungen von Bianchi: „Sui gruppi di sostituzioni lineari“, diese Annalen Bd. 40 und Bd. 42.

begnügen, so würde man mit weit geringeren Mitteln ausreichen, wie dies aus einer Note zu ersehen ist, die der Verfasser dem mathematischen Congress in Chicago vorgelegt hat.

Das Princip, welches wir in der vorliegenden Arbeit auf die binären quadratischen Formen mit reellen Coefficienten angewandt haben, nämlich: die „ausgearteten“ Formen zu untersuchen und von diesen den Rückschluss auf die allgemeinen Formen zu machen, lässt sich mit Erfolg auf Formen mit beliebig vielen Unbestimmten, sei es, dass man die Coefficienten der Formen reell oder complex annimmt, ausdehnen. Es möge genügen, dieses an einigen Beispielen näher darzulegen. Im Falle der binären Formen mit complexen Coefficienten (der Dirichlet'schen und Hermite'schen Formen) führt unser Princip zu folgender Betrachtung. Man denke sich die complexen Zahlen in bekannter Weise durch die Punkte einer Kugel dargestellt. Die einzelne complexe Zahl möge zur Abkürzung der „Parameter“ des entsprechenden Kugelpunktes heissen und letzterer ebenso bezeichnet werden wie sein Parameter. Die unimodularen Transformationen $\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$, wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ complexe ganze Zahlen sind, stellen dann eine Gruppe von Collineationen des Raumes dar, welche die Kugel fest lassen und insbesondere das System der Punkte mit (complex) rationalen Parametern in sich überführen. Es überträgt sich nun ohne Weiteres der Begriff der Elementarsehne: eine Elementarsehne ist die Verbindungsgerade zweier Punkte $\frac{r}{u}, \frac{s}{v}$ der Kugel, wo r, s, u, v complexe ganze Zahlen bezeichnen, die der Bedingung $rv - su = \varepsilon$ genügen, unter ε eine Einheit, also einen der Werthe $\pm 1, \pm i$ verstanden. Man fasse nun die Gesammtheit der im Inneren der Kugel ausgespannten unendlich vielen Elementarsehnen ins Auge. Betrachtet man eine Gerade, welche die Kugel schneidet, so wird man untersuchen können, wie sich diese Gerade durch die Gesammtheit der Elementarsehnen hindurchzieht. Diese Untersuchung ergibt die Theorie der Reduction der Dirichlet'schen Formen, welche wie leicht zu sehen durch die die Kugel treffenden Geraden dargestellt werden. Man erhält ferner die Theorie der Reduction der definiten und indefiniten Hermite'schen Formen, indem man untersucht, wie sich ein im Innern der Kugel liegender Punkt bez. eine die Kugel schneidende Ebene zu der Gesammtheit der Elementarsehnen verhält.

Die hier in ihren Grundzügen skizzirte Theorie der Dirichlet'schen und Hermite'schen Formen steht zu der von Herrn Bianchi gegebenen*)

*) „Geometrische Darstellung der Gruppen linearer Substitutionen mit ganzen complexen Coefficienten nebst Anwendungen auf die Zahlentheorie“. Diese Annalen Bd. 38, pag. 313.

in derselben Beziehung, wie die in der vorliegenden Arbeit entwickelte Theorie der binären quadratischen Formen mit reellen Coefficienten zu der älteren, oben besprochenen Theorie, die sich auf die Modulfigur stützt. Auch für die Dirichlet'schen und Hermite'schen Formen gewährt unsere Theorie den Vortheil, unmittelbar die zahlentheoretische Durchführung zu ermöglichen, wobei dann auch ihr Zusammenhang mit den Untersuchungen hervortreten wird, die der Verfasser über die Entwicklung complexer Grössen in Kettenbrüche angestellt hat. (Acta mathematica Bd. 11.) Alles dies hofft der Verfasser in einer Abhandlung, die sich an die vorliegende anschliessen soll, ausführlich darlegen zu können.

Es braucht kaum bemerkt zu werden, dass unser Princip auch auf andere neuerdings von den Herrn Fricke und Bianchi untersuchten Gruppen und zugehörigen Formen (vgl. das obige Citat) Anwendung findet.

Wir betrachten zweitens die quadratischen Formen mit reellen Coefficienten und n Unbestimmten $u, v, w, \dots$. Der Einfachheit halber sei $n = 3$. Deutet man dann die Coefficienten der einzelnen Form als homogene Coordinaten, so werden die Formen durch die Punkte eines linearen Raumes von 5 Dimensionen dargestellt. In diesem Raume betrachte man insbesondere das Gebilde, welches den Formen entspricht, die sich auf ein volles Quadrat $(xu + yv + zw)^2$ reduciren. Dieses Gebilde ist eine rationale zweistufige quadratische Mannigfaltigkeit, da die Coordinaten eines Punktes des Gebildes den Quadraten und Producten der drei Veränderlichen x, y, z proportional sind. Der einzelne Punkt ist durch die Verhältnisse $x : y : z$ festgelegt und das Gebilde vertritt die Rolle des Kegelschnittes K in der Theorie der binären Formen. Auf dem Gebilde hat man nun weiter diejenigen Punkte $x : y : z$ ins Auge zu fassen, für welche x, y, z ganze Zahlen (ohne einen allen gemeinsamen Theiler) sind. Drei derartige Punkte $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3$, bestimmen eine Ebene (einen linearen Raum von zwei Dimensionen), welche eine „Elementarebene“ heissen möge, wenn die Deter-

minante $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$ gleich ± 1 ist.

Auf das Studium der Gesammtheit der Elementarebenen, die das Analogon der Elementarsehnen bilden, lässt sich dann die Theorie der ternären quadratischen Formen gründen, wie der Verfasser an einem anderen Orte zu zeigen gedenkt.

Zürich, den 28. Januar 1894.