Beiträge zur Theorie der Minimalflächen.

I. Projectivische Untersuchungen über algebraische Minimalflächen.

Von

Sophus Lie in Christiania.

Nach den bahnbrechenden Arbeiten von Monge und Lagrange ist die Theorie der Minimalflächen bekanntlich von einer grossen Anzahl von Mathematikern behandelt worden. Indem ich mir erlaube, in der nachstehenden und einigen weiteren Abhandlungen einige neue Beiträge zu dieser interessanten Theorie zu liefern, beschränke ich mich darauf diejenigen früheren Untersuchungen zu nennen, die die nächste Veranlassung zu meinen eigenen Bestrebungen gewesen sind.*)

Die partielle Differentialgleichung 2. O., deren Integralflächen Minimalflächen sind, wurde von Lagrange aufgestellt, und darnach von Monge integrirt. Nach der Natur der Sache war Monge's allgemeines Integral mit Imaginären behaftet, und daher gelang es lange nur, ganz particuläre reelle Minimalflächen zu finden. Erst Bonnet gab eine allgemeine Methode zur Auffindung aller reellen Minimalflächen, und gleichzeitig eine Methode zur Bestimmung von beliebig vielen reellen algebraischen Minimalflächen.

Weierstrass gab später eine erschöpfende und elegante Methode zur Auffindung *aller* reellen *algebraischen* Minimalflächen. Zugleich stellte er die Aufgabe, alle Minimalflächen gegebener Classe zu bestimmen. — Hiermit war also die Aufmerksamkeit insbesondere auf die *algebraischen* Minimalflächen gerichtet worden.

Im Folgenden versuche ich eine allgemeine *projectivische Theorie der algebraischen Minimalflächen* zu entwickeln. Ich gebe bemerkens-

---

*) Eine ausführliche Angabe der hierher gehörigen Litteratur findet man in den folgenden Abhandlungen: Riemann, Abhandlungen der Gesellschaft d. W. zu Göttingen, Bd. 13; Beltrami, Memorie ... di Bologna, Serie 2, Tomo 7, 1868; Schwarz, Crelle-Borchhardts Journal, Bd. 80. Unter den neuesten Arbeiten über diesen Gegenstand erlaube ich mir die Aufmerksamkeit auf einige schöne Sätze von Herrn Henneberg zu lenken. (Vergl. seine Dissertation, Zürich 1875, und Annali di Matematica, Bd. 9.)

werthe Methoden zur Bestimmung von Classe und Ordnung einer beliebigen Minimalfläche. Ich beschäftige mich mit der Bestimmung aller reellen Minimalflächen von gegebener Classe, oder von gegebener Ordnung. Es gelingt mir z. B. die Gleichung einer jeden Minimalfläche, deren Classenzahl eine beliebige vorgelegte Primzahl ist, anzugeben. Ich vervollständige Geisers schöne Untersuchungen über die unendlich entfernten Punkte einer Minimalfläche u. s. w.

In meiner nächsten Abhandlung über Minimalflächen entwickele ich einen allgemeinen Zusammenhang zwischen der Krümmungstheorie aller algebraischen Raumcurven und der Theorie aller algebraischen Minimalflächen, die in eine vorgelegte algebraische Developpable eingeschrieben sind.

In meinen beiden ersten wie auch in meinen späteren Arbeiten über Minimalflächen werde ich gelegentlich die Theorie der *Berührungs-Transformationen* für die Theorie der Minimalflächen verwerthen.

Ich hege überhaupt die Hoffnung, dass meine Untersuchungen dazu dienen werden, die Theorie der Minimalflächen im höheren Grade, als früher geschehen war, einer synthetischen Behandlung zugänglich zu machen.*)

Nach Riemanns und Weierstrass Vorgange untersucht man jetzt häufig eine reelle Minimalfläche, indem man ihre reellen Punkte in der bekannten Weise auf die reellen Punkte einer $(x+iy)$ Ebene bezieht. So *schön, einfach und fruchtbar* diese Methode auch sein mag, so scheint es mir doch eine Unvollkommenheit derselben zu sein, dass sie *nur die reellen Punkte der reellen Minimalflächen* in Betracht zieht. Obgleich ich daher den bleibenden Werth der Riemann-Weierstrass'chen Methode unbedingt anerkenne, wage ich doch zu glauben, dass es nützlich sein wird, Methoden zu entwickeln, die nicht allein die reellen, sondern auch die imaginären Punkte der Minimalflächen berücksichtigen.

§ 1.

Ueber die Flächen, die in zweifacher Weise durch Translationsbewegung einer Curve erzeugt werden können.

Unter den Flächen, die sich folgendermassen darstellen lassen:

$$(1)\qquad \begin{aligned} x &= A(t) + A_1(\tau), \\ y &= B(t) + B_1(\tau), \\ z &= C(t) + C_1(\tau), \end{aligned}$$

*) In einer Abhandlung im Bd. 2 der Zeitschrift „Archiv for Mathematik og Naturvidenskab", Christiania, habe ich mich schon mit Untersuchungen über Ordnung und Classe der Minimalflächen beschäftigt. Im Texte wird ein Fehler jener Arbeit corrigirt. (Vergl. den letzten Paragraphen dieser Arbeit.)

finden sich, wie wir später nach Monge zeigen werden, insbesondere alle Minimalflächen, die keine imaginäre Developpablen sind. Ich habe gefunden, dass eine grosse Anzahl Eigenschaften der Minimalflächen überhaupt allen Flächen zukommen, die die Gleichungsform (1) besitzen. Daher finde ich es zweckmässig, zunächst die allgemeine Flächenkategorie zu betrachten, die durch die Gleichungen (1) definirt wird.

1. Ich nehme zwei Curven*) c_0 und $\varkappa_0$, die einen Punkt p_0 gemein haben, und verschiebe c_0 parallel mit sich selbst derart, dass p_0 die Curve $\varkappa_0$ durchläuft. Hierbei beschreibt ein beliebiger auf c_0 gelegener Punkt eine Curve $\varkappa$, die mit $\varkappa_0$ congruent und gleichgestellt ist. In Folge dessen kann die von der beweglichen Curve c erzeugte Fläche zugleich durch Translationsbewegung der Curve $\varkappa$ erzeugt werden. Also:

Satz 1. *Kann eine Fläche in einer Weise durch Translationsbewegung einer Curve erzeugt werden, so gestattet sie noch eine solche Erzeugung.*

Es ist leicht zu erkennen, dass die hiermit definirten Flächen sich auch dadurch charakterisiren lassen, dass sie die Gleichungsform (1) besitzen. Es seien in der That

$$x = A(t), \quad y = B(t), \quad z = C(t)$$

die Gleichungen der Curve c_0, und ebenso seien

$$x = A_1(\tau), \quad y = B_1(\tau), \quad z = C_1(\tau)$$

die Gleichungen der Curve $\varkappa_0$. Dabei werden wir der Einfachheit wegen annehmen, dass der Coordinatenanfangspunkt der gemeinsame Punkt p_0 unserer beiden Curven ist. Unter diesen Voraussetzungen stellen die Gleichungen

$$\begin{aligned} x &= A(t) + A_1(\tau), \\ y &= B(t) + B_1(\tau), \\ z &= C(t) + C_1(\tau), \end{aligned}$$

offenbar eine Fläche dar, die durch Translationsbewegung sowohl von c_0 wie von $\varkappa_0$ erzeugt werden kann. Giebt man dem Parameter τ successiv verschiedene constante Werthe, so erhält man auf der Fläche gelegene Curven c, die mit c_0 congruent und gleichgestellt sind. Giebt man andererseits dem Parameter t constante Werthe, so erhält man auf der Fläche gelegene Curven $\varkappa$, die mit $\varkappa_0$ congruent und gleichgestellt sind.

*) Wenn ich von Curven spreche, so verstehe ich darunter den Inbegriff von Werthsystemen xyz, die durch zwei Gleichungen $f = 0$, $\varphi = 0$ bestimmt werden. Dabei nehme ich wie gewöhnlich an, dass f und φ Reihenentwickelungen sind, die innerhalb eines gewissen Bereiches convergiren.

2. Die Flächenfamilie (1) gestattet eine andere einfache geometrische Erzeugung, die allerdings mit der soeben vorgetragenen in genauster Verbindung steht.

Ich betrachte die beiden Curven

$$x_1 = 2A(t), \quad y_1 = 2B(t), \quad z_1 = 2C(t) \tag{2}$$

und

$$x_2 = 2A_1(\tau), \quad y_2 = 2B_1(\tau), \quad z_2 = 2C_1(\tau) \tag{3}$$

und verbinde einen *beliebigen* Punkt $x_1 y_1 z_1$ der ersten Curve durch eine Gerade mit einem beliebigen Punkte $x_2 y_2 z_2$ der zweiten Curve. Ich suche den Mittelpunkt

$$x = \tfrac{1}{2}(x_1 + x_2), \quad y = \tfrac{1}{2}(y_1 + y_2), \quad z = \tfrac{1}{2}(z_1 + z_2)$$

dieser beiden Punkte. Der Ort dieser Mittelpunkte ist offenbar die Fläche

$$\begin{aligned} x &= A(t) + A_1(\tau), \\ y &= B(t) + B_1(\tau), \\ z &= C(t) + C_1(\tau). \end{aligned}$$

Nimmt man einen bestimmten Punkt $x_1 y_1 z_1$, und lässt dagegen den Punkt $x_2 y_2 z_2$ die Curve (3) durchlaufen, so beschreibt der Mittelpunkt eine Curve $\varkappa$.

Diese zweite geometrische Erzeugung wird in dieser ersten Abhandlung keine Rolle spielen, während sie den Ausgangspunkt meiner nächsten Arbeit über Minimalflächen bilden soll.

3. Construirt man in einem beliebigen Punkte einer Fläche, die die Gleichungsform (1) besitzt, die Tangente zu der hindurchgehenden Curve c und zugleich die Tangente zu der hindurchgehenden Curve $\varkappa$, so liegen diese beiden Geraden, wie jetzt gezeigt werden soll, *harmonisch* hinsichtlich der beiden Haupttangenten.

Man nehme in der That zwei benachbarte Curven c und zugleich zwei benachbarte Curven $\varkappa$. Diese vier Curven bestimmen nach unseren früheren Entwickelungen ein infinitesimales auf der Fläche gelegenes *Parallelogramm*, dessen Seiten infinitesimale Strecken der vier Curven sind. Hieraus folgt, dass je zwei zusammenstossende Seiten des Parallelogramms im Dupin'schen Sinne conjugirte Gerade sind. Also:

Satz 2. *In jedem Punkte unserer Fläche bestimmen die hindurchgehenden Curven c und $\varkappa$ zwei Richtungen, die zu den zugehörigen Haupttangenten harmonisch liegen.*

Einen analytischen Beweis dieses fundamentalen Satzes erhält man folgendermassen.

In jedem nicht singulären Punkte unserer Fläche bilden die Fortschreitungsrichtungen dx, dy, dz einen ebenen Büschel

$$(4)\qquad \begin{aligned} dx &= A'(t)\,dt + A_1'(\tau)\,d\tau,\\ dy &= B'(t)\,dt + B_1'(\tau)\,d\tau,\\ dz &= C'(t)\,dt + C_1'(\tau)\,d\tau, \end{aligned}$$

der in der Tangentenebene gelegen ist. Durch Elimination von dt und $d\tau$ kommt die Gleichung

$$\begin{vmatrix} dx & A'(t) & A_1'(\tau) \\ dy & B'(t) & B_1'(\tau) \\ dz & C'(t) & C_1'(\tau) \end{vmatrix} = 0,$$

die als Gleichung der Tangentenebene aufgefasst werden kann. Dementsprechend ist

$$\begin{vmatrix} dx & A' + A''dt & A_1' + A_1''d\tau \\ dy & B' + B''dt & B_1' + B_1''d\tau \\ dz & C' + C''dt & C_1' + C_1''d\tau \end{vmatrix} = 0,$$

die Gleichung der Tangentenebene in einem benachbarten Punkte. Ich verlange, dass die Verbindungsgerade unserer beiden benachbarten Punkte eine Haupttangente sein soll, das heisst, dass diese Verbindungsgerade die Schnittlinie der beiden benachbarten Tangentenebenen ist. Unsere Forderung kommt darauf hinaus, dass die beiden letzten Gleichungen durch dasselbe Werthsystem dx, dy, dz befriedigt werden, und findet daher ihren analytischen Ausdruck in der Gleichung

$$\begin{vmatrix} dx & A''dt & A_1' \\ dy & B''dt & B_1' \\ dz & C''dt & C_1' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} dx & A' & A_1''d\tau \\ dy & B' & B_1''d\tau \\ dz & C' & C_1''d\tau \end{vmatrix} = 0,$$

wenn man in derselben dx, dy, dz durch ihre Werthe (4) ersetzt. In dieser Weise ergiebt sich als Differentialgleichung der Haupttangentencurven die Gleichung

$$\begin{vmatrix} A' & A'' & A_1' \\ B' & B'' & B_1' \\ C' & C'' & C_1' \end{vmatrix} dt^2 + \begin{vmatrix} A_1' & A' & A_1'' \\ B_1' & B' & B_1'' \\ C_1' & C' & C_1'' \end{vmatrix} d\tau^2 = 0,$$

welche die Differentialen dt und $d\tau$ nur als Quadrate dt^2, $d\tau^2$, dagegen nicht in der Combination $dt\,d\tau$ enthält.

Diese Form der Differentialgleichung zeigt, dass in jedem Punkte der Fläche die beiden Haupttangenten harmonische Lage hinsichtlich der Richtungen der Curven $t =$ Const. und $\tau =$ Const. besitzen.

4. Jetzt construiren wir in jedem Punkte einer Curve c die Tangente zu der durch denselben Punkt hindurchgehenden Curve $\varkappa$. Nach der Definition unserer Fläche müssen alle diese Tangenten parallel sein, so dass ihr Inbegriff eine um die Fläche umgeschriebene Cylinderfläche bildet. Also:

Satz 3. *Die Developpable, die unsere Fläche längs einer Curve der einen Schaar berührt, ist eine Cylinderfläche.*

Dieser Satz giebt, wie ich beiläufig bemerke, ohne Schwierigkeit einen dritten Beweis des Satzes 2.

---

5. Ich lasse jetzt eine *erste* Beschränkung eintreten. Ich setze nämlich voraus, dass die Tangenten der Curven c_0 und $\varkappa_0$ sich paarweise als *parallel* zusammenordnen lassen, anders ausgesprochen, dass diese beiden Curven eine gemeinsame irreductible Differentialgleichung der Form

$$f(dx\,dy\,dz) = 0$$

befriedigen. Alsdann müssen *sämmtliche* Curven c und $\varkappa$ die Gleichung $f = 0$ erfüllen.

Ich werde zeigen, dass in diesem Falle sowohl die Curven c wie die Curven $\varkappa$ eine Umhüllungscurve, und zwar *eine gemeinsame Umhüllungscurve* besitzen.

Die durch die Punkte einer Curve c_0 hindurchgehenden Curven $\varkappa$ besitzen nämlich in diesen Punkten eine gemeinsame Tangentenrichtung. Und nach unserer Voraussetzung hat auch die Curve c_0 dieselbe Richtung in einem gewissen Punkte π. In diesem Punkte berührt daher c_0 die durch denselben Punkt hindurchgehende Curve $\varkappa$. Erinnert man nun, dass c_0 in die benachbarte Curve c_0' übergeht durch eine infinitesimale Translation, deren Richtung die besprochene gemeinsame Tangentenrichtung ist, so erkennt man einerseits, dass c_0 und c_0' sich im Punkte π schneiden, so dass alle c eine Umhüllungscurve Σ bestimmen, andererseits dass c_0 diese Umhüllungscurve im Punkte π berührt. Und da c_0 zugleich eine Curve $\varkappa$ in diesem Punkte berührt, so folgt, dass Σ auch von allen $\varkappa$ berührt wird. Also:

Satz 4. *Wenn die auf unserer Fläche gelegenen Curven c und $\varkappa$ eine Relation der Form*

$$f(dx\,dy\,dz) = 0$$

befriedigen, so haben sowohl die Curven c wie die Curven $\varkappa$ eine Umhüllungscurve, und zwar haben beide Curvenschaaren dieselbe Umhüllungscurve.

Hieraus folgt, dass unsere Fläche zwei weitere Erzeugungsweisen gestattet. Entweder kann man die Curve c in Translationsbewegung führen, derart, dass sie längs Σ gleitet; oder auch man kann die Curve $\varkappa$ in Translationsbewegung führen, derart, dass sie längs Σ gleitet.

Man wähle andererseits eine beliebige Curve c, und eine beliebige Curve Σ, deren Tangenten paarweise mit den Tangenten von c parallel sind. Gleitet nun c in Translationsbewegung längs Σ, so beschreiben die Punkte von c congruente und gleichgestellte Curven $\varkappa$, deren

Tangenten jedesmal mit einer Tangente der Curve c parallel sind. Dies giebt:

Satz 5. *Gleitet eine Curve c in Translationsbewegung längs einer Curve Σ, deren Tangenten paarweise mit den Tangenten von c parallel sind, so kann die erzeugte Fläche auch dadurch beschrieben werden, dass eine gewisse andere Curve $\varkappa$ in Translationsbewegung längs Σ gleitet.*

§ 2.

Geometrische Interpretation von Monge's allgemeinem Integral der Differentialgleichung der Minimalflächen.

Durch eine zweckmässige Specialisation gehen die in dem vorangehenden Paragraphen betrachteten Flächen in Minimalflächen über, und zwar erhält man in dieser Weise alle Minimalflächen, die in Monge's allgemeinem Integral der betreffenden Differentialgleichung enthalten sind. Dies soll jetzt gezeigt werden.

6. Ich setze voraus, dass die in dem vorangehenden Paragraphen betrachteten Curven c_0 und $\varkappa_0$ der Differentialgleichung

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0 \tag{1}$$

genügen; anders ausgesprochen, dass sie Curven von der Länge Null sind. Um die Sprache zu erleichtern, erlaube ich mir vorzuschlagen, Curven, deren Länge gleich Null ist, mit dem Namen *Minimalcurven* zu bezeichnen. Dieser Name scheint mir u. a. auch deswegen naturgemäss, weil diese Curven, wie später gezeigt werden soll, als Ebenengebilde aufgefasst, Minimalflächen sind.

Die Voraussetzung, dass c_0 und $\varkappa_0$ Minimalcurven sind, zieht nach sich, dass auch die allgemeinen Curven c und $\varkappa$ solche Curven sind. In Folge dessen liegen in jedem Punkte der erzeugten Fläche die beiden Haupttangenten harmonisch hinsichtlich der beiden Tangenten, deren Länge Null ist. Das heisst, dass die beiden Haupttangenten senkrecht auf einander stehen, und dass in Folge dessen die beiden Hauptkrümmungsradien gleich gross, und dabei entgegengesetzt gerichtet sind. Die Fläche ist daher eine Minimalfläche.

Indem man die Entwickelungen des vorangehenden Paragraphen berücksichtigt, erhält man somit die folgenden Sätze:

Satz 6. *Führt man eine Minimalcurve c in Translationsbewegung derart, dass ein Punkt der Curve eine andere Minimalcurve durchläuft, so beschreibt c immer eine Minimalfläche.*

Satz 7. *Nimmt man zwei beliebige Minimalcurven c und $\varkappa$, verbindet einen arbiträren Punkt der ersten Curve mit einem arbiträren Punkte der zweiten Curve, und bestimmt den Mittelpunkt dieser beiden Punkte, so ist der Ort dieser Mittelpunkte eine Minimalfläche.*

Satz 8. *Gleitet eine Minimalcurve c in Translationsbewegung längs einer festen Minimalcurve, so beschreibt c eine Minimalfläche.*

7. Es ist leicht nachzuweisen, dass die soeben angegebenen Constructionen *sämmtliche* Minimalflächen liefern, auf denen durch jeden Punkt allgemeiner Lage *zwei* verschiedene Minimalcurven hindurchgehen.

Wählt man nämlich auf einer beliebigen Minimalfläche eine Minimalcurve c allgemeiner Lage, und construirt für jeden Punkt dieser Curve die Tangente zu der zweiten durch diesen Punkt hindurchgehenden Minimalcurve, so bilden alle diese Tangenten eine *Developpable*, indem jede unter diesen Tangenten zu der entsprechenden Tangente der Curve c conjugirt ist.

Hieraus folgt, entweder dass die Developpable, die unsere Minimalfläche längs einer Minimalcurve allgemeiner Lage berührt, den Kugelkreis enthält, oder auch dass diese Developpable ein Kegel ist, dessen Spitze auf dem Kugelkreise gelegen ist. Und da es nur *eine* Developpable giebt, die gleichzeitig um die vorgelegte Minimalfläche und den Kugelkreis umgeschrieben ist, so erkennen wir, dass der erste Fall jedenfalls nur für solche Minimalflächen eintreten kann, die selbst imaginäre Developpable sind, welche um den Kugelkreis umgeschrieben sind. Also:

Satz 9. *Wählt man auf einer beliebigen Minimalfläche eine Minimalcurve allgemeiner Lage und zieht darnach durch alle Punkte dieser Curve die Tangente an die zweite durch den betreffenden Punkt hindurchgehende Minimalcurve, so treffen die construirten Tangenten sämmtlich den Kugelkreis in demselben Punkte.*

Führt man daher die gewählte Minimalcurve eine infinitesimale Strecke in Translationsbewegung gegen den im vorangehenden Satze besprochenen Punkt des Kugelkreises, so liegt die hiernach erhaltene benachbarte Minimalcurve fortwährend auf der Fläche, vorausgesetzt, dass man von infinitesimalen Grössen *zweiter* Ordnung absieht.

Und also kann die vorgelegte Minimalfläche in der Weise beschrieben werden, dass man die gewählte Minimalcurve in Translationsbewegung führt derart, dass ihre Punkte die Minimalcurven der zweiten Schaar durchlaufen.

Hiermit ist die Richtigkeit von der im Anfange dieser Nummer aufgestellten Behauptung nachgewiesen, sodass wir den folgenden Satz aussprechen können:

Satz 10. *Die Operationen der vorangehenden Nummer liefern alle Minimalflächen, auf denen durch jeden Punkt allgemeiner Lage zwei verschiedene Minimalcurven hindurchgehen.*

8. Jetzt brauchen wir nur die Ergebnisse der beiden letzten Nummern analytisch zu formuliren um Monge's allgemeine Bestimmung aller Minimalflächen wiederzufinden.

Seien in der That

$$x = A(t), \quad y = B(t), \quad z = C(t)$$

und

$$x = A_1(\tau), \quad y = B_1(\tau), \quad z = C_1(\tau)$$

die Gleichungen zweier beliebiger Minimalcurven, so dass die beiden Gleichungen

$$dA^2 + dB^2 + dC^2 = 0,$$
$$dA_1^2 + dB_1^2 + dC_1^2 = 0$$

bestehen. Alsdann bestimmen die Gleichungen

$$x = A(t) + A_1(\tau),$$
$$y = B(t) + B_1(\tau),$$
$$z = C(t) + C_1(\tau)$$

eine Fläche, die in zweifacher Weise durch Translationsbewegung einer Minimalcurve erzeugt werden kann. Unsere Fläche ist daher (Nr. 6.) eine Minimalfläche, und andererseits besitzen (Nr. 7.) alle Minimalflächen diese Gleichungsform, vorausgesetzt dass man von den imaginären Developpabeln absieht, die um den Kugelkreis umgeschrieben sind. Also:

Satz 11. *Sieht man von den imaginären um den Kugelkreis umgeschriebenen Developpabeln ab, so besitzt jede Minimalfläche die Gleichungsform*

$$x = A(t) + A_1(\tau),$$
$$y = B(t) + B_1(\tau),$$
$$z = C(t) + C_1(\tau)$$

wo

$$dA^2 + dB^2 + dC^2 = 0 = dA_1^2 + dB_1^2 + dC_1^2$$

ist. Und andererseits bestimmen diese Gleichungen immer eine Minimalfläche.

9. Hiernach reducirt sich die Bestimmung aller Minimalflächen auf die Auffindung aller Minimalcurven. Lagrange hat zuerst gelehrt, beliebig viele Minimalcurven zu bestimmen. Für eine synthetische Auffassung scheint mir die folgende von Darboux*) herrührende Bestimmung aller Minimalcurven die einfachste zu sein.

---

*) Um überhaupt beliebig viele Curven zu finden, die eine vorgelegte Relation

$$f(xyz\,dx\,dy\,dz) = 0$$

erfüllen, sucht man nach Monge und Pfaff eine vollständige Lösung derjenigen partiellen Differentialgleichung

$$F(xyzpq) = 0,$$

deren Charakteristiken $f = 0$ befriedigen. Durch Variation der Constanten findet man beliebig viele Integralflächen, die im Allgemeinen eine Rückkehrkante besitzen, welche der Gleichung $f = 0$ genügt.

Man unterwirft die allgemeine Ebene

$$tx + uy + vz - 1 = 0,$$

die Bedingungsgleichung

$$t^2 + u^2 + v^2 = 0,$$

welche ausdrückt, dass die betreffende Ebene den Kugelkreis berührt; fügt sodann eine beliebige Relation

$$f(tuv) = 0$$

hinzu. Die hiermit bestimmten Ebenen bilden eine Developpable, die um den Kugelkreis geschrieben ist. Die Rückkehrkante derselben ist eine Minimalcurve, und auf diese Weise können offenbar sämmtliche Minimalcurven erhalten werden.*) Ist insbesondere f eine algebraische Function, so ist die erhaltene Minimalcurve algebraisch, und umgekehrt ist klar, dass alle algebraische Minimalcurven in dieser Weise erhalten werden. Also:

Satz 12. *Die allgemeinste algebraische Minimalcurve wird dargestellt in Ebenencoordinaten durch die Gleichungen*

$$t^2 + u^2 + v^2 = 0,$$
$$f(tuv) = 0,$$

wo f eine arbiträre algebraische Function von t, u, v bezeichnet.

10. Unter den verschiedenen *expliciten* Formeln für alle Minimalcurven, insbesondere für alle algebraische Minimalcurven sind die nachstehenden von Weierstrass herrührenden besonders bemerkenswerth:

$$(1) \qquad \begin{aligned} x &= (1-s^2)\, F''(s) + 2s\, F'(s) - 2F(s), \\ y &= i(1+s^2) F''(s) - 2is\, F'(s) + 2iF(s), \\ z &= 2sF''(s) - 2F'(s) \end{aligned}$$

woraus durch Differentiation

$$(2) \qquad \begin{aligned} dx &= (1-s^2) F'''(s), \\ dy &= i(1+s^2) F'''(s), \\ dz &= 2sF'''(s). \end{aligned}$$

Dass diese beiden äquivalenten Gleichungssysteme eine Minimalcurve bestimmen, folgt daraus, dass sie die Gleichung

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0$$

identisch erfüllen. Dass sie *alle* Minimalcurven liefern, liegt darin, dass die Ausdrücke der Differentiale dx, dy, dz eine arbiträre Function der Hülfsvariable s enthalten. Also:

---

*) Besonders interessant für die Theorie der Minimalflächen ist der Fall, dass die Gleichung $f(tuv) = 0$ eine reelle Raumcurve in Ebenencoordinaten darstellt. Diesen Fall betrachte ich in meiner nächsten Abhandlung.

Satz 13. *Die Formeln* (1) *liefern alle Minimalcurven.*

Lässt man in den Weierstrass'schen Formeln $F(s)$ eine beliebige algebraische Function von s bezeichnen, so erhält man offenbar eine algebraische Minimalcurve. Dass man umgekehrt in dieser Weise sämmtliche algebraische Minimalcurven findet, kann man folgendermassen erkennen.

Lass mich voraussetzen, dass eine algebraische Minimalcurve durch die Formeln (1) dargestellt wird. Alsdann können x, y, z immer als *algebraische* Functionen einer gewissen Hülfsgrösse t ausgedrückt werden. Und da wegen (2)

$$s = -\frac{dx}{dz} - i\frac{dy}{dz}$$

ist, so folgt, dass auch s eine algebraische Function von t, und ebenso dass t eine algebraische Function von s ist. Folglich sind auch x, y, z algebraische Functionen von s. Und da die Gleichungen (1) geben

$$F(s) = -\tfrac{1}{4}\left\{(1-s^2)x + i(1+s^2)y + 2sz\right\},$$

ergiebt sich, dass $F(s)$ selbst eine *algebraische* Function von s ist. Hiermit ist der folgende Satz, der sich nicht *in dieser Form* bei Weierstrass findet, erwiesen:

Satz 14. *Man erhält die allgemeinste algebraische Minimalcurve, indem man in den Formeln* (1) $F(s)$ *als eine beliebige algebraische Function von s wählt.*

§ 3.

Reelle Minimalflächen. Algebraische Minimalflächen.

11. Es ist nun nach Bonnet's Vorgange sehr leicht, beliebig viele und sogar *alle* reellen Minimalflächen zu finden. Hierzu stelle ich zunächst den folgenden, sozusagen evidenten Satz auf:

Satz 15. *Die zu einer beliebigen vorgelegten Minimalcurve gehörige imaginär-conjugirte Curve ist selbst eine Minimalcurve.*

Denn die neue Curve wird erhalten, wenn man in den Gleichungen der vorgelegten Minimalcurve $+i$ mit $-i$ vertauscht.

Seien

$$x = A(t), \quad y = B(t), \quad z = C(t)$$

die Gleichungen einer beliebigen Minimalcurve, und seien

$$x = A_1(\tau), \quad y = B_1(\tau), \quad z = C_1(\tau),$$

wo $A_1(\tau)$, $B_1(\tau)$, $C_1(\tau)$ die conjugirten Functionen der neuen Hülfsgrössen τ bezeichnen, die Gleichungen der conjugirten Minimalcurve. Ich betrachte die Minimalfläche

$$x = A(t) + A_1(\tau),$$
$$y = B(t) + B_1(\tau),$$
$$z = C(t) + C_1(\tau).$$

Setze ich in diesen Gleichungen, indem ich mit t_1 und t_2 beliebige *reelle* Grössen bezeichne,

$$t = t_1 + i t_2,$$
$$\tau = t_1 - i t_2,$$

so ist der entsprechende Punkt unserer Minimalfläche offenbar *reell*. Und indem man t_1 und t_2 successiv alle möglichen reellen Werthe giebt, erhält man ∞^2 reelle auf der Fläche gelegene Punkte, so dass die construirte Minimalfläche reell ist. Also:

Satz 16. *Lässt man in den allgemeinen Formeln einer Minimalfläche*

$$x = A(t) + A_1(\tau),$$
$$y = B(t) + B_1(\tau),$$
$$z = C(t) + C_1(\tau),$$

wo

$$dA^2 + dB^2 + dC^2 = 0,$$
$$dA_1^2 + dB_1^2 - dC_1^2 = 0$$

ist, die Grössen $A_1(\tau)$, $B_1(\tau)$, $C_1(\tau)$ *die zu* $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ *conjugirten Functionen von* τ *bezeichnen, so ist die betreffende Minimalfläche immer reell.*

12. Wir werden zeigen, dass die soeben entwickelte Methode *alle* reellen Minimalflächen liefert. Hierzu machen wir die folgenden Ueberlegungen.

Ich wähle eine beliebige *reelle* Fläche, die keine Minimalfläche zu sein braucht. Alle imaginären Punkte dieser Fläche ordnen sich paarweise als imaginär-conjugirt zusammen. Und dementsprechend ordnen sich auch alle auf der Fläche gelegenen Minimalcurven paarweise als conjugirt zusammen. Dies vorausgesetzt, werde ich die beiden durch einen *reellen* Punkt p der Fläche hindurchgehenden Minimalcurven betrachten. Vertausche ich die conjugirten Punkte der Fläche unter sich. so bleibt p ungeändert, und daher sind nur die beiden folgenden Fälle denkbar. Entweder bleiben die durch p gehenden Minimalcurven alle beide ungeändert, indem sie sich in sich transformiren, oder auch es vertauschen sich diese Curven unter einander. Ich werde zeigen, dass nur der letzte Fall eintreten kann. Wenn insbesondere die beiden durch p gehenden Minimalcurven Zweige einer *irreductiblen* Curve sind, so vertauschen sich, werde ich nachweisen, die beiden Zweige unter sich.

Lass uns in der That voraussetzen, dass ein solcher Zweig in sich selbst transformirt würde. Und seien xyz die Coordinaten des Punktes p, $x + dx + id\xi$, $y + dy + id\eta$, $z + dz + id\zeta$ Coordinaten eines benachbarten Punktes des betreffenden Zweiges. Nach unserer Voraussetzung wären dann $x + dx - id\xi$, $y + dy - id\eta$, $z + dz - id\zeta$

die Coordinaten eines gewissen Punktes desselben Zweiges. Es beständen daher drei Relationen der Form

$$dx + id\xi = (a + \alpha i)(dx - id\xi),$$
$$dy + id\eta = (a + \alpha i)(dy - id\eta),$$
$$dz + id\zeta = (a + \alpha i)(dz - id\zeta).$$

Setzte man hier

$$dx + id\xi = re^{fi},$$
$$dy + id\eta = \varrho e^{\varphi i},$$
$$dz + id\zeta = Re^{Fi},$$
$$a + i\alpha = Ae^{Bi},$$

so käme

$$re^{fi} = Ar\,e^{(B-f)i},$$
$$\varrho e^{\varphi i} = A\varrho\, e^{(B-\varphi)i},$$
$$Re^{Fi} = ARe^{(B-F)i},$$

woraus

$$A = 1,\quad f = B - f,$$
$$\varphi = B - \varphi,$$
$$F = B - F,$$

und also

$$f = \varphi = F = \tfrac{1}{2}B.$$

Also käme

$$dx + id\xi = re^{\frac{1}{2}Bi},$$
$$dy + id\eta = \varrho e^{\frac{1}{2}Bi},$$
$$dz + id\zeta = Re^{\frac{1}{2}Bi}$$

woraus

$$\frac{dx + id\xi}{r} = \frac{dy + id\eta}{\varrho} = \frac{dz + id\zeta}{R}$$

folgen würde. Nun aber ist

$$(dx + id\xi)^2 + (dy + id\eta)^2 + (dz + id\zeta)^2 = 0,$$

also käme

$$r^2 + \varrho^2 + R^2 = 0,$$

welche Gleichung jedoch *contradictorisch* ist, indem r, ϱ, R reelle Grössen sind, die nicht sämmtlich verschwinden dürfen. Hieraus folgt nun zunächst der Satz:

Satz 17. *Unter den imaginären Richtungen, die durch einen reellen Punkt hindurchgehen, und welche dabei den Kugelkreis treffen, giebt es keine, die sich selbst conjugirt ist.*

Hieraus fliesst unmittelbar

Satz 18. *Vertauscht man die conjugirten Punkte einer reellen Fläche unter sich, so vertauschen sich die beiden durch einen reellen Punkt der Fläche hindurchgehenden Minimalcurven.*

Wenden wir nun diesen Satz auf eine beliebige reelle Minimalfläche an, so ergiebt sich, dass die beiden durch einen reellen Punkt allgemeiner Lage hindurchgehenden Minimalcurven, die auf der Fläche gelegen sind, einander conjugirt sind. Und also ergiebt sich der Satz:

Satz 19. *Man erhält die allgemeinste reelle Minimalfläche, indem man, wie in Satz* 16. *geschehen, eine beliebige Minimalcurve*

$$x = A(t), \quad y = B(t), \quad z = C(t)$$

mit der conjugirten Minimalcurve

$$x = A_1(\tau), \quad y = B_1(\tau), \quad z = C_1(\tau)$$

verbindet und darnach die Minimalfläche

$$x = A(t) + A_1(\tau),$$
$$y = B(t) + B_1(\tau),$$
$$z = C(t) + C_1(\tau).$$

bildet.

---

13. In der citirten Arbeit giebt Bonnet zugleich Methoden zur Auffindung von beliebig vielen reellen algebraischen Minimalflächen. Dagegen behandelt er nicht die Frage nach der Bestimmung *aller* reellen algebraischen Minimalflächen. Erst Weierstrass hat eine erschöpfende Methode zur Bestimmung aller reellen algebraischen Minimalflächen gegeben.

Indem ich im Folgenden eine neue Behandlung des von Weierstrass erledigten Problems entwickele, erlaube ich mir die Aufmerksamkeit darauf zu richten, dass bei meiner Behandlung das betreffende Problem in mehrere Unterprobleme *zerlegt* wird. Zugleich hebe ich schon hier hervor, dass ich in entsprechender Weise dasselbe Problem für einige andere interessante partielle Differentialgleichungen 2. O. erledigt habe.

Ich bemerke zunächst, dass die (reelle oder imaginäre) Minimalfläche

$$x = A(t) + A_1(\tau),$$
$$y = B(t) + B_1(\tau),$$
$$z = C(t) + C_1(\tau)$$

immer algebraisch ist, wenn die beiden Minimalcurven

$$x = A(t), \quad y = B(t), \quad z = C(t)$$

und

$$x = A_1(\tau), \quad y = B_1(\tau), \quad z = C_1(\tau)$$

algebraisch sind. Umgekehrt ist leicht einzusehen, dass diese hinreichende Bedingung auch nothwendig ist. Denn sei überhaupt eine algebraische Minimalfläche vorgelegt. Ich construire den Tangentenkegel, dessen Spitze in einem beliebigen Punkte des Kugelkreises gelegen ist. Dieser Kegel ist algebraisch und folglich ist auch seine

Berührungscurve mit der vorgelegten Fläche algebraisch. Aber diese Berührungscurve zerfällt in Minimalcurven (die auf der Fläche gelegen sind), und zwar findet sich unter ihnen jedenfalls *eine* Minimalcurve jeder Schaar. Also schliessen wir, dass die auf einer algebraischen Minimalfläche gelegenen Minimalcurven sämmtlich algebraisch sind. Also ergiebt sich:

Satz 20. *Man erhält alle algebraischen Minimalflächen, indem man in der früher (Satz 6. und 7.) auseinandergesetzten Weise zwei beliebige algebraische Minimalcurven verbindet.*

Hiermit ist das vorliegende Problem darauf zurückgeführt, sämmtliche algebraische Minimalcurven aufzufinden. Und da dieses Hülfsproblem schon in Nummer 10., und dies sogar in zwei verschiedenen Weisen erledigt wurde, so ist die Frage nach allen algebraischen Minimalflächen erledigt.

Fragt man mit Weierstrass insbesondere nach allen *reellen* algebraischen Minimalflächen, so erhält man, indem man die Sätze 19. und 20. verbindet, unmittelbar die Anwort in der folgenden Form:

Satz 21. *Man erhält die allgemeinste reelle algebraische Minimalfläche, indem man eine beliebige algebraische Minimalcurve mit der conjugirten Minimalcurve in der früher (Satz 6. und 7.) auseinandergesetzten Weise verbindet.*

Wünscht man endlich die Bestimmung aller *reellen* algebraischen Minimalflächen eben in der von Weierstrass gegebenen Form zu erhalten, so braucht man nur Satz 14. mit dem vorangehenden Satze zu verbinden. Bezeichnet man dabei überhaupt den reellen Theil einer Function f mit $R(f)$, so ergiebt sich der folgende von Weierstrass herrührende Satz:

Satz 22. *Die allgemeinste reelle algebraische Minimalfläche wird dargestellt durch die Formeln*

$$\begin{aligned} x &= R[(1-s^2)F''(s) + 2sF'(s) - 2F(s)], \\ y &= R[i(1+s^2)F''(s) - 2isF'(s) + 2iF(s)], \\ z &= R[2sF''(s) - 2F'(s)], \end{aligned}$$

in denen $F(s)$ eine beliebige algebraische Function von s bezeichnet.

Die vereinigten Sätze 20. und 21. leisten insofern mehr als Satz 22., weil sie *alle* algebraischen Minimalflächen, und nicht allein die *reellen* algebraischen Minimalflächen liefern.

§ 4.

Minimalflächen, deren Minimalcurven eine irreductible Schaar bilden.

Durch jeden Punkt einer Minimalfläche, die keine imaginäre Developpable ist, gehen *zwei* Minimalcurven, die im Allgemeinen zwei verschiedenen Schaaren angehören. Ausnahmsweise kann es jedoch eintreten, dass sämmtliche Minimalcurven einer Minimalfläche eine irreductible Schaar bilden, welche dabei die Fläche zweifach bedeckt. Solche Minimalflächen nenne ich *Doppelflächen.*

14. Es ist leicht die allgemeinen Gleichungen aller Minimalflächen, die Doppelflächen sind, anzugeben. Seien in der That

$$x = A(t), \quad y = B(t), \quad z = C(t) \tag{1}$$

die Gleichungen einer beliebiger Minimalcurve. Alsdann sind

$$x = A(t) + A(\tau),$$
$$y = B(t) + B(\tau),$$
$$z = C(t) + C(\tau)$$

die Gleichungen einer Minimalfläche, deren *sämmtliche* Minimalcurven mit der vorgelegten Minimalcurve congruent und gleichgestellt sind. Und da die beiden Gleichungssysteme

$$x = A(a) + A(\tau),$$
$$y = B(a) + B(\tau), \qquad (a = \text{Const.}),$$
$$z = C(a) + C(\tau),$$

und

$$x = A(t) + A(a),$$
$$y = B(t) + B(a), \qquad (a = \text{Const.}),$$
$$z = C(t) + C(a),$$

dieselbe Minimalcurve darstellen, so bilden die auf unserer Fläche gelegenen Minimalcurven eine *irreductible* Schaar, sodass unsere Minimalfläche eine Doppelfläche ist.

Es ist andererseits klar, dass hiermit die allgemeinen Gleichungen aller Doppelflächen gefunden sind. Denn da eine allgemeine Minimalfläche bestimmt ist, wenn auf derselben *eine* Minimalcurve *aus jeder Schaar* gegeben ist, so ist eine Doppelfläche bestimmt, wenn nur eine einzige auf derselben gelegene Minimalcurve vorgelegt ist. Also:

Satz 23. *Alle Minimalflächen, die Doppelflächen sind, werden definirt durch die Gleichungen*

$$\begin{aligned} x &= A(t) + A(\tau), \\ y &= B(t) + B(\tau), \\ z &= C(t) + C(\tau), \end{aligned} \tag{2}$$

vorausgesetzt, dass

$$x = A(t), \qquad y = B(t), \qquad z = C(t)$$

die Gleichungen einer beliebigen Minimalcurve sind.

Zu bemerken ist, dass die Parameterwerthe

$$t = a, \qquad \tau = b$$

denselben Punkt wie die Werthe

$$t = b, \qquad \tau = a$$

liefern.

15. Im Allgemeinen ist die durch die Formeln (2) gelieferte Doppelfläche imaginär, und es stellt sich daher die neue Aufgabe, alle *reelle* Minimalflächen zu finden, die Doppelflächen sind.

Seien

$$(3) \qquad x + \xi i, \qquad y + \eta i, \qquad z + \zeta i$$

die Coordinaten eines beliebigen Punktes einer *reellen Doppelfläche.* Alsdann gehört auch der conjugirte Punkt

$$(4) \qquad x - \xi i, \qquad y - \eta i, \qquad z - \zeta i$$

unserer Fläche an. Wenn der erste Punkt eine Minimalcurve durchläuft, so beschreibt der conjugirte Punkt die conjugirte Minimalcurve. Sollen nun sämmtliche Minimalcurven unserer Fläche eine irreductible Schaar bilden, *so muss eine jede Minimalcurve durch eine gewisse Translationsbewegung in die conjugirte Minimalcurve übergehen können.* Man kann daher in diesem Falle solche Constanten

$$a + \alpha i, \qquad b + \beta i, \qquad c + \gamma i$$

wählen, dass der Punkt

$$x + a + (\alpha - \xi) i, \qquad y + b + (\beta - \eta) i, \qquad z + c + (\gamma - \zeta) i,$$

derselben Minimalcurve, wie der Punkt (3) angehört. Also:

Satz 24. *Bilden die Minimalcurven einer reellen Minimalfläche eine irreductible Schaar, so ist es, wenn wir mit*

$$x + \xi i, \qquad y + \eta i, \qquad z + \zeta i$$

die Coordinaten eines variablen Punktes einer auf der Fläche gelegenen Minimalcurve bezeichnen, immer möglich solche Constanten $a + \alpha i$, $b + \beta i$, $c + \gamma i$ *zu wählen, dass der variable Punkt*

$$x + a + (\alpha - \xi) i, \quad y + b + (\beta - \eta) i, \quad z + c + (\gamma - \zeta) i$$

der vorgelegten Minimalcurve ebenfalls angehört.

Indem wir auf den neuen Punkt unserer Minimalcurve nochmals dieselbe Operation anwenden, erkennen wir, dass auch der Punkt mit den Coordinaten

$$x + 2a + \xi i, \qquad y + 2b + \eta i, \qquad z + 2c + \zeta i$$

unserer Minimalcurve angehört. Und durch $2m$-malige Wiederholung derselben Operation erkennt man, dass jeder Punkt mit den Coordinaten

$$(5) \qquad x + 2ma + \xi i, \qquad y + 2mb + \eta i, \qquad z + 2mc + \zeta i,$$

wo m eine beliebige ganze Zahl bezeichnet, unserer Curve angehört.

Sind nun a, b, c nicht sämmtlich gleich Null, so bestimmen die

Coordinatenwerthe (5) *unendlich viele* Punkte, die unsere Minimalcurve mit der Geraden

$$\frac{x' - (x + \xi i)}{a} = \frac{y' - (y + \eta i)}{b} = \frac{z' - (z + \zeta i)}{c}$$

gemein hat. Also ist die Curve *transcendent*, und folglich ist auch die zugehörige reelle Minimalfläche transcendent.

In dem vorliegenden Falle können wir bemerken, dass unsere Minimalcurve die Translationsbewegung

$$\Delta x = a, \qquad \Delta y = b, \qquad \Delta z = c$$

gestattet. Folglich gestatten sämmtliche Minimalcurven dieselbe Bewegung, sodass die Fläche periodisch*) ist. Also:

Satz 25. *Wenn die Grössen a b c nicht sämmtlich gleich Null sind, so ist unsere Doppelfläche periodisch und also transcendent***).

16. Soll also eine Doppelfläche algebraisch sein, so muss

$$a = b = c = 0$$

sein. In diesem Falle entspricht jedem Punkte

$$x + \xi i, \qquad y + \eta i, \qquad z + \zeta i$$

einer auf der Fläche gelegenen Minimalcurve ein anderer Punkt

$$x + (\alpha - \xi) i, \qquad y + (\beta - \eta) i, \qquad z + (\gamma - \zeta) i$$

derselben Minimalcurve. Man führe die Translationsbewegung

$$\Delta x = -\frac{\alpha}{2} i, \quad \Delta y = -\frac{\beta}{2} i, \quad \Delta z = -\frac{\gamma}{2} i$$

auf unsere Curve aus. Hierdurch erhalten wir eine neue Minimalcurve, auf der jedem Punkte

$$x + \left(\xi - \frac{\alpha}{2}\right) i, \quad y + \left(\eta - \frac{\beta}{2}\right) i, \quad z + \left(\zeta - \frac{\gamma}{2}\right) i$$

der conjugirte Punkt

$$x - \left(\xi - \frac{\alpha}{2}\right) i, \quad y - \left(\eta - \frac{\beta}{2}\right) i, \quad z - \left(\zeta - \frac{\gamma}{2}\right) i$$

zugeordnet ist. Daher ist die neue Curve sich selbst conjugirt. Also:

Satz 26. *Jede Minimalcurve einer reellen algebraischen Doppel-*

---

*) Hier möge angeführt sein, dass eine jede Periode einer Minimalfläche ihren Grund in einer Periode der Minimalcurven der einen Schaar hat. Aehnliche Sätze gelten für reelle algebraische Minimalflächen, die überhaupt eine Gruppe linearer Transformationen gestatten, bei denen der Kugelkreis invariant bleibt.

**) Als Beispiel für periodische Doppelflächen möge die Schraubenfläche angeführt sein. Ein zweites Beispiel ist die Fläche, deren Haupttangentencurven sich auf die Kugel als confocale sphärische Kegelschnitte abbilden. Diese beiden Flächen sind dadurch bemerkenswerth, dass sie gleichzeitig hinsichtlich einfach unendlich vieler Kegelschnitte Minimalflächen sind.

fläche kann durch eine zweckmässige Translationsbewegung in eine sich selbst conjugirte Curve übergeführt werden.

Wir können auch den noch allgemeineren Satz aussprechen:

Satz 27. *Jede Minimalcurve einer nicht periodischen Doppelfläche geht durch eine gewisse Translationsbewegung in eine sich selbst conjugirte Curve über.*

Sei anderseits eine beliebige sich selbst conjugirte Minimalcurve vorgelegt:

$$x = A(t), \quad y = B(t), \quad z = C(t),$$

und lass mich voraussetzen, dass die Parameterwerthe

$$t = \lambda + \mu i, \qquad t = \nu + \varrho i$$

zwei conjugirte Punkte geben. Gebe ich dann in den Gleichungen

$$\begin{aligned} x &= A(t) + A(\tau), \\ y &= B(t) + B(\tau), \\ z &= C(t) + C(\tau) \end{aligned}$$

den Grössen t und τ die Werthe

$$t = \lambda + \mu i, \qquad \tau = \nu + \varrho i,$$

so ist der hervorgehende Punkt reell. Die erhaltene Doppelfläche ist daher auch reell. Also:

Satz 28. *Eine sich selbst conjugirte Minimalcurve liefert immer eine reelle Doppelfläche.*

17. In der vorangehenden Nummer reducirten wir das Problem, alle reellen algebraischen Doppelflächen zu finden, auf die Bestimmung aller sich selbst conjugirten algebraischen Minimalcurven. Es ist aber leicht das letzte Problem zu erledigen. Man nehme in der That eine beliebige *reelle* Gleichung zwischen den Ebenencoordinaten t, u, v,

$$f(tuv) = 0,$$

und füge die Gleichung des Kugelkreises hinzu

$$t^2 + u^2 + v^2 = 0.$$

Diese beiden Gleichungen bestimmen eine sich selbst conjugirte Developpable, deren Rückkehrkante eine sich selbst conjugirte Minimalcurve ist. Allerdings ist es hierbei denkbar, dass die Developpable und in Folge dessen auch die Rückkehrkante in Theile zerfällt, die paarweise einander conjugirt sind. Doch ist es klar, dass ein solches Zerfallen nur ausnahmsweise eintritt.

Auf der anderen Seite ist klar, dass alle sich selbst conjugirten Minimalcurven in dieser Weise erhalten werden; denn *in Ebenencoordinaten* wird eine solche Curve eo ipso durch die Gleichung

$$t^2 + u^2 + v^2 = 0$$

zusammen mit einer anderen reellen Gleichung zwischen t, u, v dargestellt. Also ergiebt sich:

Satz 29. *Um alle*) reellen algebraischen Doppelflächen zu finden verfährt man folgendermassen. Zu der Gleichung des Kugelkreises in Ebenencoordinaten*

$$t^2 + u^2 + v^2 = 0$$

fügt man eine beliebige reelle algebraische Relation zwischen t, u, v hinzu:

$$f(t, u, v) = 0.$$

Ist die hierdurch bestimmte Minimalcurve

$$x = A(s), \quad y = B(s), \quad z = C(s)$$

irreductibel, so bestimmen die Gleichungen

$$x = RA(s), \quad y = RB(s), \quad z = RC(s)$$

eine reelle algebraische Minimalfläche, die eine Doppelfläche ist.

Nimmt man z. B. einen reellen Kegelschnitt, und sucht die um diesen Kegelschnitt und den imaginären Kugelkreis umgeschriebene Developpable, so erhält man bekanntlich eine sich selbst conjugirte Developpable achter Ordnung, deren Rückkehrkante eine sich selbst conjugirte Minimalcurve zwölfter Ordnung ist. Die zugehörige Minimalfläche, die Herr Henneberg**) zuerst betrachtet hat, ist eine Doppelfläche. Besonders interessant ist der ebenso von Herrn Henneberg betrachtete Fall, dass der vorgelegte Kegelschnitt eine Parabel ist. Mit diesen beiden Flächen werde ich mich sowohl in dieser wie in meiner nächsten Abhandlung über Minimalflächen beschäftigen.

§ 5.

Bestimmung der Classe einer Minimalfläche.

Da eine Minimalfläche durch die auf derselben gelegenen Minimalcurven bestimmt ist, stellt sich die allgemeine Aufgabe, die charakteristischen Zahlen einer algebraischen Minimalfläche z. B. ihre Classe, Ordnung u. s. w. zu bestimmen, wenn die betreffenden Minimalcurven bekannt sind.

In diesem Paragraphen entwickele ich eine äusserst einfache Formel zur Bestimmung der Classe einer beliebigen algebraischen Minimalfläche. Diese Formel ist jedoch verschieden, jenachdem die Fläche eine Doppelfläche ist, oder nicht. Wir betrachten daher diese beiden Fälle für sich.

---

*) Dieser Satz ist deswegen bemerkenswerth, weil derselbe nicht gültig bleibt, wenn man das Wort „*algebraisch*" weglässt.

**) Bei Henneberg werden die besprochenen Minimalflächen dadurch definirt, dass sie die Evolute eines Kegelschnitts als geodätische Curve enthalten.

18. Wir wollen zunächst solche Minimalflächen betrachten, die keine Doppelflächen sind, also solche Minimalflächen, die zwei verschiedene Schaaren von Minimalcurven enthalten. Sei K eine Curve der einen Schaar, K' eine Curve der zweiten Schaar. Sei R und R' der Rang dieser Curven; M und M' die Multiplicität des Kugelkreises auf den zugehörigen Developpablen. Ich werde zeigen, dass die Classe der Fläche durch die Formel

$$M'(R-M)+M(R'-M')$$

ausgedrückt wird.

Zunächst zeige ich, dass jeder Tangentenkegel, dessen Spitze auf dem Kugelkreise liegt, in $M+M'$ Kegel zerfällt. Durch einen Punkt π des Kugelkreises gehen nämlich M Tangenten an die Curve K. Jede solche Tangente gehört einem Kegel an, der die Fläche nach einer Curve von der Schaar K' berührt. Ich behaupte, dass keine zwei unter diesen Tangenten die Fläche in Punkten *derselben* Curve K' berühren können. Wäre nämlich dies allgemein der Fall, so müsste die Curve K' durch eine endliche Translationsbewegung in sich selbst übergehen können, sodass K' *periodisch* und also transcendent sein würde. Daher giebt es M verschiedene Tangentenkegel, deren Spitze in π liegt, welche nach Curven K' berühren. Dem entsprechend giebt es M' Tangentenkegel, deren Spitzen in π liegen, welche nach Curven K berühren. Und da jede durch π gehende Tangente entweder eine Curve K oder eine Curve K' berührt, ergiebt sich der Satz:

Satz 30. *Jeder Tangentenkegel, dessen Spitze auf dem Kugelkreise liegt, zerfällt in M Kegel, die die Fläche nach Curven K', und M' Kegel, die nach Curven K berühren.*

Die Kegel, die nach Curven K' berühren, sind von der Classe $R'-M'$. Ebenso sind die Kegel, die nach Curven K berühren, von der Classe $R-M$. Also ist die Classe des gesammten Tangentenkegels, dessen Spitze auf dem Kugelkreise gelegen ist, gleich

$$M(R'-M')+M'(R-M).$$

Diese Zahl ist somit die Classe der Fläche. Also:

Satz 31. *Die Classe einer Minimalfläche, die keine Doppelfläche ist, wird gegeben durch die Formel*

$$M'(R-M)+M(R'-M');$$

R ist der Rang einer auf der Fläche gelegenen Minimalcurve, M ist die Multiplicität des Kugelkreises auf der zugehörigen Developpabeln; R' und M' sind die entsprechenden Zahlen einer Minimalcurve der zweiten Schaar.

Ist insbesondere die betreffende Fläche reell, so ist

$$R=R', \qquad M=M',$$

und also ergiebt sich:

Satz 32. *Die Classe einer reellen Minimalfläche ist gleich* $2M(R-M)$, *vorausgesetzt, dass die Fläche keine Doppelfläche ist.*

Wünscht man die Classe einer Doppelfläche zu bestimmen, so verfährt man in entsprechender Weise. Ist R der Rang einer allgemeinen auf der Fläche gelegenen Minimalcurve, M die Multiplicität des Kugelkreises auf der betreffenden Developpablen, so erkennt man, dass der Tangentenkegel, dessen Spitze auf dem Kugelkreise liegt, in M Kegel zerfällt, unter denen jeder nach einer Minimalcurve berührt. In Folge dessen ist die Classe eines jeden solchen Kegels gleich $R-M$. Also ist die Classe des gesammten Tangentenkegels gleich $M(R-M.)$ Daher:

Satz 33. *Die Classe einer Minimalfläche, deren Minimalcurven eine irreductible Schaar bilden, ist gleich* $M(R-M)$*).

Diese letzte Formel gilt für *alle* Doppelflächen, sowohl die reellen wie die imaginären.

---

20. Transformirt man eine Minimalcurve durch reciproke Radien**), so erhält man bekanntlich eine neue Minimalcurve. Insbesondere geht eine Minimalgerade in eine ebensolche Gerade über.

Hieraus lassen sich leicht Schlüsse ziehen, die für die Theorie der algebraischen Minimalflächen wichtig sind. Zunächst zeige ich, dass die Zahl $R-M$ bei der besprochenen Transformation invariant bleibt.

Bei der Transformation geht nämlich die Developpable einer Minimalcurve in die Developpable einer ebensolchen Curve über. Die vorgelegte Developpable wird von einer Minimalgeraden allgemeiner Lage in $R-M$ Punkten geschnitten. Also wird auch die neue Developpable von einer jeden Minimalgeraden allgemeiner Lage in ebensovielen Punkten geschnitten. Und also kommt:

Satz 34. *Transformirt man eine Minimalcurve durch reciproke Radien, so bleibt die Zahl* $R-M$ *invariant.*

Durch analoge Betrachtungen werden wir jetzt einen Minimalwerth der Zahl $R-M$ herleiten. Die Developpable einer vorgelegten Minimalcurve schneiden wir mit einem Kreise, der die Curve in einem gewissen Punkte π trifft, sonst aber eine allgemeine Lage besitzt. Sodann führen wir eine Transformation durch reciproke Radien aus, indem wir den Punkt π zum Pol der Transformation wählen. Hierdurch geht der Kreis über in eine Gerade allgemeiner Lage, welche die Developpable der neuen Minimalcurve in R'' Punkten trifft, voraus-

---

*) Selbstverständlicherweise sehen wir hier, wie gewöhnlich, von den imaginären Developpablen, die den Kugelkreis enthalten, ab.

**) Man vergleiche z. B. Darboux: Sur une classe remarquable de courbes etc.

gesetzt, dass R'' den Rang der neuen Minimalcurve bezeichnet. Folglich ist R'' gleich der Zahl der Schnittpunkte der ursprünglichen Developpablen mit dem besprochenen Kreise, minus der Zahl dieser Schnittpunkte, die entweder im Punkte π oder unendlich entfernt liegen. Das heisst, es ist

$$R'' = 2(R - M) - \omega,$$

wo ω die Zahl der im Punkte π vereinigten Schnittpunkte bezeichnet. Und da diese Zahl gleich 2 ist, wenn π kein singulärer Punkt der vorgelegten Minimalcurve ist, so können wir setzen

$$R'' = 2(R - M) - 2.$$

Wäre nun $R - M$ kleiner als 3, so ergäbe sich für R'' ein kleinerer Werth als 4. Es giebt aber keine Curve, deren Rang kleiner als 4 ist. Also:

Satz 35. *Die Zahl $R - M$ ist gleich oder grösser als 3.*

[Später werden wir zeigen, dass $R - M$ entweder gleich oder auch grösser als M ist.]

21. Die obenstehenden Entwickelungen führen zu einer einfachen Bestimmung der niedrigsten Classenzahl einer Minimalfläche. Dabei sehen wir von der Ebene und den imaginären Developpablen ab.

Es folgt zunächst aus den Sätzen 31., 32. und 35., dass die Classe einer reellen oder imaginären Minimalfläche, die keine Doppelfläche ist, nicht kleiner als 6 sein kann.

Dagegen kann die Classe einer Doppelfläche gleich 3 sein. Die Hypothese

$$M(R - M) = 3$$

giebt nämlich

$$M = 1, \quad R = 4$$

und es giebt bekanntlich eine Minimalcurve 3. O., deren Rang gleich 4 ist, und welche dabei den Kugelkreis als *einfachen* Kegelschnitt enthält. Also:

Satz 36. *Es giebt eine Minimalfläche dritter Classe.**)

Es fragt sich, ob es *reelle* Minimalflächen dritter Classe giebt. Um diese Frage zu beantworten, erinnern wir, dass eine jede Minimalcurve einer reellen algebraischen Doppelfläche durch eine gewisse Translationsbewegung in eine sich selbst conjugirte Curve übergehen kann. Hieraus aber fliesst der Hülfssatz:

Satz 37. *Eine Minimalcurve allgemeiner Lage einer reellen Doppelfläche trifft den Kugelkreis in einer g r a d e n Anzahl von Punkten, die paarweise conjugirt sind.*

---

*) Diese Fläche ist, wie ich beiläufig bemerke, eine Cayley'sche Linienfläche 3. Ordnung.

Und da eine Minimalcurve dritter Ordnung den Kugelkreis nur in *einem* Punkte trifft, folgt:

Satz 38. *Es giebt keine reelle Minimalfläche dritter Classe.*

Um alle Minimalflächen 4ter Classe zu finden, setzt man

$$M(R - M) = 4,$$

woraus

$$M = 1, \quad R = 5.$$

Es giebt bekanntlich eine Minimalcurve vierter Ordnung, deren Rang 5 ist, deren Developpable den Kugelkreis als einfachen Kegelschnitt enthält. Also existirt eine Minimalfläche 4ter Classe. Da indess die besprochene Minimalcurve den Kugelkreis nur in *einem* Punkte trifft, so giebt es keine reelle Minimalfläche vierter Classe. Also:

Satz 39. *Es giebt eine Minimalfläche vierter Classe, welche jedoch immer imaginär ist.*

Und da es nach Herrn Hennebergs schönen Untersuchungen eine reelle Minimalfläche 5ter Classe giebt, so folgt*):

Satz 40. *Die niedrigste Classenzahl der reellen Minimalflächen ist* 5.

Wie man sieht, sind alle Minimalflächen fünfter Classe bestimmt durch die Gleichung

$$M(R - M) = 5,$$

woraus

$$M = 1, \qquad R = 6.$$

In späteren Paragraphen dieser Abhandlung werde ich mich mehr eingehend mit der Bestimmung aller Minimalflächen von gegebener Classe beschäftigen. Es gelingt mir u. A. alle *reellen Minimalflächen anzugeben, deren Classe gleich einer beliebigen vorgelegten Primzahl ist.*

§ 6.

Die Ordnung einer algebraischen Minimalfläche.

Ich stelle mir jetzt die Aufgabe, die Ordnung einer vorgelegten algebraischen Minimalfläche

$$\begin{aligned} x &= A(t) + A_1(\tau), \\ y &= B(t) + B_1(\tau), \\ z &= C(t) + C_1(\tau) \end{aligned} \tag{1}$$

zu bestimmen. Ich werde eine allgemeine Methode zur Erledigung dieses Problems entwickeln. Dabei bemerke ich, dass diese Methode sich überhaupt auf alle Flächen, deren Gleichungen die Form (1) besitzen, anwenden lässt.

*) Man vergleiche hierzu den letzten Paragraphen dieser Abhandlung.

22. Ich schneide die vorgelegte Minimalfläche, deren Minimalcurven *zwei* verschiedene Schaaren bilden mögen, mit einer Geraden, die durch den gegebenen Punkt

$$x = a, \quad y = b, \quad z = c$$

hindurchgeht, und welche dabei die Richtungscosinus α, β, γ besitzt. Die Gleichungen dieser Geraden sind

$$(2) \qquad \begin{aligned} x &= a + \alpha\varrho, \\ y &= b + \beta\varrho, \\ z &= c + \gamma\varrho, \end{aligned}$$

wo ϱ die Distanz des laufenden Punktes x, y, z von dem festen Punkte a, b, c bezeichnet. Ich setze voraus, dass die Constanten $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ *allgemeine* Werthe haben. In Folge dessen kann ich annehmen, dass sämmtliche Schnittpunkte zwischen der Fläche (1) und der Geraden (2) *verschieden* sind und dabei *endliche* Coordinatenwerthe haben. Ich nehme ferner an, dass die Gerade (2) nicht eine solche Lage besitzt, dass zwei unter ihren Schnittpunkten mit der Fläche demselben Werthsysteme t, τ entsprechen. Ich setze endlich voraus, dass die Gerade (2) auch nicht eine solche Lage besitzt, dass ein Schnittpunkt zu einem solchen Werthsysteme t, τ gehört, für welches eine unter den Grössen $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $A_1(\tau)$, $B_1(\tau)$, $C_1(\tau)$ unendlich wird.

Nach diesen Festsetzungen ist die Ordnung der Fläche gleich der Zahl der Werthsysteme t, τ, ϱ, welche die Gleichungen

$$(3) \qquad \begin{aligned} A(t) + A_1(\tau) &= a + \alpha\varrho, \\ B(t) + B_1(\tau) &= b + \beta\varrho, \\ C(t) + C_1(\tau) &= c + \gamma\varrho \end{aligned}$$

erfüllen, ohne eine oder mehrere unter den Grössen $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $A_1(\tau)$, $B_1(\tau)$, $C_1(\tau)$ unendlich zu machen.

Wir schreiben die Gleichungen (3) folgendermassen

$$(4) \qquad \begin{aligned} A(t) - a &= \alpha\varrho - A_1(\tau), \\ B(t) - b &= \beta\varrho - B_1(\tau), \\ C(t) - c &= \gamma\varrho - C_1(\tau), \end{aligned}$$

und ersetzen sie darnach, indem wir 3 Hülfsgrössen x', y', z' einführen, durch die 6 äquivalenten Gleichungen

$$(5) \qquad x' = A(t) - a, \qquad y' = B(t) - b, \qquad z' = C(t) - c.$$

$$(6) \qquad x' = \alpha\varrho - A_1(\tau), \quad y' = \beta\varrho - B_1(\tau), \quad z' = \gamma\varrho - C_1(\tau).$$

Die drei Gleichungen (5) bestimmen eine Minimalcurve, die mit den Minimalcurven der einen Schaar unserer Fläche congruent und gleichgestellt ist. Die drei Gleichungen (6) bestimmen eine Cylinderfläche, deren Erzeugenden die Richtungscosinus α, β, γ besitzen, und welche dabei die Minimalcurve

$$x' = -A_1(\tau), \quad y' = -B_1(\tau), \quad z' = -C_1(\tau)$$

enthält. Hiernach ist der folgende Satz gefunden:

Satz 41. *Die Ordnung der Fläche* (1) *ist gleich der Anzahl der im endlichen Raume gelegenen Schnittpunkte zwischen der Curve* (5) *und der Cylinderfläche* (6). *Vorausgesetzt ist dabei, dass die Grössen a, b, c, α, β, γ allgemeine Werthe haben*).*

Ist nun die Curve (5) von der Ordnung m, und die Curve

$$x = A_1(\tau), \quad y = B_1(\tau), \quad z = C_1(\tau)$$

und also auch die Curve

$$x = -A_1(\tau), \quad y = -B_1(\tau), \quad z = -C_1(\tau)$$

von der Ordnung m_1, so schneidet die Curve (5) die Cylinderfläche (6) in mm_1 Punkten. Liegen dieselben sämmtlich im endlichen Raume, so ist die Ordnung der Fläche (1) gleich mm_1. Liegen dagegen einige unter diesen Punkten, etwa ω, unendlich entfernt, so ist die Ordnung der Minimalfläche gleich $mm_1 - \omega$. Also:

Satz 42. *Erzeugen zwei algebraische Minimalcurven, deren Ordnung bezüglich gleich m und m_1 sein mögen, eine Minimalfläche, so lässt sich die Ordnung dieser Fläche durch $mm_1 - \omega$ ausdrücken. Hierbei ist ω eine positive Zahl, die nur vom Verhalten der beiden vorgelegten Minimalcurven im Unendlichen abhängt.*

Haben insbesondere unsere beiden Minimalcurven keinen gemeinsamen unendlich entfernten Punkt, so ist ω gleich Null, so dass die Ordnung der Fläche gleich mm_1 ist.

Ist unsere Minimalfläche insbesondere reell, so ist, da zwei conjugirte Minimalcurven dieselbe Ordnung haben, m gleich m_1. Setzen wir voraus, dass unter den unendlich entfernten Punkten einer Minimalcurve unserer Fläche sich keine solche finden, die zu einander conjugirt sind, so ist ω gleich Null, indem unsere Minimalcurve keinen unendlich entfernten Punkt mit der conjugirten Curve gemein hat. Also:

Satz 43. *Erzeugt eine Minimalcurve von der Ordnung m eine*

---

*) Man könnte sich von vorneherein denken, dass ein im endlichen Raume gelegener Schnittpunkt x' y' z' zwischen der Curve (5) und der Cylinderfläche einem Werthsystem t, τ entspräche, für welches eine der Grössen $A_1\tau$, $B_1\tau$, $C_1\tau$ und also auch ϱ unendlich wäre. Dann aber beständen für diesen Werth von τ die Relationen

$$\frac{A_1\tau}{\alpha} = \frac{B_1\tau}{\beta} = \frac{C_1\tau}{\gamma},$$

und das ist unmöglich, da α, β, γ *allgemeine* Constanten sind.

reelle Minimalfläche, die jedoch keine Doppelfläche ist, so ist die Ordnung dieser Fläche gleich $m^2 - \omega$. *Die Zahl* ω *ist gleich Null, wenn die Minimalcurve keine conjugirte, unendlich entfernte Punkte besitzt; dagegen grösser als Null, wenn die Curve solche Punkte enthält.*

23. Es fragt sich, wie man in jedem einzelnen Falle die Zahl ω, das heisst die Anzahl der unendlich entfernten Schnittpunkte der Curve (5) mit dem Cylinder (6) bestimmt.

Um dies zu beantworten, ersetzen wir die Curve (5) durch einen hindurchgehenden Cylinder, dessen Erzeugenden, wie diejenigen des Cylinders (6), die Richtungscosinus α, β, γ besitzen. Die Zahl ω ist gleich der Anzahl derjenigen gemeinsamen Erzeugenden dieser beiden Cylinder, die in der unendlich entfernten Ebene liegen. Hierbei ist zu bemerken, dass der Cylinder (6), nachdem die Constanten α, β, γ gewählt sind, eine bestimmte Lage besitzt, während der neue Cylinder wegen der unbestimmten Parameter a, b, c zweifach unendlich viele Lagen besitzen kann. Diese Lagen gehen aus einer bestimmten solchen Lage durch Anwendung aller Translationen des Raumes hervor. Indem wir sowohl den festen wie den variablen Cylinder durch ihre Schnittcurven mit einer festen Ebene ersetzen, erhalten wir den Satz:

Satz 44. *Die Zahl* ω *ist gleich der Anzahl der unendlich entfernten Schnittpunkte einer festen ebenen Curve mit einer variablen Curve derselben Ebene, auf die alle möglichen Translationen, welche diese Ebene invariant lassen, ausgeführt werden.*

Es ist leicht den letzten Satz durch ein analytisches Raisonnement herzuleiten. Die Gleichungen (4) geben durch Elimination von ϱ

$$(7)\qquad \begin{aligned} \beta A(t) - \alpha B(t) - (\beta a - \alpha b) &= -[\beta A_1(\tau) - \alpha B_1(\tau)], \\ \gamma A(t) - \alpha C(t) - (\gamma a - \alpha c) &= -[\gamma A_1(\tau) - \alpha C_1(\tau)], \end{aligned}$$

und da jedes Werthsystem t, τ, welches diese beiden Gleichungen befriedigt, und dabei den Grössen $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $A_1(\tau)$, $B_1(\tau)$, $C_1(\tau)$ endliche Werthe ertheilt, durch Einsetzung in (4) zugleich der Grösse ϱ einen endlichen Werth giebt, so ist die Ordnung der Fläche gleich der Anzahl derjenigen Werthsysteme t, τ, welche die beiden Gleichungen (7) erfüllen, und dabei keine unter den Grössen $A(t) \cdots C_1(\tau)$ unendlich machen.

Da nun die Parameter α, β, γ *allgemeine* Werthe haben sollen, so können wir annehmen, indem wir mit t_∞ einen Werth von t bezeichnen, der eine der Grössen $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ unendlich macht, dass die Gleichungen

$$\frac{A(t_\infty)}{\alpha} = \frac{B(t_\infty)}{\beta} = \frac{C(t_\infty)}{\gamma}$$

nicht bestehen, und ebenso, indem wir mit τ_∞ einen Werth von τ bezeichnen, der eine der Grössen $A_1(\tau)$, $B_1(\tau)$, $C_1(\tau)$ unendlich macht, dass die Gleichungen

$$\frac{A_1(\tau_\infty)}{\alpha} = \frac{B_1(\tau_\infty)}{\beta} = \frac{C_1(\tau_\infty)}{\gamma}$$

nicht bestehen.

In Folge dessen ist die Ordnung der Fläche zugleich die Anzahl derjenigen Werthsysteme t, τ, welche die beiden Gleichungen (7) *erfüllen, und dabei keine unter den Grössen*

$$\beta A(t) - \alpha B(t), \quad \gamma A(t) - \alpha C(t),$$
$$\beta A_1(\tau) - \alpha B_1(\tau), \quad \gamma A_1(\tau) - \alpha C_1(\tau)$$

unendlich machen.

Betrachten wir daher die beiden Curven

$$x' = \beta A(t) - \alpha B(t) - (\beta a - \alpha b),$$
$$y' = \gamma A(t) - \alpha C(t) - (\gamma a - \alpha c),$$

und

$$x'' = -[\beta A_1(\tau) - \alpha B_1(\tau)],$$
$$y'' = -[\gamma A_1(\tau) - \alpha C_1(\tau)],$$

so ist, können wir sagen, die Ordnung der Fläche gleich der Anzahl der nicht unendlich entfernten Schnittpunkte unserer beiden Curven*).

24. Handelt es sich darum die Ordnung einer *Doppelfläche*

$$x = A(t) + A(\tau),$$
$$y = B(t) + B(\tau),$$
$$z = C(t) + C(\tau)$$

zu bestimmen, so muss man sich erinnern, dass die beiden Werthsysteme

$$t = a, \quad \tau = b,$$
$$t = b, \quad \tau = a$$

denselben Punkt unserer Fläche liefern. Daher sind die Schnittpunkte der Fläche mit den Geraden

$$x = a + \alpha\varrho,$$
$$y = b + \beta\varrho,$$
$$z = c + \gamma\varrho$$

allerdings wie im allgemeinen Falle durch die Gleichungen

$$A(t) + A(\tau) = a + \alpha\varrho,$$
$$B(t) + B(\tau) = b + \beta\varrho,$$
$$C(t) + C(\tau) = c + \gamma\varrho$$

*) Diese beiden Curven sind, wie man sieht, Projectionen der beiden Minimalcurven

$$x = A(t) - a, \quad y = B(t) - b, \quad z = C(t) - c$$

und

$$x = -A_1(\tau), \quad y = -B_1(\tau), \quad z = -C_1(\tau).$$

bestimmt; aber man hat jetzt zu beachten, dass je *zwei* Werthsysteme t, τ, welche diese Gleichungen erfüllen und dabei keine unter den Grössen $A(t) \cdots C(\tau)$ unendlich machen, demselben Schnittpunkte zwischen der Fläche und der Geraden entsprechen. Die in den früheren Entwickelungen als Ordnungszahl gefundene Zahl ist daher jetzt durch 2 zu dividiren. Also:

Satz 45. *Erzeugt eine Minimalfläche der m^{ten} Ordnung eine Doppelfläche, so ist die Ordnung dieser Fläche $\frac{1}{2}(m^2 - \omega)$, wo ω nach den früheren Regeln bestimmt wird.*

Dieser Satz gilt für alle Doppelflächen, sowohl die reellen wie die imaginären.

§ 7.

Bestimmung der Zahl ω.

25. Ich werde jetzt zeigen, wie man die Anzahl der unendlich entfernten Schnittpunkte einer festen Curve mit einer variablen Curve, auf die successiv alle möglichen Translationen ausgeführt werden, bestimmen kann. Hierzu brauche ich einen bekannten Satz über die Schnittpunkte zweier algebraischen Curven*).

„*Seien $x = 0$, $y = 0$, $t = 0$ drei gerade Linien einer Ebene, und sei $t = 0$, $x = 0$ ein gemeinsamer Schnittpunkt zweier Curven. Ich setze*

$$\frac{t}{y} = \tau, \quad \frac{x}{y} = \xi,$$

und suche für jede Curve die Reihenentwickelung von τ nach den wachsenden Potenzen von ξ. Seien

$$\tau = A_0 \xi^{\frac{p}{q}} + A_1 \xi^{\frac{p+1}{q}} + \cdots + A_\varkappa \xi^{\frac{p+\varkappa}{q}} + \cdots,$$

$$\tau' = B_0 \xi^{\frac{r}{s}} + B_1 \xi^{\frac{r+1}{s}} + \cdots + B_i \xi^{\frac{r+i}{s}} + \cdots$$

diese Entwickelungen.

Es wird vorausgesetzt, dass die Exponenten $\frac{p}{q}$ und $\frac{r}{s}$ gleich oder grösser als 1 sind, sodass die Gerade $x = 0$ keine Tangente unserer Curven ist. Man bildet die Differenz $\tau - \tau'$, die $q\,s$ verschiedene Functionen von ξ darstellt. Bezeichnet man nun mit

$$\delta(\tau - \tau')$$

die Ordnung der infinitesimalen Grösse $\tau - \tau'$, aufgefasst als Function von ξ, so ist die Summe

---

*) Vergleiche Halphen, Bulletin de la Société mathématique, 1873. Im Jahre 1869 theilte Weierstrass mir in einem Gespräche denselben Satz mit.

$$\sum \delta(\tau - \tau')$$

eben die Anzahl der im Punkte $t = 0$, $x = 0$ vereinigten Schnittpunkte unserer beiden Curven."

Ist insbesondere $\frac{p}{q} \gtrless \frac{r}{s}$, z. B.

$$\frac{p}{q} < \frac{r}{s},$$

so ist $\delta(\tau - \tau') = \frac{p}{q}$, und

$$\sum \delta(\tau - \tau') = ps,$$

so dass ps die Zahl der vereinigten Schnittpunkte ist. Ist dagegen

$$\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$$

und ist dabei ε ein Maximumswerth der Grösse $\delta(\tau - \tau')$, so ist offenbar

$$\varepsilon q s$$

ein Maximumswerth für die Zahl der vereinigten Schnittpunkte.

Hat die eine oder beide Curven mehrere derartige Entwickelungen, so verbindet man jede Entwickelung der einen Curve mit jeder Entwickelung der zweiten Curve und summirt die hierdurch erhaltenen Zahlen.

26. Diese bekannte Theorie werden wir jetzt auf das im Anfang dieses Paragraphen gestellte Problem anwenden.

Sei $t = 0$ die unendlich entfernte Gerade, und sei $x = 0$, $t = 0$ ein gemeinsamer Punkt der festen und der beweglichen Curve. Dabei nehmen wir an, dass unsere Curven nicht von der Geraden $x = 0$ berührt werden. Sei

$$\tau = \sum A_k \xi^{\frac{p+k}{q}} \tag{8}$$

die Reihenentwicklung eines Zweiges der festen Curve, und sei

$$\tau = \sum B_i \xi^{\frac{r+i}{s}} \tag{9}$$

die Reihenentwickelung eines Zweiges der beweglichen Curve. Ist nun z. B.

$$\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$$

so ist nach dem Vorangehenden die Zahl der im Punkte $t = 0$, $x = 0$ vereinigten Schnittpunkte unserer Curve gleich

$$\Sigma ps,$$

wo das Summationszeichen sich darauf bezieht, dass jede Entwickelung der einen Curve mit jeder Entwickelung der zweiten Curve verbunden werden soll.

Ist dagegen

$$\frac{p}{q} = \frac{r}{s},^{*)}$$

so muss man in jedem einzelnen Falle eine gewisse Anzahl Glieder der Reihenentwickelungen (8) und (9) wirklich aufstellen und sodann die Formel

$$\Sigma\Sigma\,\delta(\tau - \tau')$$

anwenden. *Hierbei tritt, wie wir sogleich zeigen werden, der merkwürdige Umstand ein, dass man einen Maximalwerth der gesuchten Zahl a priori angeben kann.* Diess liegt darin, dass die Grössen B_i *variable* Parameter sind, indem die Entwickelung (9) eine variable Curve darstellt.

Seien $B_0' \ldots B_i' \ldots$ die Werthe dieser Parameter, die einer bestimmten Lage unserer beweglichen Curve entsprechen, und sei

$$\tau = \sum B_i' \xi^{\frac{r+i}{s}}$$

oder

$$\frac{t}{y} = \sum B_i' \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{r+i}{s}}$$

die entsprechende Entwickelung. Setzt man hier, indem man mit a und b unbestimmte Parameter bezeichnet, statt x und y bezüglich $x + at$, $y + bt$, so erhält man die Gleichung

$$\frac{t}{y+bt} = \sum B_i' \left(\frac{x+at}{y+bt}\right)^{\frac{r+i}{s}},$$

welche die allgemeine Lage unserer beweglichen Curve darstellt. Indem wir diese Entwickelung nach den gewöhnlichen Regeln auf die Form

$$\frac{t}{y} = \sum B_i \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{r+i}{s}}$$

bringen, erkennen wir, dass

$$B_0 = B_0', \quad B_1 = B_1' \ldots, \quad B_{r-s-1} = B'_{r-s-1}$$

sind; dagegen ist

$$B_{r-s} = B'_{r-s} + \frac{ar}{s} B_0'^{\,2},$$

so dass B_{r-s} und B'_{r-s}, für einen allgemeinen Werth von a, verschieden sind.

Hieraus geht hervor, dass die Zahl

$$\frac{2r-s}{s}$$

---

*) Wenn $\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$ ist, so ist

$$p = \lambda r, \quad q = \lambda s,$$

wo λ nicht gleich 1 zu sein braucht.

der Maximumswerth der Ordnung der infinitesimalen Grösse

$$\sum A_k \xi^{\frac{p+k}{q}} - \sum B_i \xi^{\frac{r+i}{s}}$$

ist, wenn $\frac{p}{q}$ gleich $\frac{r}{s}$ ist.

In Folge dessen haben die Curven (8) *und* (9), *wenn* $\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$ *ist, höchstens* $(2r-s)q$ *im Punkte* $t=0$, $x=0$ *vereinigte Schnittpunkte, die von den besprochenen Reihenentwickelungen herrühren.*

27. Wir werden jetzt *bis auf Weiteres* annehmen, dass eine jede unserer beiden Curven nur *eine* Reihenentwickelung im Punkte ($t=0$, $x=0$) besitzt. Alsdann schneidet die unendlich entfernte Gerade die feste Curve in p Punkten, die im Punkte ($t=0$, $x=0$) zusammengefallen sind. Ebenso schneidet jene Gerade die bewegliche Curve in r Punkten, die im Punkte ($t=0$, $x=0$) zusammengefallen sind. Da nun

$$\frac{r}{s} \geqq 1 \quad \text{und} \quad \frac{p}{q} \geqq 1$$

ist, und folglich auch

$$rp \geqq sp, \qquad rp \geqq rq,$$

so besteht, wenn $\frac{p}{q}$ und $\frac{r}{s}$ verschieden sind, der Satz:

Schneidet die unendlich entfernte Gerade die feste Curve in p im Punkte ($x=0$, $t=0$) zusammengefallenen Punkten, und die bewegliche Curve in r solchen Punkten, so ist rp ein Maximumswerth der in diesem Punkte vereinigten Schnittpunkte unserer Curven. Vorausgesetzt ist dabei, dass $\frac{p}{q}$ *und* $\frac{r}{s}$ *verschieden sind, ferner dass eine jede unserer Curven nur eine Reihenentwickelung im betreffenden Punkte besitzt.*

Sodann wenden wir uns zu dem Falle

$$\frac{p}{q} = \frac{r}{s}, \tag{10}$$

indem wir fortwährend annehmen, dass jede Curve nur eine Reihenentwickelung im betreffenden Punkte besitzt. Nach dem Vorangehenden ist

$$(2r-s)q$$

ein Maximumswerth der im Punkte ($t=0$, $x=0$) vereinigten Schnittpunkte unserer Curven. Ferner ist

$$\frac{r}{s} \geqq 1,$$

also kommt

$$(r-s)^2 \geqq 0,$$

und zugleich

$$r^2 \geqq (2r-s)s,$$

oder indem wir berücksichtigen, dass $\frac{r}{s} = \frac{p}{q}$ ist,

$$rp \gtreqless (2r-s)q.$$

Hiermit ist nachgewiesen, *dass der obenstehende Satz noch besteht, wenn die Exponenten* $\frac{r}{s}$ und $\frac{p}{q}$ *einander gleich sind.*

Lass uns jetzt voraussetzen, dass die feste Curve k Reihenentwickelungen im Punkte $(x=0, t=0)$ besitzt, und seien

$$\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2} \dots \frac{p_\varkappa}{q_\varkappa} \dots \frac{p_k}{q_k}$$

die entsprechenden Werthe des Exponenten $\frac{p}{q}$; wir nehmen ferner an, dass die bewegliche Curve j Reihenentwickelungen in demselben Punkte besitzt, und dass

$$\frac{r_1}{s_1}, \frac{r_2}{s_2} \dots \frac{r_i}{s_i} \dots \frac{r_j}{s_j}$$

die entsprechenden Werthe des Exponenten $\frac{r}{s}$ sind. Alsdann erkennt man, indem man je zwei solche Reihenentwickelungen verbindet, dass die Summe

$$\sum^i \sum^\varkappa r_i p_\varkappa = \left(\sum^i r_i\right)\left(\sum^\varkappa p_\varkappa\right)$$

der Maximumswerth der im Punkte $(x=0, t=0)$ vereinigten Schnittpunkte unserer Curven ist. Und da die feste Curve die unendlich entfernte Gerade in $p_1+p_2+\dots+p_k$ im Punkte $(x=0, t=0)$ zusammengefallenen Punkten schneidet, und ebenso die bewegliche Curve dieselbe Gerade in $r_1+r_2+\dots+r_j$ zusammengefallenen Punkten schneidet, so ergiebt sich ohne Beschränkung der Satz:

Satz 46. *Schneidet die unendlich entfernte Gerade die feste und die bewegliche Curve bezüglich in p und in r im Punkte $(x=0, t=0)$ zusammengefallenen Punkten, so ist pr ein Maximumswerth für die Zahl der in diesem Punkte vereinigten Schnittpunkte unserer beiden Curven.*

---

28. Im vorangehenden Paragraphen reducirten wir die Bestimmung der Ordnung einer Minimalfläche auf die Bestimmung der unendlich entfernten Schnittpunkte einer festen ebenen Curve mit einer beweglichen Curve derselben Ebene, auf welche alle mögliche Translationen ausgeführt werden. Und in den vorangehenden Nummern dieses Paragraphen zeigten wir, dass die Erledigung des reducirten Problems nur die Bestimmung einer gewissen Anzahl von Gliedern in den Reihenentwickelungen zweier auf der Fläche gelegener Minimalcurven verlangte.

In späteren Paragraphen werden wir vermöge dieser allgemeinen Theorie die Ordnung einer Reihe algebraischer Minimalflächen bestimmen.

Hier beschränken wir uns darauf zwei Formeln zu entwickeln, die uns nützlich sein werden, wenn wir später die schwierige Aufgabe angreifen, alle reellen Minimalflächen von gegebener Ordnung anzugeben.

Auf einer vorgelegten Minimalfläche wähle ich eine Minimalcurve jeder Schaar. Ich nehme an, dass diese beiden Curven *zusammen* die unendlich entfernte Ebene in g von einander verschiedenen Punkten schneiden. Unter diesen g Punkten, die $P_1, P_2, \ldots, P_g$ heissen mögen, gehören im Allgemeinen einige nur der einen Curve, einige nur der zweiten Curve an, und endlich können einige gleichzeitig beiden Curven angehören.

Im Punkte P_1 möge die erste Curve die unendlich entfernte Ebene in p_1 vereinigten Punkten treffen, im Punkte P_2 in p_2 vereinigten Punkten, u. s. w., und endlich in dem letzten Punkte P_g in p_g vereinigten Punkten. Dabei können unter den Zahlen $p_1, p_2, \ldots p_g$ einige gleich Null sein. Jedenfalls ist die Zahl

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_g = \sum_x p_x$$

die Ordnungszahl der Curve.

Dementsprechend möge die Minimalcurve der zweiten Schaar die unendlich entfernte Ebene überhaupt im Punkte P_x in π_x vereinigten Punkten treffen. Alsdann ist die Zahl

$$\pi_1 + \pi_2 + \cdots + \pi_g = \sum_x \pi_x$$

die Ordnungszahl der zweiten Curve.

Nehmen wir nun an, dass unsere Fläche keine Doppelfläche ist, (was wir übrigens schon implicite vorausgesetzt haben, indem wir von *zwei* Schaaren von Minimalcurven sprachen), so lehren unsere früheren Entwickelungen, dass die Zahl

$$\left(\sum_x p_x\right)\left(\sum_x \pi_x\right) - \sum p_x \pi_x$$

ein Minimumswerth der Ordnung unserer Fläche ist.

Ist die Fläche eine Doppelfläche, so ist $p_x = \pi_x$, und also ist

$$\frac{1}{2}\left(\left(\sum p_x\right)^2 - \sum p_x^2\right)$$

ein Minimumswerth für die Ordnung der betreffenden Fläche.

Ist unsere Fläche *reell* und dabei keine Doppelfläche, so sind die Minimalcurven der beiden Schaaren conjugirt, und daher von derselben Ordnung, so dass

$$\sum p_x = \sum \pi_x$$

ist. Also ist

$$\left(\sum p_x\right)^2 - \sum p_x \pi_x$$

ein Minimumswerth für die Ordnung der Fläche.

§ 8.

Minimalcurven, deren Developpable den Kugelkreis als einfachen Kegelschnitt enthalten.

Es ist möglich eine vollständige Theorie solcher Minimalcurven zu entwickeln, deren Developpable den Kugelkreis als *einfachen* Kegelschnitt enthalten. Hierauf begründen wir in einem späteren Paragraphen (§ 10.) u. A. eine Bestimmung und Discussion aller *reellen* Minimalflächen, deren Classenzahl eine beliebig vorgelegte Primzahl ist.

29. Wie wir in Nummer 10. sahen, bestimmen die Weierstrass'schen Formeln

$$
\begin{aligned}
x &= (1-s^2)F''(s) + 2sF'(s) - 2F(s),\\
y &= i(1+s^2)F''(s) - 2isF'(s) + 2iF(s),\\
z &= 2sF''(s) - 2F'(s),
\end{aligned}
\tag{1}
$$

in denen F eine arbiträre algebraische Function von s bezeichnet, eine jede algebraische Minimalcurve. Aus den entsprechenden Differentialgleichungen

$$
\begin{aligned}
dx &= (1-s^2)F'''(s),\\
dy &= i(1+s^2)F'''(s),\\
dz &= 2sF'''(s)
\end{aligned}
$$

folgt

$$dx : dy : dz = (1-s^2) : i(1+s^2) : 2s,$$

so dass die beiden Verhältnisse

$$\frac{dx}{dz},\ \frac{dy}{dz}$$

rationale Functionen von s sind. Andererseits ist

$$s = -\frac{dx}{dz} - i\frac{dy}{dz}$$

Hieraus fliesst einerseits, dass zu einem gegebenen Werthe des Parameters s eine bestimmte Richtung der Tangente der Minimalcurve gehört, andererseits dass einer gegebenen Tangentenrichtung ein ganz bestimmter Werth von s entspricht. Erinnern wir daher, dass die Tangenten einer Minimalcurve sämmtlich den Kugelkreis treffen, so können wir sagen:

Die verschiedenen Werthe des Parameters s sind den Punkten des Kugelkreises eindeutig zugeordnet. Giebt man in den Formeln (1) *der Grösse s einen gewissen Werth s_0, so erhält man denjenigen Punkt oder diejenigen Punkte der betreffenden Minimalcurve, deren Tangenten den Kugelkreis in dem zu s_0 gehörigen Punkte treffen.*

Lass uns jetzt voraussetzen, dass $F(s)$ eine *rationale* Function von s ist; alsdann sind auch x, y, z rationale Functionen von s. In diesem

Falle hat daher unsere Minimalcurve nur *eine* Tangente, die den Kugelkreis in einem vorgelegten Punkte schneidet. Der Kugelkreis ist daher ein *einfacher* Kegelschnitt auf der betreffenden Developpablen. Also:

Satz 47. *Ist $F(s)$ eine rationale Function von s, so bestimmen die Formeln* (1) *eine Minimalcurve, deren Developpable den Kugelkreis als einfachen Kegelschnitt enthält.*

Ist andererseits der Kugelkreis ein einfacher Kegelschnitt auf der Developpablen einer algebraischen Minimalcurve, so sind x, y, z rationale Functionen von s, und da wegen der Formeln (1)

$$F(s) = -\tfrac{1}{4}\left\{(1-s^2)x + i(1+s^2)y + 2sz\right\}$$

ist, so folgt, dass auch $F(s)$ eine rationale Function von s ist. Also:

Satz 48. *Man erhält eine jede algebraische Minimalcurve, deren Developpable den Kugelkreis als einfachen Kegelschnitt enthält, indem man in den Formeln* (1) *$F(s)$ eine rationale Function von s sein lässt.*

Um die zu einer beliebig vorgelegten rationalen Function F gehörige Minimalcurve zu discutiren, denken wir uns $F(s)$ zunächst in eine ganze Function $H(s)$ und in Ausdrücke der Form

$$\frac{A}{(s-a)^m}$$

zerlegt. Ist nun $H(s)$ von der dritten oder noch höheren Ordnung, so werden die durch die Formeln (1) bestimmten Ausdrücke der Grössen x, y, z *unendlich*, wenn man $s = \infty$ setzt. In diesem Falle giebt daher der Parameterwerth $s = \infty$ einen unendlich entfernten Punkt auf unserer Curve. Und da das Eintreten dieses Umstandes sich immer dadurch vermeiden lässt, dass man auf die Minimalcurve eine gewisse (reelle) Bewegung ausführt (welche keine Translation ist), so können wir uns auf den Fall, dass $H(s)$ von der nullten, ersten oder zweiten Ordnung ist, beschränken.

Bestimmt man auf der anderen Seite die beiden Minimalcurven, die zu *zwei* rationalen Functionen $F(s)$ und $F_1(s)$ gehören, deren Differenz eine ganze Function von der zweiten Ordnung ist, so erkennt man, dass die eine dieser Minimalcurven durch eine gewisse Translationsbewegung in die andere Minimalcurve übergehen kann. Hieraus ergiebt sich der Satz:

Satz 49. *Eine jede Minimalcurve, die der Hypothese $M = 1$ entspricht, kann in der Weise erhalten werden, dass man in den Formeln* (1) *statt $F(s)$ eine gewisse rationale Function von s setzt, deren Nenner von höherer Ordnung als der Zähler ist, und dass man darnach eine gewisse Bewegung auf die erhaltene Curve ausführt.*

30. Wir können daher voraussetzen, dass $F(s)$ die Form

$$F(s) = \sum_{k=1}^{k=q}\left\{\frac{A_{m_k}^{(k)}}{(s-a_k)^{m_k}} + \frac{A_{m_k-1}^{(k)}}{(s-a_k)^{m_k-1}} + \cdots + \frac{A_1^{(k)}}{(s-a_k)}\right\}$$

oder die äquivalente Form

$$(2) \qquad F(s) = \sum_{k=1}^{k=q} \sum_{j=1}^{j=m_k} \frac{A_j^{(k)}}{(s-a_k)^j}$$

besitzt. Man findet

$$F'(s) = \sum^k \sum^j \frac{-jA_j^{(k)}}{(s-a_k)^{j+1}},$$

$$F''(s) = \sum^k \sum^j \frac{j(j+1)A_j^{(k)}}{(s-a_k)^{j+2}}.$$

Durch Einsetzung in (1) erhalten x, y, z die Form

$$\frac{h_{m_1+m_2+\cdots+m_q+2q-1}}{(s-a_1)^{m_1+2}(s-a_2)^{m_2+2}\cdots(s-a_q)^{m_q+2}}$$

wo der Index die Ordnung des Zählers angiebt. Insbesondere ist

$$z = \sum^k \sum^j 2j\,\frac{(j+2)s-a_k}{(s-a_k)^{j+2}} = \frac{k_{m_1+m_2+\cdots+m_q+2q-2}}{(s-a_1)^{m_1+2}\cdots(s-a_q)^{m_q+2}}.$$

Wir werden zeigen, dass der Zähler

$$k_{m_1+m_2+\cdots+m_q+2q-2}$$

sich nicht mit einigen der Factoren des Nenners verkürzen lässt. Lass uns in der That voraussetzen, dass eine Verkürzung z. B. mit $s-a_1$ möglich wäre, sodass z die Form

$$z = \frac{k_{m_1+\cdots+m_q+2q-3}}{(s-a_1)^{m_1+1}(s-a_2)^{m_2+2}\cdots(s-a_q)^{m_q+2}}$$

besässe. Alsdann bestände eine Relation der Form

$$2m_1\,\frac{(m_1+2)s-a_1}{(s-a_1)^{m_1+2}} = \frac{k_{m_1+\cdots+m_q+2q-3}}{(s-a_1)^{m_1+1}(s-a_2)^{m_2+2}\cdots(s-a_q)^{m_q+2}}$$

$$-\sum_{j=1}^{j=m_1-1} 2j\,\frac{s(j+2)-a_1}{(s-a_1)^{j+2}} - \sum_{k=2}^{k=q}\sum_{j=1}^{j=m_k} 2j\,\frac{s(j+2)-a_k}{(s-a_k)^{j+2}},$$

wo die Grösse $s-a_1$ in dem Nenner links in der Potenz $(s-a_1)^{m_1+2}$ auftritt, während sie in den Nennern rechts nur in niedrigeren Potenzen vorkäme. Und da der Zähler links sich nicht mit $s-a_1$ verkürzen lässt, so ist unsere frühere Annahme unmöglich. Folglich ist der Nenner von z von der Ordnung

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_q + 2q,$$

während der Zähler von z eine niedrigere Ordnung besitzt. Und da nach dem Vorangehenden auch nicht die Nenner und Zähler der Grössen x und y von höherer Ordnung als der Nenner von z sind, ergiebt sich, dass die Ordnung unserer Curve gleich $\Sigma m_k + 2q$ ist. Ferner ist klar, dass nur die Parameterwerthe $s = a_k$ unendlich entfernte Punkte unserer Curve liefern. Die unendlich entfernte Ebene schneidet unsere Curve in q verschiedenen Punkten, die sämmtlich auf dem Kugelkreise gelegen sind. In jedem Punkte $s = a_k$ fallen $m_k + 2$ Schnittpunkte zwischen der Curve und der unendlich entfernten Ebene zusammen. In jedem solchen Schnittpunkte ist, wie ich beiläufig bemerke, die unendlich entfernte Ebene Osculationsebene der Curve. Also:

Satz 50. *Hat $F(s)$ die Form (2), so ist die Ordnung der entsprechenden Minimalcurve gleich*

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_q + 2q.$$

Sie trifft die unendlich entfernte Ebene in q verschiedenen Punkten (die sämmtlich auf dem Kugelkreise liegen) und zwar liegen im ersten Punkte $m_1 + 2$ Schnittpunkte der Curve und der Ebene vereinigt, im zweiten liegen $m_2 + 2$ Schnittpunkte vereinigt u. s. w.

31. Jetzt werden wir den Rang unserer Minimalcurve bestimmen. Die Gleichungen

$$x' = x + \varepsilon \frac{dx}{ds},$$

$$y' = y + \varepsilon \frac{dy}{ds},$$

$$z' = z + \varepsilon \frac{dz}{ds},$$

in denen x, y, z Coordinaten eines Punktes der Minimalcurve sind, während ε einen variablen Parameter darstellt, bestimmen sämmtliche Punkte x', y', z', die auf einer Tangente der Curve gelegen sind. Fasst man sowohl s wie ε als variable Parameter auf, so bestimmen unsere Gleichungen alle Punkte, die auf der Developpablen der Minimalcurve gelegen sind. Die Schnittpunkte der Developpablen mit der Geraden

$$\text{(3)} \qquad \begin{cases} Ax' + By' + C = 0, \\ Lx' + Mz' + N = 0 \end{cases}$$

sind daher bestimmt durch die Gleichungen

$$\text{(4)} \qquad \begin{cases} Ax + By + C + \varepsilon\left(A\frac{dx}{ds} + B\frac{dy}{ds}\right) = 0, \\ Lx + Mz + N + \varepsilon\left(L\frac{dx}{ds} + M\frac{dz}{ds}\right) = 0, \end{cases}$$

aus denen folgt

$$\text{(5)} \qquad \begin{aligned} &(Ax+By+C)\left(L\frac{dx}{ds} + M\frac{dz}{ds}\right) \\ &-(Lx+Mz+N)\left(A\frac{dx}{ds} + B\frac{dy}{ds}\right) = 0. \end{aligned}$$

Wir setzen voraus, dass die Constanten A, B, C, L, M, N allgemeine Werthe haben. Alsdann ist der Rang der Curve, oder was auf dasselbe hinauskommt, die Ordnung der Developpablen gleich der Anzahl der Schnittpunkte zwischen der Developpablen und der Geraden (3).

Da die Gerade eine allgemeine Lage hat, können wir annehmen, dass sie nicht mit einer Tangente der Curve parallel ist, woraus hervorgeht, dass die Gleichungen

$$A\frac{dx}{ds}+B\frac{dy}{ds}=0,\quad L\frac{dx}{ds}+M\frac{dz}{ds}=0$$

nur unter der Voraussetzung gleichzeitig bestehen können, dass gleichzeitig

$$\frac{dx}{ds}=0,\quad \frac{dy}{ds}=0,\quad \frac{dz}{ds}=0,$$

das heisst, dass gleichzeitig

$$F'''(s)=0$$

ist.

Ist nun x', y', z' ein (im endlichen Raume gelegener) Schnittpunkt, so geht durch denselben eine bestimmte Tangente, deren Berührungspunkt x, y, z einem bestimmten Werthe s_0 von s entspricht. Und da für diesen Berührungspunkt die Grössen

$$\frac{dx}{ds},\quad \frac{dy}{ds},\quad \frac{dz}{ds}$$

von Null verschieden sind, indem sonst die Gerade (3) eine particuläre Lage hätte, so geben die Gleichungen (4) einen endlichen Werth der Grösse ε. Ebenso ist klar, dass s_0 von ∞ verschieden ist, indem sonst die Gerade (3) eine specielle Lage hätte. Hieraus ergiebt sich, *dass jeder Schnittpunkt der Developpablen mit der Geraden* (3) *allgemeiner Lage ein endliches Werthsystem s, ε liefert, welches die Gleichungen* (4) *befriedigt.*

Lass uns andererseits voraussetzen, dass die Gleichungen (4) und also zugleich die Gleichung (5) durch ein endliches Werthsystem ε, s befriedigt werden. Alsdann sind die entsprechenden Werthe von x, y, z, $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$ endlich,*) und also liefern die Coordinatenwerthe

$$x+\varepsilon\frac{dx}{ds},\quad y+\varepsilon\frac{dy}{ds},\quad z+\varepsilon\frac{dz}{ds}$$

einen im endlichen Raume gelegenen Schnittpunkt zwischen der Developpablen und der Geraden.

Es fragt sich, ob jeder endliche Werth von s, der die Gleichung (5) befriedigt, zugleich einen endlichen Werth von ε liefert.

Der betreffende Werth von ε ist endlich, ausgenommen, wenn die beiden Gleichungen

*) Dies beruht darauf, dass keine unter den Grössen $a_1, a_2, \ldots, a_q$ für allgemeine Werthe der Grössen A, B, C, L, M, N die Gleichung (5) befriedigt, wie in der nächsten Nummer nachgewiesen wird.

$$A\,\frac{dx}{ds}+B\,\frac{dy}{ds}=0,$$
$$L\,\frac{dx}{ds}+M\,\frac{dz}{ds}=0$$

bestehen, das heisst nach dem Vorangehenden, wenn

$$F'''(s)=0$$

ist. Unter den Lösungen der Gleichung (5) müssen also diejenigen als uneigentlich ausgeschlossen werden, welche zugleich $F'''(s)=0$ ergeben. Also:

Satz 51. *Der Rang unserer Minimalcurve ist gleich der Zahl der verschiedenen Werthe von s, welche die Gleichung* (5) *befriedigen, und welche nicht gleichzeitig $F'''(s)=0$ erfüllen.*

32. Die Gleichung (5) kann auch folgendermassen geschrieben werden

$$\begin{aligned}(6)\qquad & AM(xdz-zdx)+BL(ydx-xdy)+BM(ydz-zdy)\\ & +(CL-AN)dx+CM\,dz-BN\,dy=0.\end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned}xdz-zdx &= (2s^2+2)F'F'''-4sFF''',\\ ydx-xdy &= -4isF'F'''+4iFF''',\\ ydz-zdy &= (-2s^2+2)iF'F'''+4isFF''',\\ dx=(1-s^2)F''',\quad & dy=i(1+s^2)F''',\quad dz=2sF'''.\end{aligned}$$

Daher ist F''' ein Factor der linken Seite der Gleichung (6), und nach dem letzten Satze kann dieser Factor weggelassen werden.

Es ist (Nr. 30.)

$$F(s)=\sum_k\sum_j\frac{A_j^{(k)}}{(s-a_k)^j},$$
$$F'(s)=\sum_k\sum_j\frac{-jA_j^{(k)}}{(s-a_k)^{j+1}},$$
$$F''(s)=\sum_k\sum_j\frac{j(j+1)A_j^{(k)}}{(s-a_k)^{j+2}}.$$

Also nimmt die Gleichung (6) nach der Weglassung des Factors F''' die Form an:

$$\begin{aligned}(7)\qquad & AM\left\{(2s^2+2)\sum_k\sum_j\frac{-jA_j^{(k)}}{(s-a_k)^{j+1}}-4s\sum_k\sum_j\frac{A_j^{(k)}}{(s-a_k)^j}\right\}\\ & +BL\left\{-4is\sum_k\sum_j\frac{-jA_j^{(k)}}{(s-a_k)^{j+1}}+4i\sum_k\sum_j\frac{A_j^{(k)}}{(s-a_k)^j}\right\}\\ & +BM\left\{(-2s^2+2)i\sum_k\sum_j\frac{-jA_j^{(k)}}{(s-a_k)^{j+1}}+4is\sum_k\sum_j\frac{A_j^{(k)}}{(s-a_k)^j}\right\}\\ & +(CL-AN)(1-s^2)+CM\cdot 2s-BNi(1+s^2)=0.\end{aligned}$$

Durch Zusammenziehung erhält die linke Seite folgende Gestalt:

$$\frac{h_{m_1+m_2+\cdots+m_q+q+2}}{(s-a_1)^{m_1+1}(s-a_2)^{m_2+1}\cdots(s-a_q)^{m_q+1}},$$

wo der Zähler eine ganze Function von der Ordnung $\Sigma m_k + q + 2$ ist. Und da der Zähler für allgemeine Werthe der Grössen A, B, L, M sich nicht mit $s - a_1$, $s - a_2 \ldots$ oder $s - a_q$ verkürzen lässt, indem die Grössen

$$s^2 + 1, \quad s \text{ und } -s^2 + 1$$

nicht gleichzeitig mit einer Grösse $s - a_k$ dividirbar sind, *so hat die Gleichung* (7) $\Sigma m_k + q + 2$ *Wurzeln.* Unter diesen Wurzeln findet sich eo ipso keine Grösse $a_1, a_2 \ldots a_q$. Also ergiebt sich der Satz:

Satz 52. *Der Rang unserer Minimalcurven ist gleich*

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_q + q + 2.$$

[Bei dem Beweise dieses Satzes haben wir vorausgesetzt, dass die Gleichung

$$(Ax+By+C)\left(L\frac{dx}{ds}+M\frac{dz}{ds}\right)-(Lx+Mz+N)\left(A\frac{dx}{ds}+B\frac{dy}{ds}\right)=0$$

keine gleichen Wurzeln besitzt. Ich werde andeuten, wie man dies beweist. Die gleichen Wurzeln, die möglicherweise existiren, befriedigen zugleich die durch Differentiation hervorgehende Gleichung

$$(Ax+By+C)\left(L\frac{d^2x}{ds^2}+M\frac{d^2z}{ds^2}\right)-(Lx+Mz+N)\left(A\frac{d^2x}{ds^2}+B\frac{d^2y}{ds^2}\right)=0,$$

woraus:

$$\frac{L\frac{dx}{ds}+M\frac{dz}{ds}}{L\frac{d^2x}{ds^2}+M\frac{d^2z}{ds^2}}=\frac{A\frac{dx}{ds}+B\frac{dy}{ds}}{A\frac{d^2x}{ds^2}+B\frac{d^2y}{ds^2}}.$$

Diese Gleichung erhält durch Ausmultipliciren die Form:

$$AM\left(\frac{dx}{ds}\frac{d^2z}{ds^2}-\frac{dz}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}\right)+BL\left(\frac{dy}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}-\frac{dx}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}\right)-BM\left(\frac{dz}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}-\frac{dy}{ds}\frac{d^2z}{ds^2}\right)=0,$$

woraus durch eine geometrische Ueberlegung hervorgeht, dass die Gerade (3) jedesmal die Developpable der Minimalcurve berührt, wenn die Gleichung (5) eine mehrfache Wurzel besitzt. Und da dies durch die allgemeine Lage der Geraden (3) ausgeschlossen ist, folgt, dass gleiche Wurzeln nicht auftreten können].

33. [Es ist sehr leicht die *Classe* einer Minimalcurve, die der Hypothese $M = 1$ entspricht, zu bestimmen. Diess soll jetzt gezeigt werden, obgleich diese Bestimmung für das Folgende unwesentlich ist.

Die Gleichung der Osculationsebene

$$(x'-x)(dz\,d^2y-dy\,d^2z)+(y'-y)(dx\,d^2z-dz\,d^2x)$$
$$+(z'-z)(dy\,d^2x-dx\,d^2y)=0$$

nimmt durch Ausführung und Weglassung des unwesentlichen Factors F'''^2 die Form an:

$$(1-s^2)x' + i(1+s^2)y' + 2sz' = 4F(s)$$

wo x', y', z' die Coordinaten eines laufenden Punktes der Osculationsebene sind. Und da

$$F(s) = \sum_{k=1}^{k=q} \sum_{j=1}^{j=m_k} \frac{A_j^{(k)}}{(s-a_k)^j}$$

ist, so folgt, dass die Osculationsebenen, die durch einen beliebig vorgelegten Punkt gehen, durch eine Gleichung von der $(m_1 + \cdots + m_q + 2)^{\text{ten}}$ Ordnung bestimmt sind. Hieraus folgt:

Satz 53. *Die Classe unserer Minimalcurve ist gleich*

$$m_1 + \cdots + m_q + 2.$$

Bezeichne ich die Ordnung, die Classe und den Rang unserer Minimalcurve bezüglich mit O, C und R, so ist also:

$$O = m_1 + \cdots + m_q + 2q,$$
$$C = m_1 + \cdots + m_q + 2,$$
$$R = m_1 + \cdots + m_q + q + 2.$$

Hieraus ergiebt sich *die Relation*

$$O + C - 2R + 2 = 0,$$

die für jede Minimalcurve besteht, deren Developpable den Kugelkreis als einfachen Kegelschnitt enthält. Merkwürdig ist dabei, wie ich beiläufig bemerke, dass diese *Relation bei einer Transformation durch reciproke Radien ungeändert bleibt.*

Hier möge auch die Bemerkung ihren Platz finden, dass die im endlichen Raume gelegenen Spitzen und Inflexionstangenten einer jeden Minimalcurve bezüglich durch die Gleichungen

$$F'''(s) = 0 \quad \text{und} \quad F'''(s) = \infty$$

bestimmt werden. Ist jedoch $M = 1$, so hat die Curve keine Inflexionstangenten, deren Berührungspunkt im endlichen Raume gelegen ist.

Die in diesem Paragraphen gegebene Bestimmung der Ordnung, der Classe und des Ranges einer Minimalcurve, die der Hypothese $M = 1$ entspricht, fand ich ursprünglich durch einfache synthetische Betrachtungen, indem ich nämlich *den Einfluss eines jeden unendlich entfernten Punktes*, der nur von der zugehörigen Reihenentwickelung abhängt, bestimmte. Eine ähnliche Discussion giebt die Bestimmung der genannten charakteristischen Zahlen einer ganz beliebigen Minimalcurve.] *)

*) Die Classe einer Minimalcurve ist immer gleich der Multiplicität der unendlich entfernten Ebene als Osculationsebene plus der zweifachen Multiplicität des Kugelkreises auf die betreffenden Developpablen.

§ 9.

Bestimmung aller sich selbst conjugirter Minimalcurven, die der Annahme $M = 1$ entsprechen.

Ich werde zeigen, dass es möglich ist, alle sich selbst conjugirten Minimalcurven, die der Annahme $M = 1$ entsprechen, zu bestimmen. Hieraus ergiebt sich sodann im nächsten Paragraphen *unmittelbar* die Bestimmung aller reellen Minimalflächen, deren Classenzahl eine beliebig vorgelegte Primzahl ist.

34. Setzt man in den Weierstrass'schen Formeln einer Minimalcurve

$$x = (1-s^2)F'' + 2sF' - 2F,$$
$$y = i(1+s^2)F'' - 2isF' + 2iF,$$
$$z = 2sF'' - 2F'$$

und den entsprechenden Differentialgleichungen

$$dx = (1-s^2)F''', \quad dy = i(1+s^2)F''', \quad dz = 2sF'''$$

einmal

(1) $$s = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

ein andermal

$$s = -\frac{1}{r}(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

so erhält man bekanntlich auf der Curve zwei Punkte, deren Tangenten conjugirte Richtungen haben.

Ich werde annehmen, dass die Hypothese $F = \Phi(s)$ eine sich selbst conjugirte Minimalcurve, und ebenso dass die Annahme $F = \Psi(s)$ eine andere sich selbst conjugirte Curve giebt. Bezeichne ich dann mit λ eine beliebige *reelle* Constante, so ist vermöge der vorangehenden Bemerkung leicht zu erkennen, dass auch die Annahme $F = \Phi + \lambda\Psi$ eine sich selbst conjugirte Curve liefert.

Insbesondere giebt die Function $\Phi - \Psi$ eine sich selbst conjugirte Curve.

Hiermit verbinden wir die folgende Bemerkung.

Nach dem Vorangehenden wird jede sich selbst conjugirte Minimalcurve, die der Annahme $M = 1$ entspricht, erhalten, wenn als $F(s)$ eine gewisse Function der Form

$$\sum^k \sum^j \frac{A_j^{(k)}}{(s-a_k)^j} + Ls^2 + Ms + N$$

gewählt wird. Nun aber wissen wir einerseits, *dass die unendlich entfernten Punkte* einer sich selbst conjugirten Curve *paarweise conjugirt sind*, andererseits, dass die unendlich entfernten Punkte unserer Curve auf dem Kugelkreise in den Punkten $s = a_k$ liegen. *Hieraus folgt, dass die Punkte $s = a_k$ paarweise conjugirt sind.*

Seien überhaupt $s = a_k$ und $s = \alpha_k$ zwei conjugirte Punkte des Kugelkreises und seien

$$a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_g, \quad \alpha_1,\, \alpha_2,\, \ldots\, \alpha_g$$

die unendlich entfernten Punkte unserer Curve. Die zugehörige Function F_0 besitzt dann also die Form:

$$F_0(s) = \sum_{k=1}^{k=g} \sum_{j=1}^{j=m_k} \left\{ \frac{A_j^{(k)}}{(s-a_k)^j} + \frac{B_j^{(k)}}{(s-\alpha_k)^j} \right\} + Ls^2 + Ms + N,$$

wo $(s-a_k)$ und $(s-\alpha_k)$ *in gleich hohen Potenzen auftreten.*

35. Nach diesen Vorbereitungen betrachte ich die Minimalcurve, die zu der Function

$$F_1(s) = \sum_{k=1}^{k=g} \sum_{j=1}^{j=m_k} \frac{A_j^{(k)}}{(s-a_k)^j}$$

gehört, und zugleich die conjugirte Minimalcurve, deren charakteristische Function $F_2(s)$ die Form

$$F_2(s) = \sum_{k=1}^{k=g} \sum_{j=1}^{j=m_k} \frac{C_j^{(k)}}{(s-\alpha_k)^j} + Ps^2 + Qs + R$$

besitzt. Setze ich dann

$$F_1 + F_2 = F_3,$$

so ist die zu F_3 gehörige Minimalcurve sich selbst conjugirt. Andererseits ist auch die zu F_0 gehörige Minimalcurve sich selbst conjugirt. Also ist auch die zu $F_0 - F_3$ gehörige Minimalcurve sich selbst conjugirt. Nun aber besitzt $F_0 - F_3$ die Form

$$F_0 - F_3 = \sum_{k=1}^{k=g} \sum_{j=1}^{j=m_k} \frac{B_j^{(k)} - C_j^{(k)}}{(s-\alpha_k)^j} + (L-P)s^2 + (M-Q)s + (N-R),$$

und da die Punkte des Kugelkreises, die den Parameterwerthen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_g$ entsprechen, nicht paarweise conjugirt sind, ergiebt sich, dass *die Zähler der Grössen* $(s-\alpha_k)^j$ *sämmtlich verschwinden:*

$$B_j^{(k)} - C_j^{(k)} = 0.$$

In Folge dessen reducirt sich die zu $F_0 - F_3$ gehörige, sich selbst conjugirte Minimalcurve auf den *Punkt*

$$\begin{aligned} x_0 &= 2(L-P) - 2(N-R), \\ y_0 &= 2i(L-P) + 2i(N-R), \\ z_0 &= -\,2(M-Q), \end{aligned}$$

der *reell* sein muss. Die Grössen L, M, N sind also durch die Grössen P, Q, R bis auf *drei arbiträre reelle* Constanten x_0, y_0, z_0 bestimmt. Dass diese drei Constanten *arbiträr* sind, liegt darin, dass eine sich selbst conjugirte Curve durch eine jede *reelle* Translation sich selbst conjugirt bleibt.

Setzt man diese arbiträren reellen Constanten x_0, y_0, z_0, wie man ohne wesentliche Beschränkung thun kann, sämmtlich gleich Null, so kommt

$$L = P, \quad N = R, \quad M = Q.$$

Das Obenstehende fassen wir folgendermassen zusammen.

Satz 54. *Man findet eine jede sich selbst conjugirte Minimalcurve, die der Annahme $M = 1$ entspricht, folgendermassen. Auf dem Kugelkreise wählt man eine beliebige Anzahl von Punkten $a_1, a_2, \ldots, a_g$, unter denen keine zwei conjugirt sind, und bildet dann, indem man mit $m_1, m_2, \ldots, m_g$ beliebige positive ganze Zahlen, mit $A_j^{(k)}$ arbiträre Constanten bezeichnet, den Ausdruck:*

$$\Phi_1 = \sum_{k=1}^{k=g} \sum_{j=1}^{j=m_k} \frac{A_j^{(k)}}{(s-a_k)^j}.$$

Man bestimmt die zugehörige Minimalcurve, ferner die conjugirte Minimalcurve und endlich die zu der letzten Curve gehörige charakteristische Function

$$\Phi_2 = \sum_{k=1}^{k=g} \sum_{j=1}^{j=m_k} \frac{B_j^{(k)}}{(s-a_k)^j} + Ps^2 + Qs + R.$$

Alsdann ist die der Function $\Phi_1 + \Phi_2$ entsprechende Minimalcurve immer sich selbst conjugirt.

Die Bestimmung der Constanten $B_j^{(k)}$, P, Q und R verlangt die Auflösung eines Systems linearer Gleichungen, *und kann daher in jedem einzelnen Falle ausgeführt werden.*

36. Unsere früheren Formeln für die Ordnung, die Classe und den Rang einer Minimalcurve, die der Annahme $M = 1$ entspricht, geben für die sich selbst conjugirten Curven die folgenden Relationen:

$$O = 2(m_1 + \cdots + m_g) + 4g,$$
$$R = 2(m_1 + \cdots + m_g) + 2g + 2,$$
$$C = 2(m_1 + \cdots + m_g) + 2,$$

sodass die Ordnung, die Classe und der Rang in diesem Falle sämmtlich gerade Zahlen sind.*)

Wünscht man nun z. B. *alle* Minimalcurven der betreffenden Art, deren Rang gleich einer beliebigen geraden Zahl 2ω ist, zu finden, so muss man zunächst die Gleichung

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_g + g + 1 = \omega$$

*) Es ist übrigens leicht zu erkennen, dass diese Zahlen für eine *jede* sich selbst conjugirte Minimalcurve gerade sind.

auf alle möglichen Weisen in *ganzen positiven* Zahlen auflösen. Sodann verfährt man nach den Regeln des letzten Satzes. Also:

Satz 55. *Es ist immer möglich, alle sich selbst conjugirten Minimalcurven von gegebenem Range, die der Annahme $M = 1$ entsprechen, zu bestimmen.*

§ 10.

Bestimmung aller reellen Minimalflächen, deren Classenzahl eine beliebige vorgelegte Primzahl ist.

Die vorangehenden Entwickelungen erlauben alle reellen Minimalflächen, deren Classenzahl eine beliebige vorgelegte *Primzahl* π ist, zu finden.

37. Die Classe einer reellen Minimalfläche, die keine Doppelfläche ist (§ 5.), wird gegeben durch die Formel

$$2M(R-M),$$

während die Classe einer Doppelfläche (§ 5.) gleich

$$M(R-M)$$

ist. Da nun die Primzahl π, die grösser als 2 sein muss, eine ungerade Zahl ist, so muss die Fläche eine Doppelfläche sein. Also:

Satz 56. *Eine jede reelle Minimalfläche, deren Classe eine ungerade Zahl ist, muss eine Doppelfläche sein. Dies ist insbesondere der Fall bei jeder reellen Minimalfläche, deren Classe eine Primzahl ist.*

Es handelt sich also darum, die Gleichung

$$M(R-M) = \pi$$

in allgemeinster Weise zu befriedigen, derart, dass die betreffende Minimalcurve sich selbst conjugirt ist. Da π eine Primzahl ist, und $R - M$ nach einem früheren Satze nicht gleich 1 sein kann, folgt

$$M = 1, \quad R - M = \pi,$$

und

$$R = \pi + 1,$$

wo $\pi + 1$ offenbar eine gerade Zahl ist. Andererseits fanden wir in dem vorangehenden Paragraphen die Formel

$$R = 2(m_1 + \cdots + m_g) + 2g + 2.$$

Also kommt

$$\frac{\pi+1}{2} = m_1 + \cdots + m_g + g + 1,$$

welche Gleichung man in allgemeinster Weise befriedigen muss.

Jedem Systeme ganzzahliger Lösungen dieser Gleichung entspricht nach dem vorangehenden Paragraphen eine sich selbst conjugirte Minimalcurve, die

$$g + m_1 + \cdots + m_g = \frac{R-2}{2} = \frac{\pi-1}{2}$$

arbiträre Constanten*) enthält. Die zugehörige reelle Minimalfläche ist von der π^{ten} Classe. Und in dieser Weise werden alle derartige Flächen bestimmt. Also:

Satz 57. *Um alle reellen Minimalflächen zu finden, deren Classe gleich einer gewissen Primzahl π ist, sucht man nach den Regeln des vorangehenden Paragraphen alle sich selbst conjugirten Minimalcurven, deren Rang gleich $\pi + 1$ ist, und welche dabei der Annahme $M = 1$ entsprechen. Die zugehörigen Minimalflächen sind von der π^{ten} Classe.*

38. Als Beispiel werden wir zeigen, wie man alle reellen Minimalflächen der dreizehnten Classe bestimmen kann.

Man soll die Gleichung

$$\frac{13+1}{2} = 7 = m_1 + m_2 + \cdots + m_g + g + 1$$

oder die äquivalente Gleichung

$$6 = m_1 + m_2 + \cdots + m_g + g$$

in allgemeinster Weise durch ganze Zahlen befriedigen. Die folgenden Möglichkeiten können eintreten:

1) $g = 1, \quad m_1 = 5,$
2) $g = 2, \quad m_1 = 3, \quad m_2 = 1,$
3) $g = 2, \quad m_1 = 2, \quad m_2 = 2,$
4) $g = 3, \quad m_1 = 1, \quad m_2 = 1, \quad m_3 = 1.$

Es giebt daher vier verschiedene Arten reeller Minimalflächen der dreizehnten Classe. Die Flächen der ersten Art werden erhalten, wenn man setzt

$$F(s) = \frac{A_5}{(s-a)^5} + \frac{A_4}{(s-a)^4} + \cdots + \frac{A_1}{(s-a)}$$
$$+ \frac{B_5}{(s-\alpha)^5} + \frac{B_4}{(s-\alpha)^4} + \cdots + \frac{B_1}{s-\alpha};$$

die Constanten $A_1, A_2, \ldots, A_5$ und a sind arbiträr, dagegen sind $B_1, B_2, \ldots, B_5$ und α eindeutig bestimmt, wenn die sechs ersten Constanten gewählt sind. Man findet die B_k und α nach den früheren Regeln.

2) Die Minimalflächen der zweiten Art werden erhalten, wenn man setzt

*) Diese arbiträren Constanten sind complexe Grössen und sind daher der doppelten Anzahl reeller Constanten äquivalent. Durch eine zweckmässige reelle Rotation der Minimalcurve liessen sich noch drei reelle Constanten entfernen, endlich könnte eine vierte reelle Constante durch eine reelle Aehnlichkeitstransformation weggeschafft werden.

$$F(s)=\frac{A_3}{(s-a_1)^3}+\frac{A_2}{(s-a_1)^2}+\frac{A_1}{s-a_1}+\frac{B_1}{s-a_2}$$
$$+\frac{C_3}{(s-\alpha_1)^3}+\frac{C_2}{(s-\alpha_2)^2}+\frac{C_1}{s-\alpha_1}+\frac{D_1}{s-\alpha_2}.$$

Hier sind A_1, A_2, A_3, B_1, a_1 und a_2 arbiträre Constanten, während die übrigen Constanten eindeutig bestimmt sind, wenn jene gewählt sind.

3) Die Flächen der dritten Art erhält man, wenn man setzt

$$F(s)=\frac{A_2}{(s-a_1)^2}+\frac{A_1}{s-a_1}+\frac{B_2}{(s-a_2)^2}+\frac{B_1}{s-a_2}$$
$$+\frac{C_2}{(s-\alpha_1)^2}+\frac{C_1}{s-\alpha_1}+\frac{D_2}{(s-\alpha_2)^2}+\frac{D_1}{s-a_2},$$

darnach A_1, A_2, B_1, B_2, a_1 und a_2 arbiträr wählt, und endlich die übrigen Constanten wie früher bestimmt.

4) Endlich die Flächen der vierten Art erhält man, indem man setzt

$$F(s)=\frac{A}{s-a_1}+\frac{B}{s-a_2}+\frac{C}{s-a_3}$$
$$+\frac{D}{s-\alpha_1}+\frac{E}{s-\alpha_2}+\frac{F}{s-\alpha_3},$$

darnach A, B, C, a_1, a_2 und a_3 arbiträr wählt, und endlich die übrigen Constanten passend bestimmt.

Es giebt daher vier Arten reeller Minimalflächen dreizehnter Classe. Betrachtet man ähnliche Flächen als identisch, so hängen die Flächen jeder Art von acht reellen Constanten ab.

§ 11.

Bestimmung reeller Minimalflächen von beliebig gegebener Classe.

Verlangt man, dass die Classe einer reellen Minimalfläche gleich einer vorgelegten Zahl, die keine Primzahl ist, sein soll, so ist die Bestimmung der betreffenden Flächen mir nur in den einfacheren Fällen gelungen, und ich vermuthe sogar, dass eine allgemeine Erledigung dieses Problems sich nicht geben lässt. Doch scheinen mir die nachstehenden Entwickelungen bemerkenswerth zu sein.

39. Ich will zunächst versuchen alle reellen Minimalflächen gegebener Classe, *die keine Doppelflächen sind*, zu bestimmen. Die Classe einer solchen Fläche ist gegeben durch

$$2M(R-M),$$

woraus hervorgeht, dass die Classe immer gerade und dabei gleich oder grösser als sechs ist.

1) Die Hypothese

$$2M(R-M)=6$$

giebt

$$M=1,\quad R=4.$$

Nun aber ist

$$R = m_1 + \cdots + m_q + q + 2,$$

also ist

$$q = 1, \quad m_1 = 1,$$

und es wird

$$F(s) = \frac{A}{s-a}.$$

Die entsprechende Minimalcurve ist von der dritten Ordnung; dieselbe hat nur einen unendlich entfernten Punkt; daher hat sie keinen unendlich entfernten Punkt mit der conjugirten Minimalcurve gemein. Die zugehörige Minimalfläche ist somit (§ 6. und 7.) von der neunten Ordnung. Dies ist die von Herrn Enneper entdeckte Minimalfläche neunter Ordnung, sechster Classe.

2) Die Hypothese

$$2M(R-M) = 8$$

giebt

$$M = 1, \quad R = 5,$$

und da

$$R = m_1 + \cdots + m_q + q + 2,$$

so folgt

$$q = 1, \quad m_1 = 2,$$

woraus

$$F(s) = \frac{A}{(s-a)^2} + \frac{B}{s-a}.$$

Die Ordnung dieser Minimalcurve ist gleich $m_1 + 2q = 4$, sie schneidet die unendlich entfernte Ebene nur in einem Punkte. Die Ordnung der zugehörigen Minimalfläche ist sechszehn.

3) Die Hypothese

$$2M(R-M) = 10$$

wird befriedigt in zwei Weisen. Entweder ist

$$M = 1, \quad R = 6, \quad q = 1, \quad m_1 = 3, \quad O = 5,$$

so dass:

$$F(s) = \frac{A}{(s-a)^3} + \frac{B}{(s-a)^2} + \frac{C}{s-a}.$$

Da die Minimalcurve nur *einen* unendlich entfernten Punkt besitzt, so ist die Ordnung der betreffenden Minimalfläche gleich 25.

Oder auch, es ist

$$M = 1, \quad R = 6, \quad q = 2, \quad m_1 = m_2 = 1, \quad O = 6,$$

dabei ist die Classe der Curve gleich $m_1 + m_2 + 2 = 4$. Da die Minimalcurve zwei unendlich entfernte Punkte besitzt, so sind zwei Fälle denkbar. Entweder sind diese Punkte nicht conjugirte Punkte, dann ist die Ordnung der Fläche gleich 36. Oder auch, sie sind conjugirte Punkte, dann ist die Ordnung der Fläche gleich 30, 28 oder 26.

4) Die Hypothese

$$2M(R-M)=12$$

wird befriedigt durch

$$M=1,\quad R=7,\quad q=1,\quad m_1=4,\quad O=6,$$

die Ordnung der Fläche ist gleich 36. Oder auch, es ist

$$M=1,\quad R=7,\quad q=2,\quad m_1=2,\quad m_2=1,\quad O=7;$$

die Ordnung der Fläche ist, jenachdem die beiden unendlich entfernten Punkte nicht conjugirt, oder conjugirt sind, entweder 49 oder 43. Endlich kann

$$M=2,\quad R=5$$

sein. Es giebt bekanntlich eine Minimalcurve, deren Rang fünf ist, auf deren Developpable der Kugelkreis ein zweifacher Kegelschnitt ist. Die Ordnung dieser Curve ist vier, sie enthält zwei unendlich entfernte Punkte. Haben dieselben eine allgemeine Lage, so ist die Ordnung der Fläche gleich 16; sind sie dagegen conjugirt, so ist die Ordnung der Fläche gleich 12.

5) Die Hypothese

$$2M(R-M)=14$$

giebt jedenfalls

$$M=1,\quad R=8.$$

Dabei können vier Unterfälle eintreten:

$$\begin{array}{ll}
\text{a)} & q=1,\quad m_1=5,\quad O=7,\\
\text{b)} & q=2,\quad m_1=3,\quad m_2=1,\quad O=8,\\
\text{c)} & q=2,\quad m_1=2,\quad m_2=2,\quad O=8,\\
\text{d)} & q=3,\quad m_1=m_2=m_3=1,\quad O=9.
\end{array}$$

Im Falle a ist die Ordnung der Fläche gleich 49; im Falle b entweder 64 oder 58; im Falle c entweder 64, 56, 54, 52 oder 50; endlich im Falle d entweder 81, 75, 73 oder 71.

6) Die Hypothese

$$2M(R-M)=16$$

giebt entweder

$$M=1,\quad R=9,$$

in welchem Falle vier leicht bestimmbare Unterfälle eintreten können. Oder auch es ist

$$M=2,\quad R=6.$$

Im nächsten Paragraphen werden wir zeigen, dass es nur zwei Minimalcurven vom Range 6 giebt, deren Developpable den Kugelkreis zweifach enthält. Die eine Curve, die von der fünften Ordnung ist, osculirt die unendlich entfernte Ebene in einem Punkte und schneidet sie in zwei anderen Punkten. Die entsprechende Minimalfläche ist von der

25^{ten} oder 23^{ten} Ordnung. — Die zweite Curve ist von der sechsten Ordnung. Sie hat zwei unendlich entfernte Spitzen, deren Tangenten den Kugelkreis berühren. Die entsprechende Minimalfläche ist von der 36^{ten}, 30^{ten} oder 28^{ten} Ordnung.

7) Die Hypothese

$$2M(R-M) = 18$$

giebt entweder

$$M = 1, \quad R = 10,$$

welcher Fall wie gewöhnlich discutirt wird. Oder auch, es ist

$$M = 3, \quad R = 6.$$

Es fragt sich, ob eine solche Minimalcurve existirt. Ist dies der Fall, so könnte man sie, durch eine Transformation durch reciproke Radien, deren Pol auf der Curve liegt, in eine neue Minimalcurve, deren Rang (§ 5.) gleich

$$2(R-M) - 2 = 4$$

ist, überführen. Die neue Minimalcurve würde dann von der dritten Ordnung sein. Führt man andererseits eine Transformation durch reciproke Radien auf eine Minimalcurve dritter Ordnung aus, so erhält man eine Minimalcurve vierter Ordnung, vom Range 6, von sechster Classe. Dabei ist $M = 3$. Die Curve schneidet die unendlich entfernte Ebene in vier verschiedenen Punkten. Die zugehörige Minimalfläche ist von der Ordnung 12, 14 oder 16 (siehe den nächsten Paragraphen).

8) Die Hypothese

$$2M(R-M) = 20$$

giebt entweder

$$M = 1, \quad R = 11,$$

welcher Fall wie gewöhnlich erledigt wird, oder auch

$$M = 2, \quad R = 7,$$

und da Schwarz alle Curven vom Range 7 bestimmt hat, wird es wohl nicht schwierig sein, durch Verfolgung seiner Betrachtungen die Hypothese $M = 2$, $R = 7$ in allgemeinster Weise zu erfüllen. Einen anderen Weg zur Erledigung dieser Frage gebe ich später an.

Die Hypothese

$$2M(R-M) = 22$$

giebt mit Nothwendigkeit

$$M = 1, \quad R = 12;$$

die entsprechenden Flächen werden wie gewöhnlich bestimmt.

Soll endlich

$$2M(R-M) = 24$$

sein, so sind die folgenden Fälle denkbar:

$$\begin{aligned} &\text{a)}\quad M = 1, \quad R = 13, \\ &\text{b)}\quad M = 2, \quad R = 8, \\ &\text{c)}\quad M = 3, \quad R = 7, \\ &\text{d)}\quad M = 4, \quad R = 7. \end{aligned}$$

Es ist leicht nachzuweisen, dass die Fälle a, b und c wirklich Minimalflächen geben. Dagegen kann der letzte Fall nicht eintreten; denn es besteht (§ 8.) allgemein die Formel

$$R = 2M + N,$$

wo N die Multiplicität der unendlich entfernten Ebene als Osculationsebene bezeichnet. Und in Folge dessen ist die Zahl $R - 2M$ nie negativ.

40. Jetzt werden wir versuchen *reelle* Minimalflächen von gegebener Classe unter der beschränkenden Voraussetzung, dass die betreffenden Flächen *Doppelflächen* sind, zu bestimmen.

Die Classe einer solchen Fläche ist gegeben durch die Formel

$$M(R - M).$$

1) Die Hypothese

$$M(R - M) = 3$$

würde geben

$$M = 1, \quad R = 4, \quad O = 3.$$

Es giebt aber keine sich selbst conjugirte Minimalcurve dritter Ordnung*), da jede Minimalcurve 3. O. nur einen unendlich entfernten Punkt besitzt. Es giebt also keine reelle Doppelfläche dritter Classe.

2) Die Hypothese

$$M(R - M) = 4$$

giebt

$$M = 1, \quad R = 5.$$

Nun aber wissen wir, dass der Rang einer jeden sich selbst conjugirten Minimalcurve, die der Annahme $M = 1$ entspricht, eine *gerade* Zahl (§ 9.) ist. Daher giebt es keine Doppelfläche vierter Classe.

3) Die Hypothese

$$M(R - M) = 5$$

giebt

$$M = 1, \quad R = 6,$$

und da (§ 9.)

$$R = 2(m_1 + \cdots + m_g) + 2g + 2$$

ist, so folgt

$$g = 1, \quad m_1 = 1.$$

$$F(s) = \frac{A}{s - a} + \frac{B}{s - b}.$$

---

*) Allgemeiner könnte man sagen: Es giebt keine sich selbst conjugirte Minimalcurve, deren Ordnung eine *ungerade* Zahl ist.

Die Ordnung und Classe der betreffenden Curve sind bezüglich gleich 6 und 4. Die Ordnung der Fläche ist (§ 6., 7.) gleich

$$\frac{36-2\cdot 3}{2}=15.$$

Diese Fläche ist von Henneberg entdeckt worden. Nach meinen früheren Entwickelungen müssen a und b conjugirte Punkte des Kugelkreises sein. A kann arbiträr gewählt werden; hinterher wird B nach meinen früheren Regeln bestimmt. Betrachtet man ähnliche Flächen als identisch, so enthält die vorliegende Fläche *gar keine Constante,* wie die Entwickelungen in Nummer 37. zeigen.

4) Die Hypothese

$$M(R-M)=6$$

wird nicht durch die Annahme

$$M=1,\quad R=7$$

erfüllt, da R eine gerade Zahl sein soll. Es bleibt also nur die Annahme

$$M=2,\quad R=5,$$

die aus demselben Grunde keine sich selbst conjugirte Minimalcurve geben kann.*) Es giebt daher keine reelle Doppelfläche sechster Classe.

5) Die Hypothese

$$M(R-M)=7$$

giebt

$$M=1,\quad R=8$$

und

$$R=8=2(m_1+\cdots+m_g)+2g+2,$$

woraus

$$g=1,\quad m_1=2$$

und

$$F(s)=\frac{A}{(s-a)^2}+\frac{B}{s-a}+\frac{C}{(s-\alpha)^2}+\frac{D}{s-\alpha}.$$

Hier sind A, B und a arbiträr, dagegen C, D und α bestimmt. Betrachtet man ähnliche Flächen als identisch, so enthält die Fläche noch zwei reelle Constanten. Die Ordnung der betreffenden Minimalcurve ist 8; die Ordnung der Fläche ist gleich

$$\frac{64-2\cdot 4}{2}=28.$$

6) Die Hypothese

$$M(R-M)=8$$

wird nicht befriedigt durch die Annahme

*) Man könnte die Ueberlegung auch in mehr specieller Form durchführen: Es giebt allerdings eine Minimalcurve vom Range 5 mit zwei unendlich entfernten Punkten. Da aber diese Punkte ungleichartig sind, kann die Curve nicht sich selbst conjugirt sein.

$$M = 1, \quad R = 9,$$

da R keine ungerade Zahl sein darf. Es bleibt noch die Hypothese

$$M = 2, \quad R = 6.$$

Nun habe ich mich allerdings überzeugt, dass es eine Doppelfläche achter Classe giebt, die dieser Annahme entspricht; es ist mir aber nicht gelungen zu entscheiden, ob diese Fläche *reell* sein kann. Ist dies möglich, so muss die Ordnung der betreffenden Fläche gleich

$$\frac{36 - 2 \cdot 4 - 2 \cdot 3}{2} = 11$$

sein*).

7) Die Hypothese

$$M(R - M) = 9$$

wird befriedigt durch

$$M = 1, \quad R = 10,$$

woraus entweder folgt

$$g = 1, \quad m_1 = 3,$$

oder auch

$$g = 2, \quad m_1 = m_2 = 1,$$

so dass es jedenfalls zwei verschiedene Arten reeller Doppelflächen neunter Classe giebt. Man hat ferner die Hypothese

$$M = 3, \quad R = 6,$$

die ich noch nicht erledigt habe. Ich habe allerdings gefunden, dass es eine Doppelfläche 9^{ter} Classe, 6^{ter} Ordnung giebt; ich weiss aber nicht, ob diese Fläche *reell* sein kann. (Vergl. die beiden folgenden Paragraphen.)

§ 11.

Eine polare Beziehung zwischen zwei Liniencomplexen.

41. Bei den Untersuchungen über Minimalcurven, die, wie ich zeigte, für die Theorie der algebraischen Minimalflächen von grösster Wichtigkeit sind, stützt man sich häufig vortheilhaft auf einen Zusammenhang zwischen allen Minimalcurven und allen Curven, deren Tangenten einem linearen Liniencomplexe angehören. In einer liniengeometrischen Abhandlung (Ueber Complexe ⋯ Math. Ann. Bd. V.) habe ich diesen Zusammenhang, der durch eine eigenthümliche Abbildung vermittelt wird, schon ziemlich ausführlich besprochen. Hier werde ich denselben etwas näher verfolgen.

Interpretirt man in den Gleichungen

$$-Zz = x - (X + iY),$$
$$(Z - iY)z = y - Z$$

X, Y, Z und x, y, z als Cartesische Punktcoordinaten zweier Räume,

*) Ich finde nachträglich, dass diese Fläche nie reell ist [Nr. 78].

so werden den Punkten x, y, z diejenigen Geraden im Raum X, Y, Z zugeordnet, die den Kugelkreis schneiden. Auf der anderen Seite werden den Punkten X, Y, Z alle Geraden eines gewissen linearen Complexes im Raume x, y, z zugeordnet. Schreibt man die Gleichungen der geraden Linien im Raume x, y, z folgendermassen

$$rz = x - \varrho, \quad sz = y - \sigma,$$

so ist

$$r + \sigma = 0$$

die Gleichung in Liniencoordinaten des besprochenen linearen Complexes.

Jede Curve, deren Tangenten diesem linearen Complexe gehören, wird durch meine Abbildung einer Minimalcurve im Raume X, Y, Z zugeordnet.

Bei der Abbildung ist der Kugelkreis ein Fundamentalgebilde im Raume X, Y, Z. Im Raume x, y, z tritt die unendlich entfernte Gerade der xy-Ebene als Fundamentalgebilde auf. Diese Gerade möge mit g bezeichnet werden.

Es bestehen jetzt mehrere Relationen zwischen den charakteristischen Zahlen zweier entsprechenden Curven. Wir werden diejenigen dieser Relationen, die wir später brauchen, entwickeln.

Es sei k eine Curve, deren Tangenten dem linearen Complexe angehören; sei o ihre Ordnung, c ihre Classe, r ihr Rang, m die Multiplicität der Geraden g als Tangente*), i die Zahl der Inflexionstangenten, die g nicht schneiden, s die Zahl der Spitzen, deren Tangente g nicht schneidet. Endlich möge μ die Anzahl derjenigen Schnittpunkte zwischen der Curve und einer beliebigen durch g gehenden Ebene sein, die auf g liegen.

Sei andererseits K die entsprechende Minimalcurve im Raume X, Y, Z. Sei O ihre Ordnung, C ihre Classe, R ihr Rang, M die Multiplicität des Kugelkreises auf der Developpablen, J die Zahl der Inflexionstangenten, deren Berührungspunkt nicht unendlich entfernt ist, S die Zahl der Spitzen, die nicht auf dem Kugelkreise liegen.

42. Wir werden einige zwischen diesen Zahlen bestehende Relationen entwickeln.

1) Wir nehmen einen Punkt des Kugelkreises, der nicht auf K liegt. In diesem Punkte legen wir eine beliebige Tangentenebene an den Kugelkreis. Diese Ebene schneidet K in O im endlichen Raume gelegenen Punkten. Andererseits enthält diese Ebene einfach unendlich

*) Bestimmter ausgesprochen soll m folgendermassen definirt werden. Eine Gerade allgemeiner Lage im Raume x, y, z schneidet die Developpable unserer Curve in r Punkten; begegnet sie insbesondere der Fundamentalgeraden g, so giebt es unter den r Schnittpunkten eine gewisse Anzahl, die in den Schnittpunkt der beiden Geraden zusammengefallen sind. Diese Anzahl bezeichne ich mit m.

viele Minimalgeraden, deren Bildpunkte x, y, z eine gerade Linie γ erzeugen, die g schneidet. Nun aber trifft γ ausser g eine gewisse Anzahl und zwar $r - m$ Tangenten der Curve k. Die Bildpunkte dieser Tangenten sind die früher besprochenen O Punkte im Raume X, Y, Z; daher ist

$$O = r - m.$$

2) Ich schneide die Developpable der Minimalcurve mit einer beliebigen Minimalgeraden, und erhalte $R - M$ im endlichen Raume gelegene Schnittpunkte. Die Punkte unserer Geraden geben im Raume x, y, z einfach unendlich viele Complexlinien, die einen ebenen Büschel bilden. Unter diesen Complexlinien giebt es o, welche die Curve k treffen. Nun aber sind die $R - M$ Schnittpunkte in (X, Y, Z) die Bildpunkte von den soeben besprochenen o Complexlinien. Also kommt

$$o = R - M.$$

3) Eine durch g gehende Ebene schneidet die Curve k in $o - \mu$ Punkten, die nicht auf g liegen. Nun aber sind überhaupt die Punkte unserer Ebene Bildpunkte aller Minimalgeraden, die durch einen gemeinsamen Punkt des Kugelkreises gehen. Daher sind die besprochenen $o - \mu$ Punkte die Bildpunkte derjenigen Tangenten der Curve K, die durch den besprochenen Punkt des Kugelkreises gehen. Und da es jedesmal M Tangenten giebt, die einen Punkt des Kugelkreises treffen, so ist

$$M = o - \mu.$$

[Früher haben wir schon benutzt, dass jede Ebene, die den Kugelkreis berührt, aufgefasst als von Minimalgeraden erzeugt, im Raume x, y, z eine Gerade γ liefert, die g schneidet; und zwar ist γ eine Complexlinie. Diese Bemerkung giebt eine Relation zur Bestimmung der Classe unserer Minimalcurve. Die Osculationsebenen der Minimalcurve berühren nämlich den Kugelkreis, und liefern daher Complexlinien γ, die g schneiden. Daher liefern die durch einen Punkt gehenden Osculationsebenen der Minimalcurve diejenigen Linien des linearen Complexes, die gleichzeitig die Curve k, die Gerade g und ausserdem noch eine Complexlinie schneiden. Die Classe der Minimalcurve ist daher gleich der Zahl der Schnittpunkte zwischen der Curve k und derjenigen Fläche zweiten Grades, deren Erzeugende Complexlinien sind, welche ausser g noch eine Complexlinie schneiden; vorausgesetzt wird dabei, dass von den auf g gelegenen Schnittpunkten abgesehen wird. Diese Methode hängt genau zusammen mit unserer früheren Formel

$$C = 2M + N,$$

wo N die Multiplicität der unendlich entfernten Ebene als Osculationsebene der Minimalcurve bezeichnet. Hier möge noch das Folgende, dessen Richtigkeit später nachgewiesen wird, zugefügt sein. Berührt k die Gerade g, so osculirt die Minimalcurve die unendlich entfernte Ebene. Ist g eine gewöhnliche Inflexionstangente, so ist die unendlich entfernte Ebene eine zweifach zählende Osculationsebene der Minimalcurve. Schneidet k die Gerade g ohne sie zu berühren, so hat die Minimalcurve eine Spitze auf dem Kugelkreise, die Tangente der Spitze ist zugleich die Tangente des Kugelkreises.]

Man sieht leicht, dass

$$i = S, \quad J = s$$

ist.

[Beiläufig möge bemerkt werden, dass die in § 8. gefundene Relation

$$O + C - 2R + 2 = 0,$$

die für eine ausgedehnte Kategorie von Minimalcurven bewiesen wurde, für die entsprechenden Complexcurven die noch einfachere Relation

$$r - 2o + 2 = 0$$

liefert. Die betreffenden Complexcurven sind dadurch charakterisirt, dass sie eine gewisse Complexlinie in $o - 1$ Punkten treffen.]

---

43. Ich werde nun diese Abbildung auf die einfachsten Minimalcurven anwenden.

Ich nehme im Raume x, y, z eine Raumcurve 3. O., deren Tangenten dem linearen Complexe gehören, dabei setze ich voraus, dass die Curve die Gerade g berührt. Also ist

$$o = 3, \quad r = 4, \quad m = 1, \quad \mu = 2, \quad i = 0, \quad s = 0;$$

dementsprechend ist

$$M = 1, \quad O = 3, \quad R = 4, \quad J = 0, \quad S = 0.$$

Diese Formeln zeigen, dass es eine Minimalcurve 3. O. giebt, deren Developpable den Kugelkreis als einfachen Kegelschnitt enthält. Der Rang derselben ist gleich 4. Dies ist bekanntlich richtig. Wir erkennen ferner, dass die Berührung zwischen g und der Complexcurve 3 O. eine Osculirung der Minimalcurve mit der unendlich entfernten Ebene giebt. Hieraus folgt der allgemeine Satz, dass *eine jede Complexcurve, die g berührt, eine Minimalcurve liefert, die die unendlich entfernte Ebene osculirt.*

Sei andererseits gegeben eine Complexcurve 3. O., die g schneidet. Alsdann ist

$$o = 3, \quad r = 4, \quad m = 0, \quad \mu = 1, \quad i = 0, \quad s = 0;$$

dementsprechend ist

$$M = 2, \quad O = 4, \quad R = 5, \quad J = 0, \quad S = 0.$$

Und es giebt in der That eine Minimalcurve vierter Ordnung und vom Range 5, die den Kugelkreis zweifach enthält. Diese Curve hat bekanntlich keine im endlichen Raume gelegene Spitze, auch keine Inflexionstangente, deren Berührungspunkt im endlichen Raume liegt. Dagegen hat unsere Curve, wie ich als bekannt voraussetzen darf, eine unendlich entfernte Spitze, deren Tangente den Kugelkreis berührt. Hieraus folgt, *dass jede Complexcurve, die g schneidet, ohne jedoch diese Gerade zu berühren, eine Minimalcurve mit einer unendlich entfernten Spitze liefert. Die Tangente der Spitze berührt den Kugelkreis.*

Die Gerade g berührt die Developpable in einem Punkte, der als Schnittpunkt dreifach zählt; daher schneidet g die Developpable in noch einem Punkte. Die hindurchgehende Erzeugende bildet sich im Raume (X, Y, Z) ab als einen unendlich entfernten Punkt der Minimalcurve. Und da die Spitze als drei zusammengefallene unendlich entfernte Punkte zählt, so folgt, dass der soeben gefundene unendlich entfernte Punkt nur einfach zählt. Hieraus fliesst der allgemeine Satz: *Die unendlich entfernten Punkte einer Minimalcurve entsprechen bei unserer Abbildung denjenigen Erzeugenden der Complexcurve, die g schneiden. Eine Erzeugende, deren Berührungspunkt nicht auf g liegt, giebt einen einfach zählenden unendlich entfernten Punkt auf der Minimalcurve.*

Lass uns endlich die Complexcurve 3. O. allgemeiner Lage betrachten. Es ist dann

$$o = 3, \quad r = 4, \quad m = 0, \quad \mu = 0, \quad i = 0, \quad s = 0$$

und also kommt

$$M = 3, \quad O = 4, \quad R = 6, \quad J = 0, \quad S = 0.$$

Hiermit erkennen wir die Existenz einer Minimalcurve vierter Ordnung, vom Range 6, *die den Kugelkreis dreifach enthält*)*. Die Gerade g schneidet die Developpable der vorgelegten Minimalcurve in vier verschiedenen Punkten; dementsprechend hat unsere Minimalcurve 4. O. vier verschiedene unendlich entfernte Punkte. Die Classe dieser Minimalcurve ist gleich 6.

44. Ich wende mich nun zur Betrachtung von Curven 4. O., deren Tangenten unserem linearen Complexe gehören, um später die entsprechenden Minimalcurven zu untersuchen. Der Kürze wegen brauche ich wie früher das Wort *Complexcurve* um eine Curve, deren Tangenten dem linearen Complexe angehören, zu bezeichnen.

---

*) Dieser Specialfall der Curven 4. O. zweiter Gattung scheint zuerst von mir bemerkt worden zu sein.

Eine Complexcurve 4. O. kann bekanntlich nicht auf *zwei* Flächen zweiter Ordnung liegen*). Hieraus folgt, dass die Punkte einer solchen Curve sich *eindeutig* auf die Punkte einer Geraden beziehen lassen. Dieses vorausgesetzt, denke ich mir in einem beliebigen Punkte p der Curve die zugehörige Osculationsebene construirt. Dieselbe schneidet die Curve ausser in p nur noch in einem anderen Punkte π. Hiermit ist eine eindeutige Zuordnung je zweier Punkte der Curve festgestellt. Und da die Curve vom Geschlechte Null ist, können wir schliessen**), dass es jedenfalls einen Punkt p_0 giebt, dessen zugeordnete Punkt π_0 mit p_0 zusammenfällt. In diesem Punkte schneidet die Osculationsebene die Curve in *vier* zusammengefallenen Punkten. Und also ist entweder die Osculationsebene eine stationäre Ebene, und gleichzeitig der betreffende Punkt ein stationärer Punkt; oder auch die zugehörige Tangente ist eine stationäre Tangente.

Jedenfalls ist klar, dass eine jede Ebene, die durch die Tangente im Punkte p_0 hindurchgeht, die Curve ausser in p_0 nur noch in *einem* Punkte schneidet.

Dieses vorausgesetzt werde ich der Complexcurve 4. O. eine solche Lage geben, dass die Gerade g die Curve im Punkte p_0 berührt. Es ist***)

$$o = 4, \quad r = 6, \quad \mu = 3.$$

Hieraus folgt

$$M = 1. \quad R = 5.$$

Die erhaltene Minimalcurve ist daher die bekannte Curve 4. O. vom Range 5, die eine Spitze enthält.

Es ist leicht die Darstellung dieser Curve vermöge der *Weierstrass'schen* Formeln zu finden; denn es ist (Nr. 33.)

$$O = m_1 + \cdots + m_q + 2q,$$
$$R = m_1 + \cdots + m_q + q + 2$$

woraus

$$4 = m_1 + \cdots + m_q + 2q,$$
$$5 = m_1 + \cdots + m_q + q + 2$$

und durch Elimination

$$q = 1, \quad m_1 = 2,$$

---

*) Die Curven 4. O., die auf *zwei* Flächen zweiten Grades liegen, sind, wenn ich nicht irre, genau untersucht. Dagegen sind die Specialfälle der übrigen Curven 4. O. noch nicht eingehend genug betrachtet worden.

**) Man nehme eine feste Gerade γ, die die Curve in drei Punkten schneidet, und construire die Ebenen γp und $\gamma \pi$; dieselben bilden eine *Involution* mit *zwei* Doppelelementen. Die Gerade $p\pi$ ist nämlich eine Complexlinie.

***) Der Rang einer *allgemeinen* Curve 4. O., die nur auf *einer* Fläche zweiter Ordnung liegt, ist 6. Der Rang einer speciellen Curve dieser Art kann bekanntlich nicht gleich 5 oder 4 sein.

so dass

$$F(s) = \frac{A}{(s-\alpha)^2} + \frac{B}{s-\alpha}$$

wird. Diese Minimalcurve hat eine unendlich entfernte stationäre Ebene; dementsprechend ist im Raume des linearen Complexes die Gerade g eine Inflexionstangente der Complexcurve 4. O. Dass diese Curve noch eine Inflexionstangente besitzt, geht daraus hervor, dass die Minimalcurve eine im endlichen Raume gelegene Spitze besitzt.

In dieser Weise finden wir den folgenden Satz, der möglicherweise einen kleinen Beitrag zur Theorie der Raumcurven 4. O. liefert:

*Es giebt nur eine Curve vierter Ordnung, deren Tangenten einem linearen Complexe gehören. Dieselbe besitzt zwei Inflexionstangenten**).

Auf diese Weise habe ich bekannte Eigenschaften einer Minimalcurve zur Auffindung von Eigenschaften der entsprechenden Complexcurve verwerthet. Jetzt werde ich, indem ich der gefundenen Complexcurve eine *neue Lage* gebe, aus ihren bekannten Eigenschaften die charakteristischen Zahlen derjenigen Minimalcurve, die der neuen Lage entspricht, herleiten.

Lass mich zunächst annehmen, dass die Gerade g eine gewöhnliche Tangente der Complexcurve 4. O. ist. Alsdann ist

$$o = 4, \quad r = 6, \quad m = 1, \quad \mu = 2, \quad i = 2, \quad s = 0;$$

also kommt

$$M = 2, \quad R = 6, \quad O = 5, \quad S = 2, \quad J = 0.$$

Die Gerade g trifft zwei Erzeugende der Complexcurve; dementsprechend erkennen wir, dass die Minimalcurve zwei einfach zählende unendlich entfernte Punkte besitzt; ausserdem osculirt sie die unendlich entfernte Ebene in einem Punkte.

Lass mich ferner annehmen, dass die Complexcurve 4. O. die Gerade g in *zwei* verschiedenen Punkten schneidet, was nach dem Vorangehenden denkbar ist. Alsdann ist

$$o = 4, \quad r = 6, \quad m = 0, \quad \mu = 2, \quad i = 2, \quad s = 0$$

und folglich wird

$$M = 2, \quad R = 6, \quad O = 6, \quad S = 2, \quad J = 0.$$

Die Gerade g trifft die Developpable nur in den beiden Punkten der Complexcurve. Dementsprechend hat die Minimalcurve nur zwei unendlich entfernte Punkte, welche alle beide Spitzen sind, deren Tangenten den Kugelkreis berühren (Nr. 43.).

---

*) Diese Curve, welche ich im Jahre 1870 eben in dieser Weise fand, war schon früher von Cayley und Cremona betrachtet worden.

Wir können sodann annehmen, dass die Gerade g die Complexcurve nur in einem Punkte schneidet, alsdann ist

$$o = 4, \quad r = 6, \quad m = 0, \quad \mu = 1, \quad s = 0, \quad i = 2 \text{ (oder } i = 1),$$

woraus

$$M = 3, \quad R = 7, \quad O = 6, \quad J = 0, \quad S = 2 \text{ (oder } S = 1).$$

Endlich können wir annehmen, dass die Gerade g die Complexcurve g gar nicht schneidet, dabei ist denkbar, dass doch noch die eine oder beide Inflexionstangenten die Gerade g treffen. Es ist leicht, die charakteristischen Zahlen der drei betreffenden Minimalcurven anzugeben.

45. Die vorangehenden Entwickelungen erlauben u. A. die allgemeinsten Minimalcurven, die den Annahmen

$$M = 2, \quad R = 6$$

oder

$$M = 3, \quad R = 7$$

oder endlich

$$M = 4, \quad R = 8$$

entsprechen, anzugeben. Denn es wird jedenfalls

$$R - M = 4 = o,$$

sodass die entsprechende Curve im linearen Complexe von der vierten Ordnung ist. Und wir haben soeben die allgemeinste Complexcurve vierter Ordnung bestimmt. Soll insbesondere

$$M = 2, \quad R = 6$$

sein, so kommt, da $o = 4$ ist,

$$\mu = 2.$$

Diese Relation kann aber nur in zwei Weisen erfüllt werden. Entweder ist g eine gewöhnliche Tangente der Curve oder auch, es schneidet g die Curve in zwei verschiedenen Punkten. Die beiden entsprechenden Minimalcurven sind früher discutirt worden. —

Ich erinnere zum Schlusse noch an Folgendes. Wird der Raum x, y, z linear transformirt, und geht dabei unser linearer Complex in sich über, so wird nach meinen Untersuchungen (Ueber Complexe, Math. Ann. Bd. V.) der Punktraum X, Y, Z *conform* transformirt.

§ 12.

Bestimmung reeller Minimalflächen von gegebener Ordnung.

Das Problem, alle reelle Minimalflächen von gegebener Ordnung zu bestimmen, ist im Allgemeinen mit bedeutenden Schwierigkeiten verknüpft. Doch ist seine Erledigung mir in mehreren speciellen

Fällen gelungen. Und ich vermuthe, dass der von mir eingeschlagene Weg noch weiter führen kann. Wie bei den entsprechenden Untersuchungen über Minimalflächen gegebener *Classe* betrachte ich die zweierlei Arten von Minimalflächen für sich.

46. Zuerst werde ich suchen reelle Minimalflächen gegebener Ordnung zu bestimmen, indem *ich die Doppelflächen ausschliesse.*

Ich wähle (vergl. Nummer 28.) auf einer reellen Minimalfläche, die keine Doppelfläche ist, eine Minimalcurve jeder Schaar. Der Inbegriff dieser beiden Curven schneidet die unendlich entfernte Ebene in einer geraden Anzahl von Punkten, die paarweise conjugirte Punkte des Kugelkreises sind. Seien

$$P_1 \ldots P_q, \quad \Pi_1 \ldots \Pi_q$$

diese Punkte und seien P_k und Π_k jedesmal conjugirte Punkte. Ich setze voraus, dass für die eine Curve jeder Punkt P_k als p_k-facher Schnittpunkt mit der unendlich entfernten Ebene zählt, und dass ebenso für dieselbe Curve jeder Punkt Π_k als π_k-facher Schnittpunkt zählt. Alsdann zählen die Punkte P_k und Π_k für die zweite Curve bezüglich als π_k-facher und p_k-facher Schnittpunkt.

Die Ordnung einer jeden auf unserer Fläche gelegenen Minimalcurve allgemeiner Lage ist gleich

$$\sum p_k + \sum \pi_k .$$

Die Ordnung der Fläche ist nach unseren früheren Untersuchungen (§ 6. und 7.) jedenfalls nicht kleiner als

$$\left(\sum p_k + \sum \pi_k\right)^2 - 2 \sum p_k \pi_k$$

und also auch nicht kleiner als

$$\sum p_k^2 + \sum \pi_k^2 .$$

Ich kann ohne Beschränkung annehmen, dass $p_1\, p_2 \ldots p_q$ sämmtlich grösser als Null sind, während einige unter den Zahlen $\pi_1\, \pi_2 \ldots \pi_q$ im Allgemeinen gleich Null sind. Ich nehme ferner an, dass jede Zahl p_k gleich oder grösser als π_k ist, und endlich dass p_k gleich oder grösser als p_{k+1} ist.

47. Es ist jetzt leicht alle reellen Minimalflächen, deren Ordnung nicht grösser als 16 ist, und welche dabei keine Doppelflächen sind, zu bestimmen. Zunächst zeige ich, dass es keine derartige Fläche giebt, deren Ordnung kleiner als 9 ist.

Existirte eine Fläche, deren Ordnung O' kleiner als 9 wäre, so müsste, da

$$O' \geqq \sum p_k^2 + \sum \pi_k^2 \tag{1}$$

ist, p_1 kleiner als 3 sein. Sei nun zunächst

$$p_1 = 2, \quad \pi_1 = 2.$$

Ist dabei p_2 grösser als Null, so müsste wegen der Formel

$$O' \gtreqless \left(\sum p_k + \sum \pi_k\right)^2 - 2 \sum p_k \pi_k \tag{2}$$

die Ordnung der Fläche jedenfalls gleich 17 sein. Es bleibt also nur die Hypothese $p_2 = 0$ zu untersuchen. Es lässt sich aber nachweisen, dass es keine Minimalcurve 4. O. giebt, die die unendlich entfernte Ebene in zwei distincten, doppeltzählenden Punkten schneidet. Denn es giebt keine derartige Minimalcurve 4. O., die auf *zwei* Flächen zweiter Ordnung liegt. Und die Minimalcurven 4. O., die nur auf *einer* Fläche zweiter Ordnung liegen, und welche dabei bekanntlich vom Range 6 sind, entsprechen nothwendig, da $R - M > 3$ ist, einer der folgenden Annahmen

$$\begin{aligned} M &= 1, \quad R = 6, \quad O = 4, \\ M &= 2, \quad R = 6, \quad O = 4, \\ M &= 3, \quad R = 6, \quad O = 4, \end{aligned}$$

unter denen die erste unmöglich ist, indem die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} m_1 + \cdots + m_q + q + 2 &= R = 6, \\ m_1 + \cdots + m_q + 2q \quad &= O = 4 \end{aligned}$$

die unmögliche Relation $q = 0$ nach sich ziehen würden. Die zweite Annahme (vergl. Nummer 44.) giebt

$$R - M = 4 = o, \quad r = 6, \quad m = r - O = 2,$$

sodass die Curve im linearen Complexe von der Geraden g in zwei consecutiven Punkten berührt würde; dann aber hätte die Minimalcurve die unendlich entfernte Curve zu stationärer Osculationsebene, womit wir auf Widerspruch geführt sind. Endlich die dritte Annahme würde geben

$$R - M = 3 = o.$$

Nun sahen wir allerdings in Nummer 43., dass die Annahme $o = 3$ auf Minimalcurven 4. O. führen könnte, doch waren die unendlich entfernten Punkte dieser Curven nie so gelegen, wie oben verlangt wurde*). In dieser Weise erkennen wir, dass es keine Minimalcurve 4. O. giebt, die der Hypothese $p_1 = 2$, $\pi_1 = 2$ entspricht, und dass in Folge dessen die Hypothese $p_1 = 2$, $\pi_1 = 2$ . . . oder sage ich

---

*) Ich bemerke beiläufig, dass die Entwickelungen des Textes eine erschöpfende Bestimmung aller Minimalcurven 4. O. liefern.

kurzweg *die Hypothese* (22) . . . *keine Fläche giebt, deren Ordnung niedriger als* 17 *ist.*

Wir wenden uns jetzt zu der Hypothese (21) . . ., das heisst wir setzen voraus, dass $p_1 = 2$, $\pi_1 = 1$ ist, während wir die Werthe der Zahlen p_2, π_2 u. s. w. unbestimmt lassen. Ist nun p_2 gleich 2, so ist die Ordnung der Fläche gleich oder grösser als 21. Ich werde nachweisen, dass die Hypothese $p_2 = 1$ nur für Minimalcurven, deren Ordnung grösser als 4 ist, eintreten kann. Existirte in der That eine Minimalcurve 4. O., die der Hypothese

$$p_1 = 2, \quad \pi_1 = 1, \quad p_2 = 1, \quad \pi_2 = 0, \quad p_2 = 0$$

entspräche, so müsste

$$R = 6$$

sein, während M nicht grösser als 3 sein könnte. M kann nicht gleich 1 sein, da die Zahlen p_k und π_k nicht sämmtlich grösser als 2 sind. Die Hypothese $M = 2$ giebt

$$o = 4, \quad r = 6, \quad m = r - O = 2.$$

In Folge dessen müsste g eine Inflexionstangente der Complexcurve, und andererseits die unendlich entfernte Ebene eine stationäre Osculationsebene der Minimalcurve sein, sodass wir auf Widerspruch geführt sind. Endlich die Hypothese $M = 3$ giebt

$$o = 3, \quad r = 4, \quad m = 0, \quad \mu = 0.$$

Wir haben aber früher gesehen, dass die dieser Complexcurve entsprechende Minimalcurve die unendlich entfernte Ebene in vier verschiedenen Punkten schneidet. Hiermit ist nachgewiesen, dass Minimalcurven, die der Hypothese

$$p_1 = 2, \quad \pi_1 = 1, \quad p_2 = 1 \cdots$$

entsprechen, von fünfter oder noch höherer Ordnung sind. *Folglich ist die Ordnung der entsprechenden Flächen gleich oder grösser als* 19.

Ist $p_1 = 2$, $\pi_1 = 0$, so muss p_2 grösser als Null sein, indem es keine Minimalcurve zweiter Ordnung giebt. Ist p_2 gleich 1, so muss unsere Curve nach dem soeben Entwickelten jedenfalls von der fünften Ordnung sein, so dass die betreffende Fläche *jedenfalls von der* 23ten *Ordnung* sein muss. Ist endlich $p_2 = 2$, so muss die Minimalcurve jedenfalls von der fünften, die Fläche *jedenfalls von der* 25ten *Ordnung* sein.

So bleibt nur noch die Annahme, dass p_1 gleich 1 ist, und dass in Folge dessen die π_k und die übrigen Grössen p_k gleich 1 oder Null sind. Hierbei können verschiedene Unterfälle eintreten. Zunächst werden wir annehmen, dass die betreffenden Minimalcurven von der *vierten* Ordnung sind. Alsdann giebt die Hypothese (11) (11) eine Fläche zwölfter Ordnung, die Hypothese (11) (10) (10) eine

Fläche vierzehnter Ordnung, endlich die Hypothese (1,0) (1,0) (1,0) (1,0) eine Fläche sechszehnter Ordnung. Diese drei Flächen sind (Nr. 43.) sämmtlich von der achtzehnten Classe. Ist die Ordnung unserer Minimalcurve grösser als vier, so ist die Ordnung der betreffenden Fläche jedenfalls grösser als 21.

Hiermit ist nachgewiesen, dass die Ordnung einer jeden reellen Minimalfläche, die keine Doppelfläche ist, jedenfalls grösser als 8 ist.

Wünscht man, indem man fortwährend alle Doppelflächen ausschliesst, alle reellen Minimalflächen von der neunten Ordnung zu bestimmen, so zeigen die obenstehenden Entwickelungen, dass p_1 nicht kleiner als 3 sein darf. Auf der anderen Seite zeigt die Formel (1), dass p_1 auch nicht grösser als 3 sein kann, und dass dabei die π_k und die übrigen p_k gleich Null sein müssen. Und da es nur eine Minimalcurve dritter Ordnung giebt, fliesst hieraus der Satz:

Satz 58. *Die Enneper'sche Minimalfläche neunter Ordnung, sechster Classe ist die einzige Minimalfläche neunter Ordnung, die keine Doppelfläche ist.*

48. Verlangt man alle Flächen, deren Ordnung nicht 16 übersteigt, so kann p_1 nicht grösser als 4 sein. Ist p_1 gleich 4, so müssen die π_k und die übrigen p_k gleich Null sein. Die zugehörige Minimalcurve ist daher von der vierten Ordnung. Liegt dieselbe auf zwei Flächen zweiten Grades, so ist ihr Rang gleich 5; die betreffende Fläche ist von der Ordnung 16 und von der Classe 8. Ist dagegen die Minimalcurve eine solche Curve vierter Ordnung, die nur auf einer Fläche zweiten Grades gelegen ist, so muss nach einer früheren Bemerkung die Grösse M entweder gleich 2 oder gleich 3 sein. Ist

$$M = 2, \quad O = 4, \quad R = 6,$$

so kommt

$$o = 4, \quad r = 6, \quad m = r - O = 2, \quad \mu = o - M = 2,$$

was contradictorisch ist, indem eine Complexcurve 4. O. nicht eine solche Lage hinsichtlich der Geraden g haben kann, dass gleichzeitig $m = 2$, $\mu = 2$ ist. Ist andererseits

$$M = 3 \quad O = 4, \quad R = 6,$$

so kommt

$$o = 3, \quad r = 4, \quad m = r - O = 0,$$

sodass unsere Minimalcurve vier verschiedene, und nicht wie früher vorausgesetzt, vier vereinigte unendlich entfernte Punkte haben müsste. Hiermit ist gezeigt, dass die *Hypothese* (4,0) *nur eine Fläche sechszehnter Ordnung, achter Classe giebt.*

Ist $p_1 = 3$, so kann π_1 nicht grösser als 2 sein, und dann müssen die übrigen p_k und π_k gleich Null sein, so dass die Minimalcurve von der fünften Ordnung ist. Ich werde zeigen, dass die Ordnung der entsprechenden Minimalflächen jedenfalls grösser als 16 ist.

Lass mich zunächst voraussetzen, dass die durch den Punkt P_1 hindurchgehenden Curvenzweige durch eine *einzige* Reihenentwickelung dargestellt, und dass ebenso die durch Π_1 gehenden Zweige durch eine einzige Entwickelung dargestellt sind. Der niedrigste Exponent der ersten Entwickelung ist dann entweder $\frac{3}{1}$ oder $\frac{3}{2}$ oder $\frac{3}{3}$. Der niedrigste Exponent der zweiten Entwickelung ist $\frac{2}{1}$ oder $\frac{2}{2}$. Unsere Annahme führt also auf sechs verschiedene Fälle:

1) Sind die niedrigsten Exponenten bezüglich $\frac{3}{1}$ und $\frac{2}{1}$, so ist die Ordnung der betreffenden Fläche gleich oder grösser als 21.

2) Die Exponenten $\frac{3}{1}$, $\frac{2}{2}$ geben nur Flächen, deren Ordnung grösser als 20 ist.

3) Die Exponenten $\frac{3}{2}$, $\frac{2}{1}$ geben nur Flächen, deren Ordnung grösser als 18 ist.

4) Die Exponenten $\frac{3}{2}$, $\frac{2}{2}$ geben nur Flächen, deren Ordnung grösser als 16 ist.

5) Die Exponenten $\frac{3}{3}$, $\frac{2}{1}$ geben nur Flächen, deren Ordnung grösser als 18 ist.

6) Die Exponenten $\frac{3}{3}$, $\frac{2}{2}$ können nicht gleichzeitig vorkommen, indem keine Raumcurve 5ter Ordnung gleichzeitig einen dreifachen und einen zweifachen Punkt haben kann.

Sind die durch P_1 gehenden Zweige nicht durch eine einzige, sondern durch *zwei* oder *drei* Entwickelungen dargestellt, so sind die entsprechenden niedrigsten Exponenten im ersten Falle $\frac{1}{1}$, $\frac{2}{1}$, im zweiten Falle $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{1}$. Sind andererseits die durch Π_1 gehenden Zweige durch *zwei* Entwickelungen dargestellt, so sind die entsprechenden Exponenten $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{1}$.

Indem man successiv alle möglichen Fälle berechnet, und dabei berücksichtigt, dass ein dreifacher und zweifacher Punkt nicht gleichzeitig auftreten können, erkennt man, dass die Annahme (3, 2) nur Flächen giebt, deren Ordnung grösser als 16 ist.

Die Hypothese (3, 1) giebt bekanntlich nur eine Minimalcurve vierter Ordnung, fünften Ranges. Die entsprechende Minimalfläche ist von der *zwölften Ordnung und der zwölften Classe.* Die Hypothese (3, 1)... giebt nur Flächen, deren *Ordnung grösser als* 18 *ist.*

Die Hypothese (3, 0) giebt die Enneper'sche Fläche neunter Ordnung. Die Hypothese $(3,0)\ldots$ giebt nur eine Fläche sechszehnter Ordnung, zwölfter Classe.

Die Flächen, die den Hypothesen $p_1 = 2$ und $p_1 = 1$ entsprechen, sind früher bestimmt worden. Und also ist es uns wirklich gelungen alle reellen Minimalflächen, deren Ordnung niedriger als 17 ist, und welche dabei keine Doppelflächen sind, zu bestimmen. Ich stelle die betreffenden Flächen in dem folgenden Schema zusammen.

Hypothese.	Ordnung.	Classe.
(4,0)	16	8
(3,1)	12	12
(3,0) (1,0)	16	12
(3,0)	9	6
(1,1) (1,1)	12	18
(1,1) (1,0) (1,0)	14	18
(1,0) (1,0) (1,0) (1,0)	16	18

49. Es ist schwieriger, alle *Doppelflächen* von gegebener Ordnung zu bestimmen. Ich werde diejenigen Resultate, die ich bis jetzt erhalten habe, auseinandersetzen.

Da die betreffenden Minimalcurven sich selbst conjugirt sind, so wird

$$p_k = \pi_k .$$

Bezeichnen wir die Ordnung der Doppelfläche mit O'', so ist nach unseren früheren Untersuchungen

$$O'' \geqq 2\left(\sum p_k\right)^2 - \sum p_k^2 ,$$

und also zugleich

$$O'' > \sum p_k^2 .$$

Verlangen wir, dass O'' niedriger als 9 sein soll, so muss nach der letzten Formel p_1 entweder gleich 2 oder gleich 1 sein.

Da es keine Minimalcurve 4. O. giebt, die der Hypothese $(2,2)$ entspricht, so erkennen wir, dass die *Annahme* $p_1 = 2$ *nur Doppelflächen, deren Ordnung grösser als* 12 *ist, liefert.*

Es bleibt also nur die Annahme $p_1 = 1$. Die Hypothese

$$(1,1), \ (1,1)$$

giebt bekanntlich (Nr. 40., 43.) eine Doppelfläche sechster Ordnung, neunter Classe, wobei indess wie früher unentschieden bleibt, ob dieselbe reell sein kann. — Die Hypothese

$$(1,1)\ (1,1)\ (1,1)$$

giebt nur Doppelflächen, deren Ordnung grösser als 14 *ist.* Also kommt, indem wir zugleich an unsere früheren Ergebnisse erinnern:

Satz 59. *Giebt es reelle Minimalflächen, deren Ordnung niedriger als neun ist, so muss ihre Ordnung gleich sechs, ihre Classe gleich neun sein.*

Wir stellen sodann die Frage nach den reellen Doppelflächen, deren Ordnung nicht grösser als 15 ist.

Es ist zunächst klar, dass p_1 nicht grösser als 3 sein darf. Und da wir schon die beiden Hypothesen $p_1 = 2$ und $p_1 = 1$ behandelt haben, bleibt nur die Hypothese $p_1 = 3$ übrig. Ist dabei p_2 grösser als Null, so ist die Ordnung der betreffenden Doppelflächen jedenfalls gleich 22. Wir haben daher nur zu untersuchen, welche Doppelflächen der Hypothese

$$(3,3)$$

entsprechen.

Es können drei verschiedene Fälle eintreten; wir werden dieselben der Reihe nach betrachten.

1) Lass uns zunächst voraussetzen, dass die durch P_1 gehenden Curvenzweige durch dieselbe Reihenentwickelung dargestellt werden, und dass der niedrigste Exponent gleich $\frac{3}{1}$ ist. Die entsprechenden Minimalflächen sind von der *fünfzehnten* Ordnung. Hierher gehört die Henneberg'sche Fläche fünfter Classe. Es ist mir nicht gelungen zu entscheiden, ob es mehrere reelle Doppelflächen fünfzehnter Ordnung giebt, die unserer Hypothese entsprechen. Ist dies der Fall, so ist ihre Classe dargestellt durch die Formel

$$M(M+4)$$

und also gleich 12, 21 oder noch grösser.

2) Wir setzen fortwährend voraus, dass die durch P_1 gehenden Zweige durch eine einzige Entwickelung dargestellt sind; und sei jetzt der niedrigste Exponent gleich $\frac{3}{2}$. Die Ordnung der entsprechenden Doppelflächen ist gleich

$$\frac{36 - 2 \cdot 4 - 2 \cdot 3}{2} = 11.$$

Es ist mir nicht gelungen zu entscheiden, ob diese Hypothese *reelle* Doppelflächen liefert.

3) Es bleibt nur die Annahme, dass die durch P_1 gehenden Zweige durch *zwei* Entwickelungen dargestellt sind, und dass $\frac{2}{1}$ und $\frac{1}{1}$ die betreffenden Exponenten sind. Die Ordnung der entsprechenden Flächen ist gleich

$$\frac{36 - 2 \cdot 2 - 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1}{2} = 13.$$

Ich weiss indess nicht, ob diese Hypothese reelle Doppelflächen liefern kann.

Früher haben wir schon gesehen, dass die Hypothese $p_1 = 2$ jedenfalls nur Flächen, deren Ordnung grösser als 12 ist, liefert. Ich werde versuchen diese Hypothese etwas näher zu discutiren. Ist p_2 grösser als 1, so ist die Ordnung der betreffenden Flächen jedenfalls grösser als 23. Andererseits kann p_2 nicht Null sein, indem die Hypothese $(2,2)$ keine Minimalcurve vierter Ordnung liefert. Daher muss $p_2 = 1$ sein. Ist dabei p_3 grösser als Null, so ist die Ordnung der betreffenden Flächen grösser als 25. Wir brauchen somit nur die Hypothese

$$(2,2)\ (1,1)$$

zu untersuchen. Es können drei Fälle eintreten:

1) Lass uns zunächst voraussetzen, dass die durch P_1 gehenden Curvenzweige durch eine einzige Entwickelung dargestellt sind, und dass der betreffende Exponent gleich $\frac{2}{1}$ ist. Die Ordnung der entsprechenden Doppelflächen ist gleich

$$\frac{36 - 2 \cdot 2 - 2 \cdot 1}{2} = 15.$$

2) Lass uns andererseits voraussetzen, dass die durch P_1 gehenden Zweige durch eine einzige Entwickelung dargestellt sind, und dass der betreffende Exponent gleich $\frac{2}{2}$ ist. Die Ordnung der entsprechenden Doppelflächen ist gleich

$$\frac{36 - 2 \cdot 4 - 2 \cdot 1}{2} = 13.$$

3) Endlich haben wir noch die Annahme, dass die durch P_1 gehenden Zweige durch *zwei* Entwickelungen dargestellt sind und dass die betreffenden Exponenten gleich $\frac{1}{1}$ und $\frac{1}{1}$ sind. Die reellen Doppelflächen, die dieser Annahme entsprechen mögen, sind von der 13^{ten} Ordnung.

Aus dem Vorangehenden fliesst der Satz:

Satz 59. *Es giebt keine reelle Doppelfläche, deren Ordnung gleich einer der folgenden Zahlen*

$$2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 12,\ 14$$

ist. Dagegen lasse ich unentschieden, ob die Ordnung einer reellen Doppelfläche gleich 6, 11, *oder* 13 *sein kann**).

*) Die interessante Frage, ob es Doppelflächen sechster Ordnung giebt, kann nach dem Vorangehenden auch folgendermassen formulirt werden: *Kann eine Minimalcurve 3. O. durch eine Transformation durch reciproke Radien in eine sich selbst conjugirte Curve umgewandelt werden?*

Im Uebrigen betrachte ich den folgenden Satz als das wichtigste Ergebniss meiner Untersuchungen über Minimalflächen gegebener Ordnung:

Satz 60. *Die Summe der Ordnung und der Classe einer reellen Minimalfläche, sie möge eine Doppelfläche sein oder nicht sein, ist immer grösser als* 14.

§ 13.

Der Asymptotenkegel zerfällt in Ebenen.

50. Ich werde jetzt die unendlich entfernten Punkte einer algebraischen Minimalfläche bestimmen. Dabei setze ich zunächst voraus, dass die Minimalcurven der einen Schaar keinen unendlich entfernten Punkt enthalten, der zugleich den Minimalcurven der zweiten Schaar angehört.

Sei

$$x = A(t), \quad y = B(t), \quad z = C(t)$$

eine Minimalcurve der einen Schaar, deren Ordnung gleich m sein mag. Und sei

$$x = A_1(\tau), \quad y = B_1(\tau), \quad z = C_1(\tau)$$

eine Minimalcurve der zweiten Schaar, die von der p^{ten} Ordnung ist. Alsdann ist die Ordnung der Fläche gleich mp.

Die Curven der ersten Schaar haben m gemeinsame unendlich entfernte Punkte; ebenso haben die Curven der zweiten Schaar p gemeinsame unendlich entfernte Punkte, wobei zu bemerken ist, dass einige unter diesen m oder p Punkten vereinigte Lage haben können. Ich verbinde die m Punkte mit den p Punkten durch gerade Linien, und erhalte hierdurch mp Gerade, unter denen einige unter Umständen zusammenfallen.

Ich wähle einen beliebigen unendlich entfernten Punkt Q, der jedoch nicht auf den besprochenen Geraden liegen darf, und ziehe eine durch Q gehende Gerade allgemeiner Lage. Um die Schnittpunkte dieser Geraden mit unserer Fläche mp^{ter} Ordnung zu finden, verfährt man nach den Untersuchungen in § 6. folgendermassen. Man construirt die beiden Kegel, welche bezüglich die Minimalcurven

$$x = A(t) - a, \quad y = B(t) - b, \quad z = C(t) - c$$

und

$$x = -A_1(\tau), \quad y = -B_1(\tau), \quad z = -C_1(\tau)$$

enthalten, und für welche dabei Q gemeinsame Spitze ist. Man bestimmt die gemeinsamen Erzeugenden dieser Kegel. Die Zahl dieser Erzeugenden, die nicht in der unendlich entfernten Ebene liegen, ist gleich der Zahl der im endlichen Raume gelegenen Schnittpunkte zwischen der Fläche und der durch Q gezogenen Geraden. Nun aber ist klar, dass unsere Kegel nach den gemachten Voraussetzungen keine gemeinsame, unendlich entfernte Erzeugende haben. Und da unsere Kegel bezüglich von der m^{ten} und der p^{ten} Ordnung sind, so haben sie mp gemeinsame im endlichen Raume gelegene Erzeugenden, die wegen der unbestimmten Parameter a, b, c sämmtlich verschieden sein müssen. Dementsprechend schneidet eine durch Q gehende Gerade allgemeiner Lage die Fläche in mp verschiedenen Punkten. Und da die Ordnung der Fläche gleich mp ist, folgt, dass Q nicht auf der Fläche liegt.

Liegt dagegen die Kegelspitze auf einer unter den besprochenen mp Geraden, so haben die Kegel jedenfalls *eine* gemeinsame unendlich entfernte Erzeugende, und also liegt die Spitze auf der Fläche.

Setzt man daher voraus, dass die Minimalcurven der einen Schaar keinen unendlich entfernten Punkt mit den Curven der zweiten Schaar gemein haben, so besteht die Schnittcurve der Fläche mit der unendlich entfernten Ebene nur aus mp *Geraden: den Verbindungsgeraden der* m *unendlich entfernten Punkte der Minimalcurven der einen Schaar mit den* p *entsprechenden Punkten der zweiten Schaar.*

51. Jetzt werden wir annehmen, dass die Curven der einen Schaar unendlich entfernte Punkte mit den Curven der zweiten Schaar gemein haben. Um die Ueberlegung möglichst eingehend führen zu können, scheint es mir zweckmässig, die Reihenentwickelungen der Minimalcurven in der Umgebung des besprochenen gemeinsamen Punktes aufzustellen.

Ich wähle mein Coordinatentetraeder in der folgenden Weise. Sei $t = 0$ die unendlich entfernte Ebene, und $z = 0$ eine beliebige andere Ebene. Ich ziehe eine zur Ebene $z = 0$ senkrechte Gerade und lege durch dieselbe zwei Ebenen, die den Kugelkreis berühren. Seien $x = 0$ und $y = 0$ diese Ebenen. Wählt man diese vier Ebenen zu Coordinatenebenen, so erhält die Differentialgleichung aller Minimalcurven folgende Form:

$$d\frac{x}{t}\,d\frac{y}{t} - \left(d\frac{z}{t}\right)^2 = 0\,.$$

Ich führe

$$\frac{t}{y} = \tau\,,\quad \frac{x}{y} = \xi,\quad \frac{z}{y} = \zeta$$

als neue Coordinaten ein. Dieselben sind jetzt nicht mehr homogene, sondern absolute Coordinaten. Hierdurch nimmt die obenstehende Differentialgleichung die Form an:

$$d\tau\,(\xi\,d\tau - \tau\,d\xi) = (\tau\,d\zeta - \zeta\,d\tau)^2.$$

Nun werde ich die allgemeinen Reihenentwickelungen einer durch den Punkt

$$\tau = 0,\quad \xi = 0,\quad \zeta = 0$$

des Kugelkreises hindurchgehenden Minimalcurve suchen. Ich setze:

$$\tau = M_0 \zeta^{\frac{p}{q}} + M_1 \zeta^{\frac{p+1}{q}} + \cdots = \sum M_\varkappa \zeta^{\frac{p+\varkappa}{q}} = \sum M_\varkappa \zeta^{\pi_\varkappa},$$

$$\xi = L_0 \zeta^{r_0} + L_1 \zeta^{r_1} \quad + \cdots = \sum L_\varkappa \zeta^{r_\varkappa}$$

und versuche, indem ich die $M_\varkappa$ als gegebene Grössen betrachte, die Coefficienten $L_\varkappa$ und die Exponenten $r_\varkappa$ derart zu bestimmen, dass die Differentialgleichung identisch befriedigt wird. Man findet die Bedingungsgleichung

$$\Sigma_\varkappa \Sigma_{\varkappa'} \Sigma_i \pi_\varkappa (\pi_{\varkappa'} - r_i) M_\varkappa M_{\varkappa'} L_i \zeta^{\pi_\varkappa + \pi_{\varkappa'} + r_i - 2}$$
$$= \Sigma_g \Sigma_{g'} (1 - \pi_g)(1 - \pi_{g'}) M_g M_{g'} \zeta^{\pi_g + \pi_{g'}},$$

die identisch bestehen soll.

Indem wir zunächst voraussetzen, dass keine unter den Gleichungen

$$\pi_0 = r_0, \quad \pi_0 = 1$$

stattfindet, ergiebt sich, dass $2\pi_0 + r_0 - 2$ der niedrigste Exponent links, und $2\pi_0$ der niedrigste Exponent rechts ist. Also ist

$$2\pi_0 + r_0 - 2 = 2\pi_0,$$

woraus

$$r_0 = 2.$$

Es ergiebt sich ferner, dass

$$r_1 = 2 + \frac{1}{q}, \quad r_2 = 2 + \frac{2}{q} \text{ u. s. w.}$$

und im Allgemeinen

$$r_\varkappa = 2 + \frac{\varkappa}{q} = \frac{2q + \varkappa}{q}.$$

Wir werden zeigen, dass die Coefficienten

$$L_0, L_1, \ldots, L_{p-2q-1}$$

durch die Grössen

$$M_0, M_1, \ldots, M_{p-2q-1}$$

vollständig bestimmt sind. Die Grösse L_i tritt nämlich zuerst auf in dem Gliede

$$\pi_0 (\pi_0 - r_i) M_0 M_0 L_i \zeta^{\pi_0 + \pi_0 + r_i - 2}.$$

In Folge dessen ist L_i im Allgemeinen eine unzweideutige Function von

$$L_0, L_1, \ldots, L_{i-1}, \quad M_0, M_1, \ldots, M_i;$$

ausgenommen ist dabei nur der Fall, dass $r_i = \pi_0$ ist. In Folge dessen ist L_0 bestimmt durch M_0, L_1 durch M_0 und M_1 u. s. w., und endlich L_{p-2q-1} bestimmt durch $M_0, M_1, \ldots, M_{p-2q-1}$; so dass *der folgende Theil*

$$L_0 \zeta^2 + L_1 \zeta^{\frac{2q+1}{q}} + \cdots + L_{p-2q-1} \zeta^{\frac{p-1}{q}}$$

der Reihe $\Sigma L_\varkappa \zeta^{r_\varkappa}$ *durch die vorgelegte Reihe* $\Sigma M_\varkappa \zeta^{\pi_\varkappa}$ *vollständig bestimmt ist.*

Ist $\pi_0 = r_0$, so bleiben die obenstehenden Betrachtungen allerdings nicht mehr gültig. Dabei ist jedoch zu bemerken, dass in der Reihe $\Sigma L_\varkappa \zeta^{r_\varkappa}$ die Coefficienten der Grössen

$$\zeta^{\frac{p-1}{q}}, \zeta^{\frac{p-2}{q}}, \ldots \text{ u. s. w.}$$

gleich Null sind, und somit durch die vorgelegte Reihe unzweideutig bestimmt sind.*)

Ist endlich

$$\pi_0 = 1 \quad \text{und} \quad \pi_0 \gtrless r_0,$$

so muss

$$\pi_0 + \pi_0 + r_0 - 2 = \pi_0 + \pi_1$$

sein, woraus folgt:

$$r_0 = 2 + \pi_1 - \pi_0,$$

so dass r_0 grösser als 2 ist. Auch in diesem Falle sind daher die Coefficienten der Grössen

$$\zeta^{\frac{p-1}{q}}, \zeta^{\frac{p-2}{q}}, \ldots, \text{ u. s. w.}$$

gleich Null, und somit durch die vorgelegte Reihe unzweideutig bestimmt.

Zu bemerken ist, dass r_0 nur dann gleich 1 sein kann, wenn gleichzeitig $\pi_0 = 1$ ist; *diesen einfachen Fall schliessen wir vorläufig aus.*

52. Für das Folgende ist es nothwendig, die Reihenentwickelungen einer Minimalcurve für eine etwas allgemeinere Lage des Coordinatentetraeders aufzustellen.

Ich setze:

$$\begin{aligned} \varrho t &= t', \\ \varrho x &= x', \\ \varrho y &= y' + \alpha x', \\ \varrho z &= z' + \beta x' \end{aligned}$$

und

$$\frac{t'}{y'} = \tau', \quad \frac{x'}{y'} = \xi', \quad \frac{z'}{y'} = \zeta'$$

und führe nun τ', ξ', ζ' als neue Coordinaten ein. Es ist

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{\tau'}{1 + \alpha \xi'}, \\ \xi &= \frac{\xi'}{1 + \alpha \xi'}, \\ \zeta &= \frac{\zeta' + \beta \xi'}{1 + \alpha \xi'}. \end{aligned}$$

---

*) Die Annahme

$$\pi_0 = r_0$$

kann nur eintreten, wenn π_0 kleiner als 2 ist, wie man leicht einsieht.

Durch Einführung dieser Werthe findet man zunächst eine Entwickelung

$$\xi' = L_0' \zeta_0'^{\frac{2q}{q}} + \cdots + L'_{p-2q-1} \zeta'^{\frac{p-1}{q}} + \cdots,$$

wo jede Grösse L_i' durch die Coefficienten $L_0 \ldots L_i$ bestimmt ist. Man findet ferner

$$\frac{\tau'}{1+\alpha\xi'} = M_0 \left(\frac{\zeta' + \beta\xi'}{1+\alpha\xi'}\right)^{\frac{p}{q}} + \cdots,$$

und durch Ausführung kommt

$$\begin{aligned}\tau' &= M_0 \zeta'^{\frac{p}{q}} + M_1 \zeta'^{\frac{p+1}{q}} + \cdots \\ &\quad + M_0 \frac{p}{q} \beta \zeta'^{\frac{p-q}{q}} \left(L_0' \zeta'^{\frac{2q}{q}} + \cdots + L'_{p-2q-1} \zeta'^{\frac{p-1}{q}} + \cdots\right) \\ &\quad + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

53. Lass mich annehmen, dass die *beiden* Minimalcurven

$$x = A(t) - a, \quad y = B(t) - b, \quad z = C(t) - c$$

und

$$x = -A_1(t_1), \quad y = -B_1(t_1), \quad z = -C_1(t_1)$$

einer Minimalfläche durch den auf dem Kugelkreise gelegenen Punkt

$$\tau = 0, \quad \xi = 0, \quad \zeta = 0$$

hindurchgehen. Die Reihenentwickelungen dieser Curven seien

$$\tau = \sum M_\varkappa \zeta^{\frac{p+\varkappa}{q}}, \quad \xi = \sum L_\varkappa \zeta^{r_\varkappa}$$

und

$$\tau_1 = \sum M_{1,\varkappa} \zeta^{\frac{p+\varkappa}{q}}, \quad \xi_1 = \sum L_{1,\varkappa} \zeta^{r_{1,\varkappa}}.$$

Ich nehme an, dass

$$M_0 = M_{1,0}, \ldots M_{\nu-1} = M_{1,\nu-1}, \quad M_\nu \gtrless M_{1,\nu}$$

ist, wobei bekanntlich

$$\nu \overline{\gtrless} p - q$$

ist. Alsdann ist, wenn wir mit μ die kleinste der Zahlen ν und $p-2q$ bezeichnen, nach dem Vorangehenden

$$L_0 = L_{1,0} \ldots, \quad L_{\mu-1} = L_{1,\mu-1},$$

während im Allgemeinen

$$L_\mu \gtrless L_{1,\mu}$$

ist. Seien

$$\tau' = \sum M_\varkappa' \zeta'^{\frac{p+\varkappa}{q}}, \quad \xi' = \sum L_\varkappa' \zeta'^{r_\varkappa}$$

und

$$\tau_1' = \sum M'_{1,\varkappa} \zeta'^{\frac{p+\varkappa}{q}}, \quad \xi_1' = \sum L'_{1,\varkappa} \zeta'^{r_{1,\varkappa}}$$

die Reihenentwickelungen in den neuen Variabeln. Es ist dann zunächst klar, dass

$$L_0' = L_{1,0}' \dots, \quad L_{\mu-1}' = L_{1,\mu-1}'.$$

wird. Ist nun $\nu < p - q$, so ist

$$M_0' = M_{1,0}', \dots M_{\nu-1}' = M_{1,\nu-1}', \quad M_\nu' \gtrless M_{1,\nu}'.$$

Ist dagegen $\nu = p - q$, so kommt allerdings

$$M_0' = M_{1,0}' \dots M_{p-q-1}' = M_{1,p-q-1}',$$

während man nicht ohne Weiteres einsieht, dass

$$M_{p-q}' \gtrless M_{1,p-q}'$$

sein muss. Es ist

$$M_{p-q}' = M_{p-q} + \frac{p}{q}\beta M_0 L_{p-2q}' \dots,$$

$$M_{1,p-q}' = M_{1,p-q} + \frac{p}{q}\beta M_0 L_{1,p-2q}' \dots$$

und da M_{p-q} und $M_{1,p-q}$ verschieden sind, so ist klar, dass M_{p-q}' und $M_{1,p-q}'$ jedenfalls nur für specielle Werthe des Parameters β einander gleich sein können. Da indess die Parameter a, b, c *allgemeine Werthe* haben sollen, so lehren die Entwickelungen der Nummer 26., dass M_{p-q}' und $M_{1,p-q}'$ auch nicht für specielle Werthe von β einander gleich sein können. Folglich ist

$$\delta(\tau - \tau_1) = \delta(\tau' - \tau_1').$$

Haben die Reihenentwickelungen unserer Minimalcurven die Form

$$\tau = \sum M_\varkappa\, \zeta^{\frac{p+\varkappa}{q}}, \quad \xi = \sum L_\varkappa \zeta^{r\varkappa}$$

und

$$\tau_1 = \sum M_{1,\varkappa}' \zeta^{\frac{p_1+\varkappa}{q_1}}, \quad \xi_1 = \sum L_{1,\varkappa} \zeta^{r_{1,\varkappa}}$$

wo

$$\frac{p}{q} \gtrless \frac{p_1}{q_1}$$

ist, so ergiebt sich sogleich, dass

$$\delta(\tau - \tau_1) = \delta(\tau' - \tau_1')$$

ist.

Erinnern wir nun, dass der Punkt

$$t' = 0, \quad z' = 0, \quad y' = 0$$

einen jeden unendlich entfernten Punkt, der nicht auf der Tangente $\xi = 0$, $\tau = 0$ des Kugelkreises liegt, darstellen kann, so ergiebt sich aus unseren früheren Untersuchungen (§ 6. und 7.) der Satz:

Gehört ein gewisser Punkt Q des Kugelkreises sowohl den Minimalcurven der einen Schaar, wie den Curven der zweiten Schaar, so liegen diejenigen unendlich entfernten Punkte der betreffenden Minimalfläche, *die von den durch Q hindurchgehenden Curvenzweigen herrühren mögen, auf der Tangente des Kugelkreises in Q.*

Berührt die Tangente des Kugelkreises in Q sowohl die Minimalcurven der einen Schaar wie die Curven der zweiten Schaar, so ist es leicht zu beweisen, dass die betreffende Tangente wirklich auf der Fläche liegt. Aus den beiden Entwickelungen einer Curve der einen Schaar

$$\xi = L_0 \zeta^{\frac{2q}{q}} + L_1 \zeta^{\frac{2q+1}{q}} + \cdots,$$
$$\tau = M_0 \zeta^{\frac{p}{q}} + M_1 \zeta^{\frac{p+1}{q}} + \cdots$$

folgen nämlich, indem man ξ als unabhängige Variable einführt, zwei Entwickelungen der Form

$$\zeta'' = l_0 \xi^{\frac{q}{2q}} + l_1 \xi^{\frac{q+1}{2q}} + \cdots,$$
$$\tau'' = m_0 \xi^{\frac{p}{2q}} + m_1 \xi^{\frac{p+1}{2q}} + \cdots$$

und dementsprechend kommt, wenn

$$\xi_1 = L_{1,0} \zeta^{\frac{2q_1}{q_1}} + L_{1,1} \zeta^{\frac{2q_1+1}{q_1}} + \cdots,$$
$$\tau_1 = M_{1,0} \zeta^{\frac{p_1}{q_1}} + M_{1,1} \zeta^{\frac{p_1+1}{q_1}} + \cdots$$

die Reihenentwickelungen einer Curve der zweiten Schaar sind, durch Einführung von ξ als unabhängiger Variabeln

$$\zeta_1'' = l_{1,0} \xi^{\frac{q_1}{2q_1}} + l_{1,1} \xi^{\frac{q_1+1}{2q_1}} + \cdots,$$
$$\tau_1'' = m_{1,0} \xi^{\frac{p_1}{2q_1}} + m_{1,1} \xi^{\frac{p_1+1}{2q_1}} + \cdots.$$

Hieraus folgt, wenn z. B. $\frac{p}{q} < \frac{p_1}{q_1}$ ist,

$$\delta(\tau - \tau_1) = \frac{p}{q}, \quad \sum \delta(\tau - \tau_1) = p q_1,$$
$$\delta(\tau'' - \tau_1'') = \frac{p}{2q}, \quad \sum \delta(\tau'' - \tau_1'') = 2 p q_1,$$

so dass

$$\sum \delta(\tau'' - \tau_1'') > \sum \delta(\tau - \tau_1)$$

wird. Ist andererseits $\frac{p}{q} = \frac{p_1}{q_1}$, so kommt

$$\delta(\tau - \tau_1) \gtreqless \frac{2p - q}{q}, \quad \sum \delta(\tau - \tau_1) \gtreqless (2p - q) q_1,$$
$$\delta(\tau'' - \tau_1'') \gtreqless \frac{p}{2q}, \quad \sum \delta(\tau'' - \tau_1'') \gtreqless p \cdot 2 q_1,$$

so, dass auch jetzt

$$\sum \delta(\tau'' - \tau_1'') > \sum \delta(\tau - \tau_1)$$

wird.*)

Diese Formel bleibt, wie man ohne Schwierigkeit erkennt, gültig, wenn die Tangente des Kugelkreises in Q nur die eine, dagegen nicht, wenn sie keine unter den Minimalcurven berührt. In dem letzten Falle ist in der That

$$\sum \delta(\tau'' - \tau_1'') = \sum \delta(\tau - \tau_1).$$

Dies giebt:

Berührt eine Tangente des Kugelkreises alle Minimalcurven, die der einen Schaar angehören, so liegt diese Tangente auf der Fläche. Berührt dagegen diese Gerade keine Minimalcurven, so liegt sie nicht auf der Fläche.

Die Multiplicität einer solchen Geraden auf der Fläche wird in jedem Falle bestimmt, indem man in den früher betrachteten Entwickelungen die nothwendige Anzahl von Gliedern wirklich berechnet. Doch halte ich es nicht für nothwendig, hierauf näher einzugehen.

Aus den vorangehenden Betrachtungen ergiebt sich nun der folgende Satz, der die unendlich entfernten Punkte einer jeden Minimalfläche vollständig bestimmt:

Satz 61. *Schneiden die Minimalcurven der einen Schaar die unendlich entfernte Ebene, und also auch den Kugelkreis in den Punkten $P_1, P_2, \ldots, P_g$, während die Curven der zweiten Schaar den Kugelkreis in den Punkten $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_k$ treffen, so liegen sämmtliche Verbindungsgeraden verschiedener Punkte P, Π auf der Fläche**). Desgleichen, wenn P_a mit Π_b identisch ist, so gehört die Tangente des*

---

*) Ausnahmsweise kann es z. B. eintreten, dass

$$r_0 = \frac{p}{q} > 1, \quad r_{1,0} = \frac{p_1}{q_1} > 1,$$

ist; alsdann ist, wenn wir z. B. annehmen $\frac{p}{q} \lesseqgtr \frac{p_1}{q_1}$:

$$\sum \delta(\tau'' - \tau_1'') = p p_1,$$

$$\sum \delta(\tau - \tau_1) < (2p - q) q_1, \text{ oder } = p q_1$$

und da

$$p p_1 > (2p - q) q_1, \quad p p_1 > p q_1$$

ist, folgt auch in diesem Falle

$$\sum \delta(\tau'' - \tau_1'') > \sum \delta(\tau - \tau_1).$$

**) Ist die Fläche insbesondere reell, und sind dabei P_i und Π_i conjugirte Punkte des Kugelkreises, so sind die Geraden $P_i\Pi_i$ eo ipso *reell*.

Kugelkreises in diesem Punkte der Fläche an, sofern sie von allen Minimalcurven der einen Schaar berührt wird, sonst nicht.

Dieser Satz gilt für alle nicht developpablen Minimalflächen, sie mögen reell oder imaginär, Doppelflächen oder nicht Doppelflächen sein. Mein Satz vervollständigt eine frühere Angabe von Geiser. Derselbe hat nämlich gefunden,*) dass der Schnitt einer algebraischen Minimalfläche mit der unendlich entfernten Ebene nur aus dem Kugelkreise und aus geraden Linien bestehen kann. Nach dem Obenstehenden kann der Kugelkreis nur auf den developpablen und zugleich imaginären Minimalflächen liegen. Ueberdies ist im Vorangehenden die Lage der betreffenden Geraden bestimmt.

54. Es ist leicht nachzuweisen, dass jede Minimalfläche eine Anzahl unendlich entfernter conischer Punkte enthält. Seien in der That c_0 und k_0 zwei auf einer Minimalfläche gelegene Minimalcurven, und lass mich annehmen, dass c_0 den Kugelkreis im Punkte Q schneidet, ohne jedoch denselben zu berühren. Führe ich nun c_0 in Translationsbewegung, indem ich k_0 als Directrix benutze, so beschreibt die Tangente von c_0 im Punkte Q einen Kegel, dessen Ordnung gleich der Ordnung der Curve k_0 sein wird, wenn nicht zufälligerweise auch k_0 durch den Punkt Q hindurchgeht. Folglich ist Q ein conischer Punkt, dessen Tangentenkegel der soeben besprochene Kegel ist. Berührt c_0 den Kugelkreis in Q, so ist dieser Punkt ein ausgearteter conischer Punkt. Also:

Satz 62. *Die Schnittpunkte der auf einer Minimalfläche gelegenen Minimalcurven mit der unendlich entfernten Ebene sind conische Punkte der Fläche.*

Da nun alle Tangentenkegel einer Fläche durch die conischen Punkte derselben hindurchgehen, fliesst aus dem Vorangehenden u. A. der Satz:

Satz 63. *Die Tangentenkegel einer Minimalfläche schneiden den Kugelkreis in gewissen gemeinsamen Punkten. Ausserdem giebt es jedoch variable Schnittpunkte.*

§ 14.

Die Ordnung der Tangentenkegel einer Minimalfläche.

55. Ich werde zeigen, wie man am besten verfährt, wenn man die Ordnung der Tangentenkegel einer Minimalfläche zu bestimmen wünscht. Zunächst werde ich voraussetzen, dass die Kegelspitze unendlich entfernt ist, so dass der Kegel ein berührender Cylinder wird. In diesem Falle ist die Ordnungsbestimmung äusserst einfach.

Ich nehme einen *allgemeinen* Punkt des Kugelkreises und construire

---

*) Mathematische Annalen Bd. III, pag. 530.

den Tangentenkegel, dessen Spitze der gewählte Punkt ist. Der erhaltene Kegel zerfällt nach dem Vorangehenden in $M + M'$ Kegel, deren jeder die Fläche nach einer Minimalcurve berührt; ausserdem wird unter Umständen die unendlich entfernte Ebene ein Theil des gesammten Tangentenkegels sein. Die besprochenen M und M' Kegel sind bezüglich von der Ordnung O' und O. Also ist die Ordnung des eigentlichen Tangentenkegels, dessen Spitze ein allgemeiner Punkt des Kugelkreises ist, gleich $MO' + M'O$.

Man verlege jetzt die Spitze des Tangentenkegels in einen *allgemeinen* Punkt der unendlich entfernten Ebene. Alsdann zerfällt unser Kegel in die unendlich entfernte Ebene und einen berührenden Cylinder. Sei α die Multiplicität der unendlich entfernten Ebene als reductiblen Theiles des Tangentenkegels, und sei β die Ordnung des Cylinders. Alsdann ist $\alpha + \beta$ die Ordnungszahl eines Tangentenkegels allgemeiner Lage; die Spitze möge unendlich entfernt oder im endlichen Raume liegen.

Es ist klar, dass die beiden Zahlen α und β ungeändert bleiben, wenn die Spitze die unendlich entfernte Ebene durchläuft, dabei vorausgesetzt, dass man solche Punkte vermeidet, die auf der Fläche liegen. Und da der Kugelkreis nicht auf der Fläche liegt, schliessen wir, dass

$$\beta = MO' + M'O$$

ist. Also:

Satz 64. *Die Ordnungszahl eines berührenden Cylinders ist gleich* $MO' + M'O$, *oder wenn die Fläche eine Doppelfläche ist, gleich* MO. *Ist die Fläche reell und keine Doppelfläche, so ist die besprochene Zahl gleich* $2MO$.

56. Wünscht man weiter zu gehen und die Ordnungszahl eines allgemeinen Tangentenkegels zu bestimmen, so hat man die Zahl α zu bestimmen. Es ist leicht einzusehen, dass α sich als die Summe einer Reihe Zahlen α_{ik} darstellen lässt. Bezeichnen wir nämlich wie früher die unendlich entfernten Punkte der auf unserer Fläche gelegenen Minimalcurven bezüglich mit

$$P_1 \dots P_i \dots P_g,$$
$$\Pi_1 \dots \Pi_k \dots \Pi_s,$$

so besteht bekanntlich die Schnittcurve der Fläche mit der unendlich entfernten Ebene aus den Geraden $P_i \Pi_k$. Berührt die Fläche die Ebene nach einer gewissen Geraden $P_i \Pi_k$, so veranlasst dieser Umstand, dass jeder Tangentenkegel, dessen Spitze unendlich entfernt ist, die unendlich entfernte Ebene etwa α_{ik} mal als reductiblen Theil enthält. Daher wird

$$\alpha = \sum \sum \alpha_{ik},$$

wo jede Zahl α_{ik} sich nur auf die Gerade $P_i\Pi_k$ bezieht. Die Zahl α_{ik} ist bestimmt durch die Reihenentwickelungen derjenigen Zweige unserer Minimalcurven, die durch P_i und Π_k hindurchgehen. Doch gehe ich auf die Berechnung der α_{ik} nicht näher ein.

57. Es ist leicht beliebig, viele Minimalflächen zu construiren, für welche $\alpha = 0$ ist; wir können sogar beliebig viele Minimalflächen construiren, die die unendlich entfernte Ebene nicht berühren.

Man zeigt nämlich zunächst, dass

$$2MM'$$

die Zahl der parallelen Tangentenebenen der Fläche ist. Wünscht man in der That durch eine unendlich entfernte Gerade alle möglichen Tangentenebenen an die Fläche zu legen, so verfährt man folgendermassen. Man bestimmt die Schnittpunkte P und Q der Geraden mit dem Kugelkreise, und wählt eine Minimalcurve aus jeder Schaar, etwa c_0 und k_0. Man bestimmt die M auf c_0 gelegenen Punkte π, deren zugehörige Tangenten den Kugelkreis in P (oder Q) treffen; ebenso sucht man die M' auf k_0 gelegenen Punkte π', deren zugehörige Tangenten den Kugelkreis in Q (oder P) treffen. Man zieht die durch die M Punkte π gehenden Curven k, und zugleich die durch die M' Punkte π' gehenden Curven c.

Die gezogenen Curven c und k schneiden sich in MM' Punkten, deren zugehörige Tangentenebenen die verlangte Richtung haben. Endlich findet man MM' weitere solche Punkte, indem man die Punkte P und Q vertauscht. Also:

Satz 65. *Eine Minimalfläche hat $2MM'$ parallele Tangentenebenen, unter denen, wenn die Fläche reell ist, $2M$ reell sind. Ist die Fläche eine Doppelfläche, so sind unsere Zahlen mit 2 zu dividiren.*

Nun ist die Classe einer Minimalfläche gleich

$$M(R'-M') + M'(R-M),$$

also ergiebt sich durch Subtraction, dass

$$M(R'-M') + M'(R-M) - 2MM'$$

die Multiplicität der unendlich entfernten Ebene als Tangentenebene ist. Also:

Satz 66. *Die Multiplicität der unendlich entfernten Ebene als Tangentenebene ist $M(R'-2M') + M'(R-2M)$, oder wenn die Fläche reell ist: $2M(R-2M)$. Ist die Fläche eine Doppelfläche, so ist die besprochene Zahl gleich $M(R-2M)$.*

Ist daher $R = 2M$, so berührt die zugehörige reelle Minimalfläche die unendlich entfernte Ebene gar nicht.

Um solche Minimalflächen zu finden, verfahre ich folgendermassen. Ich nehme eine Curve, deren Tangenten unserem linearen Complexe gehören, und welche dabei eine allgemeine Lage hinsichtlich der Geraden g hat. In Folge dessen schneidet g die zugehörige Developpable in r verschiedenen Punkten. Dabei ist

$$m = 0, \quad \mu = 0,$$

folglich wird für die entsprechende Minimalcurve

$$M = o, \quad R - M = o, \quad R = 2o = 2M,$$

so dass die dieser Minimalcurve entsprechende reelle Minimalfläche gar nicht die unendlich entfernte Ebene berührt.

Der Tangentenkegel einer solchen Fläche ist nach dem Vorangehenden von der Ordnung $2MO$ (oder MO, wenn die Fläche eine Doppelfläche ist).

58. Die Ordnung eines Tangentenkegels ist nach Plücker gleich der Classe einer ebenen Schnittcurve der Fläche. Insbesondere schliessen wir, dass jede auf einer Minimalfläche gelegene ebene Curve $MO' + M'O$ (oder MO) parallele Tangenten besitzt. Hieraus folgt weiter, dass unsere Curve $(MO' + M'O)^2$ Brennpunkte besitzt. Ist die Fläche reell, so giebt es $2MO$ (oder MO) reelle Brennpunkte. Also:

Satz 67. *Die auf einer reellen Minimalfläche liegenden ebenen Curven haben $2MO$ reelle Brennpunkte; diese Zahl ist mit 2 zu dividiren, wenn die Fläche eine Doppelfläche ist.*

---

59. Es giebt eine andere bemerkenswerthe Methode zur Bestimmung der Ordnung eines Tangentenkegels. Ich werde dieselbe in aller Kürze entwickeln, obgleich ich noch nicht alle mit derselben verbundenen Schwierigkeiten erledigt habe.

Ich schneide einen Tangentenkegel mit einem Kegel, der dieselbe Spitze besitzt und welcher dabei den Kugelkreis enthält. Die Ordnung des Tangentenkegels ist gleich der Zahl der gemeinsamen Erzeugenden, dividirt durch 2. Es giebt zweierlei solcher Erzeugenden: diejenigen, die durch die Punkte P_i, Π_k gehen, und diejenigen, deren Berührungspunkt im endlichen Raume liegt. Ich werde eine Methode entwickeln zur Bestimmung der letzteren.

Betrachtet man in den Gleichungen

$$\begin{aligned}
\xi &= A(t) + A_1(\tau) + \varepsilon A'(t), \\
\eta &= B(t) + B_1(\tau) + \varepsilon B'(t), \\
\zeta &= C(t) + C_1(\tau) + \varepsilon C'(t)
\end{aligned}$$

t, τ als gegebene Parameter, ε als eine *variable* Grösse, so erhält man alle Punkte ξ, η, ζ auf einer Tangente einer Minimalcurve c. Betrachtet man dagegen ξ, η, ζ als gegeben, so bestimmen unsere Gleichungen alle durch diesen Punkt gehenden Tangenten an Curven der Schaar c.

Ich führe drei neue Grössen x', y', z' ein, und ersetze meine drei Gleichungen durch die sechs folgenden äquivalenten:

$$(1)\quad x' = A(t) + \varepsilon A'(t),\quad y' = B(t) + \varepsilon B'(t),\quad z' = C(t) + \varepsilon C'(t),$$
$$(2)\quad x' = \xi - A_1(\tau),\qquad y' = \eta - B_1(\tau),\qquad z' = \zeta - C_1(\tau).$$

Die drei Gleichungen (1) bestimmen alle Punkte auf einer Developpablen einer Minimalcurve c. Die Gleichungen (2) bestimmen eine Minimalcurve, die zu den Curven der Schaar k collinear verwandt ist.

Die Anzahl der im endlichen Raume gelegenen Schnittpunkte zwischen der Curve (2) *und der Developpablen* (1) *ist gleich der Anzahl derjenigen Tangenten, die durch den Punkt* ξ, η, ζ *gehen, und welche dabei eine Curve* c *berühren.*

In dieser Weise bestimmt man diejenigen gemeinsamen Erzeugenden der besprochenen Kegel, deren Berührungspunkt im endlichen Raume liegt. Hierzu fügt man die nach den Punkten P_i und Π_k hinlaufenden Geraden, welche ebenfalls gemeinsame Erzeugende sind. Hierbei lasse ich jedoch *unentschieden, wie man die Multiplicität* dieser letzten Geraden als gemeinsamer Erzeugender unserer Kegel bestimmt.*)

§ 15.

Die parabolische Curve und die Doppeldeveloppable einer Minimalfläche.

60. Die beiden auf einer Minimalfläche gelegenen Schaaren Minimalcurven c und k bestimmen nach dem Vorangehenden (§ 2.) eine gemeinsame Umhüllungscurve Σ. Diese Curve ist eo ipso der Ort derjenigen Punkte, in denen die beiden Minimalrichtungen zusammenfallen. Und also enthält diejenige Developpable, die unsere Fläche längs Σ berührt, den imaginären Kugelkreis. Also ist Σ nach einer Bemerkung von Darboux eine auf der Fläche gelegene Krümmungslinie. Dass Σ zugleich eine Haupttangentencurve ist, beweist man folgendermassen.

Ist überhaupt eine Fläche und ein Liniencomplex gegeben, so ist der Ort aller Punkte, deren Complexkegel die Fläche berührt, immer dann eine Haupttangentencurve, wenn die Berührungserzeugende den besprochenen Ort berührt. Dieser Satz, angewandt auf eine Minimalfläche und den Inbegriff aller Minimalgeraden, giebt:

Satz 68. *Die Umhüllungscurve aller auf einer Minimalfläche gelegenen Minimalcurven ist eine Haupttangentencurve und zugleich eine Krümmungslinie der Fläche.*

Wenn unsere Minimalfläche keine Doppelfläche ist, so ist die Curve Σ eine Rückkehrcurve der Fläche. Folglich ist sie zugleich ein Theil der parabolischen Curve. Ist dagegen die Fläche eine Doppelfläche, so ist Σ keine Rückkehrcurve, und auch keine parabolische Curve.

---

*) Die gesuchte Zahl hängt offenbar nur ab von der Art des conischen Punktes P_i oder Π_k.

Um überhaupt die im endlichen Raume gelegene parabolische Curve einer Minimalfläche zu bestimmen, stellen wir nach den in Nummer 3. gegebenen Regeln die Differentialgleichung der Haupttangentencurven auf. Man erhält die Gleichung

$$(s-\sigma)^2 (F'''(s) ds^2 - \Phi'''(\sigma) d\sigma^2) = 0,$$

oder durch Wegwerfung des Factors $(s-\sigma)^2$;

$$F'''(s) ds^2 - \Phi'''(\sigma) d\sigma^2 = 0.$$

Sollen daher die beiden Haupttangenten zusammenfallen, so muss eine der Gleichungen

$$F'''(s) = 0, \quad F'''(s) = \infty,$$
$$\Phi'''(\sigma) = 0, \quad \Phi'''(\sigma) = \infty$$

bestehen. Wenn daher eine Minimalcurve etwa aus der Schaar c eine Spitze oder Inflexionstangente besitzt, so ist die durch einen solchen Punkt gehende Minimalcurve k immer ein Theil der parabolischen Curve. Also:

Satz 69. *Die parabolische Curve einer Minimalfläche besteht ausser aus den unendlich entfernten Geraden der Fläche nur aus Minimalcurven.*

Die unendlich entfernten Geraden gehören immer der parabolischen Curve an.

61. Es ist leicht nachzuweisen, dass die Doppeldeveloppable einer Minimalfläche, die keine Doppelfläche ist, im Allgemeinen zerfällt.

Ich nehme eine Doppeltangentialebene, und ziehe durch den ersten Berührungspunkt die beiden Tangenten t und τ, die den Kugelkreis treffen, und ebenso durch den zweiten Berührungspunkt die entsprechenden Tangenten t_1 und τ_1. Alsdann ist t etwa mit t_1 und τ mit τ_1 parallel. Dies vorausgesetzt, sind zwei Fälle denkbar. Entweder berühren t und t_1 Minimalcurven, die derselben Schaar angehören. Oder auch berühren t und t_1 Minimalcurven, die nicht derselben Schaar gehören. In Folge dessen zerfallen die Doppeltangentialebenen einer Minimalfläche im Allgemeinen in zwei Schaaren, deren jede eine Developpable erzeugt. Also:

Satz 70. *Die Doppeldeveloppable einer Minimalfläche, die keine Doppelfläche ist, zerfällt im Allgemeinen in zwei Theile.*

Ich werde zeigen, wie man die beiden Theile der Doppeldeveloppable analytisch bestimmt. Seien

$$dz = 2sF'''(s)ds + 2\sigma\Phi'''(\sigma)d\sigma,$$
$$dx = (1-s^2)F'''(s)ds + (1-\sigma^2)\Phi'''(\sigma)d\sigma,$$
$$dy = i(1+s^2)F'''(s)ds + i(1+\sigma^2)\Phi'''(\sigma)d\sigma$$

die Differentialgleichungen einer Minimalfläche. Die Relation

$$dz - p dx - q dy = 0$$

giebt

$$2s - p(1-s^2) - iq(1+s^2) = 0,$$
$$2\sigma - p(1-\sigma^2) - iq(1+\sigma^2) = 0,$$

woraus

$$p = \frac{s\sigma - 1}{s+\sigma}, \quad q = \frac{1+s\sigma}{i(s+\sigma)}.$$

Erinnern wir nun, dass die Punktcoordinaten z, x, y sich folgendermassen ausdrücken:

$$z = \sum f_i(s)\, F^{(i)}(s) + \sum f_i(\sigma)\, \Phi^{(i)}(\sigma),$$
$$x = \sum \varphi_i(s) F^{(i)}(s) + \sum \varphi_i(\sigma) \Phi^{(i)}(\sigma),$$
$$y = \sum \psi_i(s) F^{(i)}(s) + \sum \psi_i(\sigma) \Phi^{(i)}(\sigma),$$

wo $F^{(i)}$ die drei Differentialquotienten $F''(s)$, $F'(s)$ und $F(s)$ darstellt, so finden wir zur Bestimmung der Grösse

$$z - px - qy = w$$

eine Gleichung der Form

$$w = \sum \chi_i(s, \sigma)\, F^{(i)}(s) + \sum \chi_i(\sigma, s) \Phi^{(i)}(\sigma),$$

die wir als Gleichung der Fläche in Ebenencoordinaten betrachten.

Soll nun unsere Fläche Doppeltangentialebenen der ersten Art besitzen, so ist es nothwendig, dass jedenfalls die eine der Grössen $F(s)$ und $\Phi(\sigma)$ eine mehrdeutige Function des betreffenden Arguments ist.*) Lass mich mit $F_1(s)$ und $F_2(s)$ zwei Werthe von $F(s)$ bezeichnen, die demselben Argumente s entsprechen. Ebenso seien $\Phi_1(\sigma)$ und $\Phi_2(\sigma)$ zwei Werthe von $\Phi(\sigma)$, die demselben σ entsprechen. Alsdann werden die Doppeltangentialebenen der ersten Art bestimmt durch die beiden Gleichungen

$$w = \sum \chi_i(s, \sigma) F_1^{(i)}(s) + \sum \chi_i(\sigma, s) \Phi_1^{(i)}(\sigma),$$
$$w = \sum \chi_i(s, \sigma) F_2^{(i)}(s) + \sum \chi_i(\sigma, s) \Phi_2^{(i)}(\sigma)$$

und also genügen sie zugleich der Gleichung

$$w = \sum \chi_j(s, \sigma) \frac{F_1^{(i)} + F_2^{(i)}}{2} + \sum \chi_i(\sigma, s) \frac{\Phi_1^{(i)} + \Phi_2^{(i)}}{2},$$

die eine neue Minimalfläche bestimmt. Hiermit ist eine neue Minimalfläche gefunden, die in die Doppeldeveloppable der ersten Art eingeschrieben ist.

Die Doppeltangentialebenen der zweiten Art sind bestimmt durch die beiden Gleichungen

*) Ist daher $M = 1$, so existirt keine Doppeldeveloppable der ersten Art.

$$w = \sum_i \chi_i(s, \sigma) F^{(i)}(s) + \sum_i \chi_i(\sigma, s) \Phi^{(i)}(\sigma),$$
$$w = \sum_i \chi_i(\sigma, s) F^{(i)}(\sigma) + \sum_i \chi_i(s, \sigma) \Phi^{(i)}(s)$$

und genügen daher zugleich der Gleichung

$$w = \sum_i \chi_i(s, \sigma) \frac{F^{(i)}(s) + \Phi^{(i)}(s)}{2} + \sum_i \chi_i(\sigma, s) \frac{F^{(i)}(\sigma) + \Phi^{(i)}(\sigma)}{2},$$

die eine neue Minimalfläche, und zwar eine Doppelfläche bestimmt.

Die Doppeldeveloppable der zweiten Art ist daher einer gewissen Doppelfläche umgeschrieben. So z. B. kann in die Doppeldeveloppable zweiter Art einer Enneper'schen Minimalfläche eine Henneberg'sche Minimalfläche eingeschrieben werden.*)

Indem ich schliesse, füge ich noch einige Bemerkungen über die Singularitäten einer Minimalfläche hinzu.

Gehen durch einen im endlichen Raume gelegenen Punkt einer Minimalfläche mehr als eine Minimalcurve der einen Schaar, so gehört dieser Punkt einer auf der Fläche gelegenen Doppelcurve.

Geht durch einen im endlichen Raume gelegenen Punkt nur eine Minimalcurve aus jeder Schaar, und ist dabei der betreffende Punkt kein singulärer Punkt der besprochenen Curven, so ist derselbe auch kein singulärer Punkt der Fläche (vorausgesetzt, dass der Punkt nicht auf der Umhüllungscurve aller Minimalcurven gelegen ist). Ist unser Punkt ein Doppelpunkt oder Spitze der einen Curve, so ist die zweite eine Doppelcurve oder Rückkehrcurve der Fläche.

Soll daher eine Minimalfläche im endlichen Raume gelegene conische Punkte besitzen, so müssen alle Minimalcurven der Fläche durch denselben Punkt gehen. Man sieht so unmittelbar, dass der Tangentenkegel eines solchen conischen Punktes, wie Geiser bemerkt hat**), den Kugelkreis enthält.

§ 16.

Berichtigung eines Fehlers.

In einer früheren Abhandlung in Bd. 2 der norwegischen Zeitschrift „Archiv for Mathematik og Naturvidenskab" beschäftigte ich mich mit ähnlichen Untersuchungen wie die in dieser Arbeit dargestellten. Durch eine Ungenauigkeit kam ich in jener Abhandlung zu dem falchen Schlusse, dass alle algebraischen Doppelflächen imaginär seien, während ich die Existenz der periodischen reellen Doppelflächen richtig erkannte. Dieser Irrthum veranlasste einige falsche Resultate. So behauptete ich

---

*) Die beiden im Texte besprochenen Flächen berühren sich nach einer Minimalcurve, die auf der Enneper'schen Fläche die Umhüllungscurve aller Minimalcurven ist. Diese Bemerkung dehnt sich auf beliebige Minimalflächen aus.

**) Math. Annalen Bd. III, pag. 534.

z. B., dass die Classe einer reellen Minimalfläche immer grösser als fünf sein müsste; während meine Untersuchungen eigentlich nur zeigten, dass eine Minimalfläche, deren Classe kleiner als sechs wäre, eine Doppelfläche sein müsste. Meine Abhandlung gab eine richtige Bestimmung aller Doppelflächen dritter, vierter, fünfter Classe, u. s. w.; wie gesagt behauptete ich aber irrthümlicherweise, dass diese Flächen sämmtlich imaginär seien.

Erst im September 1877 erfuhr ich, dass Herr Henneberg schon im Jahre 1875 eine reelle Minimalfläche fünfter Classe entdeckt hatte. Ich bemerkte dann sogleich meinen Irrthum, und sah zugleich, dass die Classe einer reellen Doppelfläche grösser als vier sein müsste. Hierüber gab ich der Gesellschaft der Wissenschaften in Christiania Nachricht in einer kleinen Note, die zugleich einige weitere Resultate enthielt.

Nachträglich erfahre ich durch eine briefliche Mittheilung Henneberg's, dass *er schon früher* in einer Vorlesung den Satz bewiesen hatte, dass die Classe einer reellen Minimalfläche grösser als vier sein muss. (Man vergleiche seine elegante Abhandlung im neunten Bande der Annali di matematica.) Meine Untersuchungen gehen indess weiter. So z. B. bestimmen sie *alle* reellen Minimalflächen, deren Classenzahl eine beliebige vorgelegte Primzahl ist.

Bei dieser Gelegenheit erlaube ich mir einige weitere Unterschiede zwischen meinen und Herrn Henneberg's Resultaten zu besprechen. Herr Henneberg findet, dass die Ordnung seiner reellen Minimalfläche fünfter Classe gleich siebzehn ist, während nach mir *alle* reellen Minimalflächen fünfter Classe von fünfzehnter Ordnung sind. Nach meiner allgemeinen Theorie der unendlich entfernten Punkte einer Minimalfläche muss die Henneberg'sche Fläche drei unendlich entfernte Gerade enthalten, unter denen eine reell ist, während die beiden anderen den Kugelkreis in den Schnittpunkten der ersten Linie berühren. Henneberg findet aber, dass seine Fläche fünf unendlich entfernte Gerade enthält. Endlich scheint mir, dass Henneberg das Geschlecht seiner Fläche unrichtig bestimmt. Es besteht nämlich überhaupt der Satz, dass das Geschlecht einer jeden Minimalfläche, deren erzeugende Minimalcurven vom Geschlechte Null sind, gleich Null ist.*) In diesen Punkten, die allerdings in Hennebergs werthvoller Arbeit nur eine untergeordnete Wichtigkeit haben, während sie in meinen Untersuchungen eine wesentlichere Rolle spielen, scheint mir Henneberg sich geirrt zu haben.

*) Dieser Satz besteht auch, wenn die Fläche eine Doppelfläche ist.

Christiania, 20. Juni 1878.