

Theorie der circularpolarisirenden Medien.

(Von Herrn *A. Clebsch* zu Carlsruhe.)

Im 25^{ten} Bande der *Comptes Rendus* hat *Cauchy* das System von Differentialgleichungen, welches der Moleculartheorie zufolge die Bewegungen eines elastischen Mediums darstellt, durch Hinzufügung gewisser, physikalisch noch nicht vollkommen erklärter Terme für die Darstellung der Erscheinungen der Circularpolarisation brauchbar zu machen gesucht. Indefs ist mir nicht bekannt, daß die vollständige Theorie jener Gleichungen, welche ein vielfaches Interesse darzubieten scheint, jemals irgendwo gegeben wäre. Ich habe daher eine solche Darstellung im Folgenden unternommen, und dabei auch jene Fälle nicht außer Augen gelassen, welche den zweiaxigen Krystallen analog sein würden. Denn obwohl bis jetzt keine zweiaxigen Krystalle bekannt sind, welche die Erscheinungen der circularen Polarisation aufweisen, so scheint es doch nicht unmöglich, ja fast natürlich, daß dergleichen in der Natur existiren, so wie der Quarz ein Beispiel für die einaxigen darbietet. Vor allem aber erfordert die elegantere und übersichtlichere Darstellung der Theorie die Behandlung des allgemeineren Falles, woraus sich dann die Theorie der einaxigen Krystalle auf die leichteste Weise ergibt; so wie denn die *Macculaghsche* Theorie einen äußerst einfachen Fall der gegenwärtigen Resultate darstellt.

Ich habe zugleich versucht, die Gleichungen auf eine Weise zu deuten, welche von der früher versuchten wesentlich verschieden ist. Aber es scheint außer Zweifel, daß die Versuche von *Cauchy* und *Laurent*, aus der bloßen Molecularanziehung diese Gleichungen zu erklären, verwickelt und gezwungen ausgefallen sind, und daß es nicht unpassend sein dürfte, eine einfache Erklärung an die Stelle zu setzen, wenn auch dieselbe den Boden der bloßen Molecularanziehungen verläßt und einige Verwandtschaft mit dem *Weberschen* und *Ampèreschen* Gesetze zeigt. Ist doch auch das erstere vor nicht langer Zeit von Herrn *Neumann* mit Erfolg zur Erklärung derjenigen Drehung benutzt worden, welche die Polarisationssebene durch den electrischen Strom erfährt *).

*) *C. Neumann*, Dissertation, Halle 1858.

Ich beginne damit, die *Cauchyschen* Gleichungen in derselben Weise zu begründen, wie es von *Cauchy* selbst im 30^{sten} Bande der *Comptes Rendus* geschehen ist.

§. 1.

Aufstellung der Gleichungen.

Es seien x, y, z die Coordinaten eines Molecüls in der Ruhelage, x_1, y_1, z_1 die eines benachbarten, m, m_1 ihre Massen, u, v, w und u_1, v_1, w_1 die Projectionen ihrer Verschiebungen auf die Coordinatenachsen. Die Bewegungsgleichungen für das System von Molecülen sollen so beschaffen sein, daß die Beschleunigungen eines Molecüls sich als lineare Functionen der relativen Verschiebungen der übrigen Molecüle darstellen, so daß also die Form der Gleichungen folgende ist:

$$(1.) \quad \begin{cases} \frac{d^2 u}{dt^2} = \sum m_1 (a (u_1 - u) + b (v_1 - v) + c (w_1 - w)), \\ \frac{d^2 v}{dt^2} = \sum m_1 (a' (u_1 - u) + b' (v_1 - v) + c' (w_1 - w)), \\ \frac{d^2 w}{dt^2} = \sum m_1 (a'' (u_1 - u) + b'' (v_1 - v) + c'' (w_1 - w)), \end{cases}$$

wo die Summe sich auf alle Molecüle m_1 erstreckt, und a, b, c etc. nur von den relativen Coordinaten der Ruhelage

$$x_1 - x, \quad y_1 - y, \quad z_1 - z$$

abhängig sind. Die gedachten Eigenschaften finden sich sämmtlich bei den gewöhnlichen Gleichungen für die Bewegung eines Systems von Molecülen, wenn sich dieselben nach irgend einer Function der Entfernung anziehen.

Die Beschleunigung in irgend einer durch die Cosinus α, β, γ ange deuteten Richtung soll nun allein von den geometrischen Beziehungen abhängen, welche zwischen dieser Richtung, der Richtung der ursprünglichen und der späteren Verbindungslinie der Molecüle m, m_1 eintreten. Diese drei Richtungen sind gegeben durch die Projectionen

$$\begin{array}{lll} \alpha & x_1 - x & x_1 - x + u_1 - u \\ \beta & y_1 - y & y_1 - y + v_1 - v \\ \gamma & z_1 - z & z_1 - z + w_1 - w; \end{array}$$

und die geometrischen Beziehungen kann man repräsentirt denken durch die relativen Entfernungen

$$r^2 = (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2 \quad \text{und}$$

$$\varrho^2 = (x_1 - x + u_1 - u)^2 + (y_1 - y + v_1 - v)^2 + (z_1 - z + w_1 - w)^2,$$

zu denen die analoge Gröfse $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ hinzutritt; so wie durch die Producte der Radien mit den Cosinus der von zweien der Richtungen eingeschlossenen Winkel:

$$\alpha(x_1 - x) + \beta(y_1 - y) + \gamma(z_1 - z),$$

$$\alpha(x_1 - x + u_1 - u) + \beta(y_1 - y + v_1 - v) + \gamma(z_1 - z + w_1 - w),$$

$$(x_1 - x)(x_1 - x + u_1 - u) + (y_1 - y)(y_1 - y + v_1 - v) + (z_1 - z)(z_1 - z + w_1 - w).$$

Die Beschleunigung in der gegebenen Richtung:

$$\alpha \frac{d^2 u}{dt^2} + \beta \frac{d^2 v}{dt^2} + \gamma \frac{d^2 w}{dt^2}$$

$$= \Sigma m_1((u_1 - u)(\alpha a + \beta a' + \gamma a'') + (v_1 - v)(\alpha b + \beta b' + \gamma b'') + (w_1 - w)(\alpha c + \beta c' + \gamma c''))$$

darf also nur von den sechs Gröfßen

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1, \quad (x_1 - x)(u_1 - u) + (y_1 - y)(v_1 - v) + (z_1 - z)(w_1 - w),$$

$$(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2, \quad \alpha(x_1 - x) + \beta(y_1 - y) + \gamma(z_1 - z),$$

$$(u_1 - u)^2 + (v_1 - v)^2 + (w_1 - w)^2, \quad \alpha(u_1 - u) + \beta(v_1 - v) + \gamma(w_1 - w)$$

abhängig sein, welche die oben aufgeführten sechs Gröfßen ersetzen, so wie von beliebigen Combinationen derselben. Unter den letztern verdient nur eine hervorgehoben zu werden, nämlich die Determinante

$$A = \begin{vmatrix} \alpha & x_1 - x & u_1 - u \\ \beta & y_1 - y & v_1 - v \\ \gamma & z_1 - z & w_1 - w \end{vmatrix},$$

deren Quadrat sich rational durch jene Gröfßen ausdrückt, und welche der einzige rationale Ausdruck ist, welcher durch irrationale Operationen aus denselben erhalten werden kann. Da nun ferner aber die gesuchte Beschleunigung sich offenbar in α , β , γ , so wie in $u_1 - u$, $v_1 - v$, $w_1 - w$ rational und linear ausdrückt, so bleibt nur übrig, dafs der Ausdruck unter dem Σ sich als lineare Function der drei Gröfßen

$$\alpha(u_1 - u) + \beta(v_1 - v) + \gamma(w_1 - w),$$

$$\{\alpha(x_1 - x) + \beta(y_1 - y) + \gamma(z_1 - z)\} \{(x_1 - x)(u_1 - u) + (y_1 - y)(v_1 - v) + (z_1 - z)(w_1 - w)\}, \quad A$$

darstellen mufs, deren Coefficienten allein von r abhängen und durch $\varphi(r)$, $\psi(r)$, $\chi(r)$ bezeichnet sein sollen.

Vergleicht man daher diesen Ausdruck mit dem Ausdruck der gesuchten Beschleunigung, so findet sich:

$$\begin{aligned}
 a &= \varphi(r) + \psi(r)(x_1 - x)^2, \\
 a' &= \chi(r)(z_1 - z) + \psi(r)(y_1 - y)(x_1 - x), \\
 a'' &= -\chi(r)(y_1 - y) + \psi(r)(z_1 - z)(x_1 - x), \\
 b &= -\chi(r)(z_1 - z) + \psi(r)(x_1 - x)(y_1 - y), \\
 b' &= \varphi(r) + \psi(r)(y_1 - y)^2, \\
 b'' &= \chi(r)(x_1 - x) + \psi(r)(z_1 - z)(y_1 - y), \\
 c &= \chi(r)(y_1 - y) + \psi(r)(x_1 - x)(z_1 - z), \\
 c' &= -\chi(r)(x_1 - x) + \psi(r)(y_1 - y)(z_1 - z), \\
 c'' &= \varphi(r) + \psi(r)(z_1 - z)^2.
 \end{aligned}$$

Und demnach nehmen die Gleichungen (1.) folgende Gestalt an, welche den gestellten Bedingungen auf die allgemeinste Weise entspricht:

$$(2.) \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 u}{dt^2} &= \Sigma m_1 [\varphi(r)(u_1 - u) + \psi(r)(x_1 - x) \{ (x_1 - x)(u_1 - u) + (y_1 - y)(v_1 - v) + (z_1 - z)(w_1 - w) \} \\ &\quad + \chi(r) \{ (y_1 - y)(w_1 - w) - (z_1 - z)(v_1 - v) \}], \\ \frac{d^2 v}{dt^2} &= \Sigma m_1 [\varphi(r)(v_1 - v) + \psi(r)(y_1 - y) \{ (x_1 - x)(u_1 - u) + (y_1 - y)(v_1 - v) + (z_1 - z)(w_1 - w) \} \\ &\quad + \chi(r) \{ (z_1 - z)(u_1 - u) - (x_1 - x)(w_1 - w) \}], \\ \frac{d^2 w}{dt^2} &= \Sigma m_1 [\varphi(r)(w_1 - w) + \psi(r)(z_1 - z) \{ (x_1 - x)(u_1 - u) + (y_1 - y)(v_1 - v) + (z_1 - z)(w_1 - w) \} \\ &\quad + \chi(r) \{ (x_1 - x)(v_1 - v) - (y_1 - y)(u_1 - u) \}]. \end{aligned} \right.$$

Nur durch die letzten Glieder unterscheiden sich diese Gleichungen von den gewöhnlichen Gleichungen für die Bewegung elastischer Medien. Denn obwohl dieselben eine Beziehung aufstellen zwischen den Functionen $\varphi(r)$ und $\psi(r)$, so ist doch dieser Umstand unwesentlich, da er auf den ferneren Gang der Untersuchung durchaus keinen Einfluss übt.

§. 2

Physikalische Deutung der Gleichungen.

Ich will versuchen diese von *Cauchy* für isotrope Medien aufgestellten Gleichungen einer physikalischen Deutung zu unterwerfen, wenn auch die Hypothese etwas gewagt scheinen mag, welche sich mir zur Aufstellung der Gleichungen dargeboten hat.

Nehmen wir an *dafs zwar in jedem Augenblick die Molecüle sich nach einer Function $f(r)$ der Entfernung anziehen, dafs aber aufser-*

dem durch die Bewegung selbst auf irgend eine Weise in denselben in jedem Augenblick eine (nicht wieder verschwindende) Kraft erregt wird, welche senkrecht gerichtet sein soll gegen eine, der Verbindungslinie und der relativen Geschwindigkeit gleichzeitig parallele Ebene. Da sich die Cosinus der Verbindungslinie gegen die Axe verhalten wie

$$x_1 - x + u_1 - u : y_1 - y + v_1 - v : z_1 - z + w_1 - w,$$

die Cosinus der Richtung der relativen Geschwindigkeit aber wie

$$\frac{d(u_1 - u)}{dt} : \frac{d(v_1 - v)}{dt} : \frac{d(w_1 - w)}{dt},$$

so sind die Cosinus der Normale derjenigen Ebene, welche beiden Richtungen parallel ist, mit Vernachlässigung von Gröfsen höherer Ordnung, proportional mit

$$\begin{aligned} (y_1 - y) \frac{d(w_1 - w)}{dt} - (z_1 - z) \frac{d(v_1 - v)}{dt}, \\ (z_1 - z) \frac{d(u_1 - u)}{dt} - (x_1 - x) \frac{d(w_1 - w)}{dt}, \\ (x_1 - x) \frac{d(v_1 - v)}{dt} - (y_1 - y) \frac{d(u_1 - u)}{dt}, \end{aligned}$$

und damit die Summe der Quadrate gleich 1 sei, mufs man diese Gröfsen, um die Cosinus selbst zu erhalten, dividiren durch

$$\pm \nu r \sin \alpha,$$

durch ν die relative Geschwindigkeit der Molecüle bezeichnet, durch α aber den Winkel, welchen deren Richtung gegen die Verbindungslinie (r oder ϱ) der Molecüle bildet.

Dieses Nenners wegen nehme ich nun an, *dafs die gedachte, in jedem Augenblick entstehende Kraft proportional ist einer Function der relativen Entfernung $F(r)$ und derjenigen Componenten $\nu \sin \alpha$ der relativen Geschwindigkeit, welche gegen die Verbindungslinie senkrecht ist.*

Dann sind die Componenten der Kraft, welche in dem Zeitmoment dt entsteht, offenbar

$$\begin{aligned} m m_1 \frac{F(r)}{r} \{ (y_1 - y)(dw_1 - dw) - (z_1 - z)(dv_1 - dv) \}, \\ m m_1 \frac{F(r)}{r} \{ (z_1 - z)(du_1 - du) - (x_1 - x)(dw_1 - dw) \}, \\ m m_1 \frac{F(r)}{r} \{ (x_1 - x)(dv_1 - dv) - (y_1 - y)(du_1 - du) \}. \end{aligned}$$

Um daher die Componenten zu finden, welche auf diese Weise vom Beginn der Bewegung, wo alle u, v, w Null sind, bis zu einer beliebigen Zeit entstanden sind, hat man nur zu integriren, und erhält

$$\begin{aligned} mm_1 \frac{F(r)}{r} \{(\gamma_1 - \gamma)(w_1 - w) - (z_1 - z)(v_1 - v)\}, \\ mm_1 \frac{F(r)}{r} \{(z_1 - z)(u_1 - u) - (x_1 - x)(w_1 - w)\}, \\ mm_1 \frac{F(r)}{r} \{(x_1 - x)(v_1 - v) - (\gamma_1 - \gamma)(u_1 - u)\}, \end{aligned}$$

welches genau die zur Bildung der letzten Glieder in (2.) nothwendigen Componenten sind, wenn man durch $\chi(r)$ die Function

$$\chi(r) = \frac{F(r)}{r}$$

bezeichnet. Da die andern Glieder der Gleichungen (2.) aus der Function $f(r)$ auf sehr bekannte Weise erhalten werden, so sieht man, dafs in der That die angenommene Hypothese genügt um auf diese Gleichungen zu führen. Ich wende mich aber dazu aus den Gleichungen (2.) die Folgerungen zu ziehen, welche die aus ihnen erklärbaren Lichterscheinungen umfassen.

§. 3.

Einfachste Integrale.

Nach dem Vorgange von *Cauchy* setzt man die Integrale der Gleichungen (2.) und ähnlicher aus particularen Integralen zusammen, welche die Gestalt haben

$$(3.) \quad \begin{cases} \bar{u} = A e^{\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha x + \beta y + \gamma z - mt)\sqrt{-1}}, \\ \bar{v} = B e^{\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha x + \beta y + \gamma z - mt)\sqrt{-1}}, \\ \bar{w} = C e^{\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha x + \beta y + \gamma z - mt)\sqrt{-1}}. \end{cases}$$

Darin sind A, B, C reelle oder imaginäre Gröfsen, welche für alle Molecüle die nämlichen Werthe haben; ferner $\alpha, \beta, \gamma, \lambda$ willkürliche reelle Gröfsen, welche die Bedingung

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

erfüllen. Wenn man sodann von den Ausdrücken (3.) nur die reellen Theile zurückbehält, so stellen sie reelle Bewegungen dar, α, β, γ sind die Cosinus der Normale der Wellenebene gegen die Axe, λ die Wellenlänge, m oder

der reelle Theil von m die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle. Es kommt zunächst darauf an die Beziehungen zu ermitteln, welche zwischen diesen Größen eintreten müssen, damit \bar{u} , \bar{v} , \bar{w} als particulare Integrale der Gleichungen (2.) angesehen werden dürfen.

Führt man die Ausdrücke (3.) in die Gleichungen (2.) ein, so kann man denselben sehr leicht folgende Gestalt geben, welche im Folgenden zu Grunde gelegt werden soll:

$$(4.) \quad \begin{cases} A(m^2 + \mu) = c_{11}A + c_{12}B + c_{13}C + (c_2C - c_3B)\sqrt{-1}, \\ B(m^2 + \mu) = c_{12}A + c_{22}B + c_{23}C + (c_3A - c_1C)\sqrt{-1}, \\ C(m^2 + \mu) = c_{13}A + c_{23}B + c_{33}C + (c_1B - c_2A)\sqrt{-1}. \end{cases}$$

Darin sind μ und die Größen c durch die drei Grundfunctionen

$$(5.) \quad \begin{cases} \mu = \frac{\lambda^2}{4\pi^2} \Sigma m_1 \varphi(r) \{ e^{[\alpha(x_1-x) + \beta(y_1-y) + \gamma(z_1-z)] \frac{2\pi\sqrt{-1}}{\lambda}} - 1 \}, \\ H = \frac{\lambda^4}{16\pi^4} \Sigma m_1 \psi(r) \{ e^{[\alpha(x_1-x) + \beta(y_1-y) + \gamma(z_1-z)] \frac{2\pi\sqrt{-1}}{\lambda}} - 1 \\ \quad - [\alpha(x_1-x) + \beta(y_1-y) + \gamma(z_1-z)] \frac{2\pi\sqrt{-1}}{\lambda} \\ \quad - \frac{1}{2} [\alpha(x_1-x) + \beta(y_1-y) + \gamma(z_1-z)]^2 \cdot \left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\lambda} \right)^2 \}, \\ K = \frac{\lambda^3}{8\pi^3} \Sigma m_1 \chi(r) \{ e^{[\alpha(x_1-x) + \beta(y_1-y) + \gamma(z_1-z)] \frac{2\pi\sqrt{-1}}{\lambda}} - 1 \\ \quad - [\alpha(x_1-x) + \beta(y_1-y) + \gamma(z_1-z)] \frac{2\pi\sqrt{-1}}{\lambda} \} \end{cases}$$

in solcher Weise ausgedrückt, daß

$$(6.) \quad \begin{cases} c_{11} = \frac{\partial^2 H}{\partial \alpha^2}, & c_{23} = \frac{\partial^2 H}{\partial \beta \partial \gamma}, & c_1 = \frac{\partial K}{\partial \alpha}, \\ c_{22} = \frac{\partial^2 H}{\partial \beta^2}, & c_{31} = \frac{\partial^2 H}{\partial \gamma \partial \alpha}, & c_2 = \frac{\partial K}{\partial \beta}, \\ c_{33} = \frac{\partial^2 H}{\partial \gamma^2}, & c_{12} = \frac{\partial^2 H}{\partial \alpha \partial \beta}, & c_3 = \frac{\partial K}{\partial \gamma}. \end{cases}$$

Denkt man sich das Medium homogen und die Summen (5.) ausgeführt, so werden dieselben nur von den Größen α , β , γ , λ abhängig, nehmen aber für alle Punkte des Systems dieselben Werthe an; wodurch die Annahme gerechtfertigt ist, daß A , B , C , m gleichfalls für alle Punkte des Systems die nämlichen Werthe erhalten sollen.

Wenn man aus den Gleichungen (4.) die Verhältnisse der A , B , C eliminirt, so findet sich eine cubische Gleichung für m^2 . Man sieht also, daß

eine Welle von gegebener Richtung und Wellenlänge sich mit drei verschiedenen Fortpflanzungsgeschwindigkeiten bewegen kann, welche den drei Wurzeln der cubischen Gleichung entsprechen, und zwar nach beiden Seiten der ursprünglichen Welle, da das Vorzeichen von m selbst noch unbestimmt bleibt. Das Resultat der Elimination ist die Determinante

$$(7.) \quad \varrho = \begin{vmatrix} c_{11} - m^2 - \mu & c_{12} - c_3 \sqrt{-1} & c_{13} + c_2 \sqrt{-1} \\ c_{12} + c_3 \sqrt{-1} & c_{22} - m^2 - \mu & c_{23} - c_1 \sqrt{-1} \\ c_{13} - c_2 \sqrt{-1} & c_{23} + c_1 \sqrt{-1} & c_{33} - m^2 - \mu \end{vmatrix} = 0.$$

Bezeichnet man aber durch \mathcal{A} diejenige Determinante, welche man erhalten würde, wenn die von der Circularpolarisation abhängigen Glieder nicht vorhanden wären,

$$(8.) \quad \mathcal{A} = \begin{vmatrix} c_{11} - m^2 - \mu & c_{12} & c_{13} \\ c_{12} & c_{22} - m^2 - \mu & c_{23} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} - m^2 - \mu \end{vmatrix}$$

und durch \mathcal{A} die Function, welche für die c_1, c_2, c_3 von der zweiten Ordnung ist, und als deren Determinante \mathcal{A} angesehen werden kann:

$$(9.) \quad \mathcal{A} = c_1^2(c_{11} - m^2 - \mu) + c_2^2(c_{22} - m^2 - \mu) + c_3^2(c_{33} - m^2 - \mu) \\ + 2c_{23}c_2c_3 + 2c_{31}c_3c_1 + 2c_{12}c_1c_2,$$

so nimmt die Gleichung (7.) ohne Weiteres die Form an:

$$(10.) \quad S = \mathcal{A} - \varrho = 0.$$

Diese Gleichung hat merkwürdige Eigenschaften, wodurch sie und die Gleichungen (4.) als eine natürliche Erweiterung derjenigen Gleichungen erscheinen, auf welche man in der Theorie der Säcularstörungen und in so vielen andern Fragen geführt wird. *Sind nämlich die Größen c sämmtlich reell, so sind die Wurzeln der Gleichung (10.) gleichfalls immer reell; und sind etwa noch zwei dieser Wurzeln einander gleich, so reduciren sich die Gleichungen (4.) auf eine einzige, sobald man für m^2 eine dieser gleichen Wurzeln einführt.*

Die Realität der Größen c soll im Folgenden immer vorausgesetzt werden. Hierzu ist es z. B. hinreichend, wenn auf jeder durch ein Molecül gezogenen Linie die von ihr etwa innerhalb der Anziehungssphäre getroffenen Molecüle sich symmetrisch vertheilen. Denn wenn man unter dieser Voraussetzung die Exponentialgrößen in μ, H, K nach Potenzen entwickelt und die Summe ausführt, so entspricht jedem Punkte m_1 ein anderer, dessen

relative Coordinaten $x_1 - x$, $y_1 - y$, $z_1 - z$ sich von denen des ersteren nur durch das Vorzeichen unterscheiden. Indem man daher das von solchen Punkten herrührende zusammennimmt, zeigt es sich, daß alle Glieder, welche ungerade Dimensionen der relativen Coordinaten oder ungerade Potenzen von $\gamma - 1$ enthalten, sich gegenseitig zerstören, und daß die Functionen μ , H , K daher nothwendig reell sind; ebenso aber dann auch die c , welche durch Differentiation aus diesen fließen.

Ich werde aber die oben angedeuteten Sätze nunmehr zunächst nicht an dem System (4.) sondern an dem allgemeinsten System beweisen, welches sich in analoger Weise aufstellen läßt. Dasselbe ist folgendes:

$$(11.) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_1 x = (c_{11} A_1 + c_{12} A_2 + c_{13} A_3 + \dots + c_{1n} A_n) \\ \qquad \qquad \qquad + \sqrt{-1}(b_{11} A_1 + b_{12} A_2 + b_{13} A_3 + \dots + b_{1n} A_n), \\ A_2 x = (c_{21} A_1 + c_{22} A_2 + c_{23} A_3 + \dots + c_{2n} A_n) \\ \qquad \qquad \qquad + \sqrt{-1}(b_{21} A_1 + b_{22} A_2 + b_{23} A_3 + \dots + b_{2n} A_n), \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ A_n x = (c_{n1} A_1 + c_{n2} A_2 + c_{n3} A_3 + \dots + c_{nn} A_n) \\ \qquad \qquad \qquad + \sqrt{-1}(b_{n1} A_1 + b_{n2} A_2 + b_{n3} A_3 + \dots + b_{nn} A_n); \end{array} \right.$$

wobei

$$(12.) \quad c_{ik} = c_{ki}, \quad b_{ik} + b_{ki} = 0, \quad b_{ii} = 0,$$

so daß die c die Elemente einer symmetrischen Determinante, die b dagegen die einer Determinante bedeuten, deren gegen die Diagonale symmetrisch liegende Elemente entgegengesetztes Vorzeichen haben. Das System (11.) geht für $n = 3$ in das System (4.) über, wenn

$$c_1 = b_{32} = -b_{23}, \quad c_2 = b_{13} = -b_{31}, \quad c_3 = b_{21} = -b_{12}$$

gesetzt wird.

Da die Größen c , b sämmtlich reell vorausgesetzt werden, so kann man setzen:

$$(13.) \quad A_i = P_i + Q_i \sqrt{-1},$$

und das System (11.) in die beiden zerfallen:

$$(14.) \quad \begin{cases} \mathbf{P}_i \mathbf{x} = (\mathbf{c}_{i1} \mathbf{P}_1 + \mathbf{c}_{i2} \mathbf{P}_2 + \dots + \mathbf{c}_{in} \mathbf{P}_n) - (\mathbf{b}_{i1} \mathbf{Q}_1 + \mathbf{b}_{i2} \mathbf{Q}_2 + \dots + \mathbf{b}_{in} \mathbf{Q}_n), \\ \mathbf{Q}_i \mathbf{x} = (\mathbf{c}_{i1} \mathbf{Q}_1 + \mathbf{c}_{i2} \mathbf{Q}_2 + \dots + \mathbf{c}_{in} \mathbf{Q}_n) + (\mathbf{b}_{i1} \mathbf{P}_1 + \mathbf{b}_{i2} \mathbf{P}_2 + \dots + \mathbf{b}_{in} \mathbf{P}_n), \end{cases}$$

wo denn die P, Q sämmtlich reell sein können, sobald x reell ist. Ist ferner x' eine andere Wurzel der Gleichung vom n^{ten} Grade

$$(15.) \quad S=0 = \begin{vmatrix} c_{11}+b_{11}\sqrt{-1}-x & c_{12}+b_{12}\sqrt{-1} & c_{13}+b_{13}\sqrt{-1} & \dots & c_{1n}+b_{1n}\sqrt{-1} \\ c_{21}+b_{21}\sqrt{-1} & c_{22}+b_{22}\sqrt{-1}-x & c_{23}+b_{23}\sqrt{-1} & \dots & c_{2n}+b_{2n}\sqrt{-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1}+b_{n1}\sqrt{-1} & c_{n2}+b_{n2}\sqrt{-1} & c_{n3}+b_{n3}\sqrt{-1} & \dots & c_{nn}+b_{nn}\sqrt{-1}-x \end{vmatrix},$$

welche man für x aus (11.) durch Elimination der A erhält, und sind P' , Q' für x' dasselbe, was P , Q für x , so ist auch

$$P'_i x' = (c_{i1} P'_1 + c_{i2} P'_2 + \dots + c_{in} P'_n) - (b_{i1} Q'_1 + b_{i2} Q'_2 + \dots + b_{in} Q'_n),$$

$$Q'_i x' = (c_{i1} Q'_1 + c_{i2} Q'_2 + \dots + c_{in} Q'_n) + (b_{i1} P'_1 + b_{i2} P'_2 + \dots + b_{in} P'_n);$$

und wenn man nun diese Gleichungen mit Q_i , P_i , die Gleichungen (14.) mit Q'_i , P'_i multiplicirt, so erhält man leicht nach einem bekannten Satz über die homogenen Functionen zweiter Ordnung die Combinationen:

$$(x-x') \sum_i P_i P'_i = \sum_i \sum_k b_{ik} (P_i Q'_k - Q_k P'_i),$$

$$(x-x') \sum_i Q_i Q'_i = \sum_i \sum_k b_{ik} (P_k Q'_i - Q_i P'_k),$$

$$(x-x') \sum_i Q_i P'_i = \sum_i \sum_k b_{ik} (P_k P'_i + Q_i Q'_k),$$

$$(x-x') \sum_i Q'_i P_i = - \sum_i \sum_k b_{ik} (P_i P'_k + Q_k Q'_i).$$

Da nun die rechten Theile nach (12.) ihre Zeichen ändern, wenn man die Indices i , k vertauscht, so folgen hieraus, wenn x , x' von einander verschieden sind, die Gleichungen

$$(16.) \quad \begin{cases} \sum_i P_i P'_i + \sum_i Q_i Q'_i = 0, \\ \sum_i P_i Q'_i - \sum_i Q_i P'_i = 0, \end{cases}$$

welche Fundamentealeigenschaften des Systems (11.) angeben.

Die erste Gleichung (16.) zeigt, *dass alle Wurzeln der Gleichung (15.) reell sein müssen*. Denn hätte x die Form $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, so könnte, da die Coefficienten in S offenbar sämmtlich reell sind, x' die Form $\alpha - \beta\sqrt{-1}$ annehmen. Dann könnte man aber auch setzen

$$P_i = R_i + S_i\sqrt{-1}, \quad Q_i = T_i + U_i\sqrt{-1},$$

$$P'_i = R_i - S_i\sqrt{-1}, \quad Q'_i = T_i - U_i\sqrt{-1},$$

und die erste Gleichung (16.) ginge über in

$$\sum_i (R_i^2 + S_i^2 + T_i^2 + U_i^2) = 0,$$

was unmöglich ist, da die R , S , T , U sämmtlich reelle Größen bedeuten.

Sind aber zwei Wurzeln der Gleichung $S=0$ einander gleich, so reduciren sich die n Gleichungen (11.) auf nicht mehr als $n-2$ von einander verschiedene. Es muß nämlich alsdann aufser S auch noch $\frac{\partial S}{\partial x}$

verschwinden. Bezeichnet man nun durch S_{ik} die Differentialquotienten der Determinante S nach ihren einzelnen Elementen, so ist die Gleichung $\frac{\partial S}{\partial x} = 0$ identisch mit der folgenden:

$$(17.) \quad S_{11} + S_{22} + \dots + S_{nn} = 0.$$

Da aber S verschwindet, so kann man bekanntlich immer solche Größen p_1, q_1, \dots bestimmen, dafs

$$S_{ik} = p_i q_k, \quad S_{ki} = p_k q_i.$$

Nun zeigt der blofse Anblick von S , dafs S_{ki} und S_{ik} sich nur durch das Vorzeichen ihres imaginären Theils von einander unterscheiden. Man kann daher auch die p, q immer so bestimmen, dafs zwischen p_i, q_i nur derselbe Unterschied stattfindet, d. h. dafs

$$p_i = \alpha_i + \beta_i \sqrt{-1}, \quad q_i = \alpha_i - \beta_i \sqrt{-1}.$$

Führt man nun dies in (17.) ein, so erhält man

$$\sum_i (\alpha_i^2 + \beta_i^2) = 0,$$

d. h. alle α, β müssen verschwinden, mithin auch alle S_{ik} ; und dies giebt genau die oben bezeichnete Eigenschaft, dafs die Gleichungen (11.) sich auf nicht mehr als $n-2$ reduciren.

Hierdurch sind die beiden angegebenen Sätze auch für das System (4.) und die Gleichung (7.) bewiesen. Indefs ist es zweckmäfsig, den ersten derselben noch direct aus der Form (10.) abzuleiten, was sehr leicht ist, und was zugleich Grenzen für die Lage der Wurzeln angiebt. Zu diesem Ende denke ich mir drei lineare Verbindungen a_1, a_2, a_3 der c_1, c_2, c_3 so bestimmt, dafs die beiden identischen Gleichungen erfüllt werden

$$\begin{aligned} \sum c_i c_k c_{ik} &= \lambda_1 a_1^2 + \lambda_2 a_2^2 + \lambda_3 a_3^2, \\ c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 &= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2. \end{aligned}$$

Nach der Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung ist dies immer auf reelle Weise möglich; und zwar bestimmen sich die λ aus der cubischen Gleichung

$$\begin{vmatrix} c_{11} - \lambda, & c_{12}, & c_{13} \\ c_{21}, & c_{22} - \lambda, & c_{23} \\ c_{31}, & c_{32}, & c_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

so dafs man offenbar die identische Gleichung hat:

$$A = (\lambda_1 - m^2 - \mu)(\lambda_2 - m^2 - \mu)(\lambda_3 - m^2 - \mu).$$

Daher nimmt die Gleichung (10.), indem man diese Werthe in dieselbe einführt, die Gestalt an:

$$0 = (\lambda_1 - m^2 - \mu)(\lambda_2 - m^2 - \mu)(\lambda_3 - m^2 - \mu) \\ - a_1^2(\lambda_1 - m^2 - \mu) - a_2^2(\lambda_2 - m^2 - \mu) - a_3^2(\lambda_3 - m^2 - \mu).$$

Setzt man hier der Reihe nach $m^2 + \mu = +\infty$, λ_1 , λ_3 , $-\infty$ und ist $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$, so findet sich der Ausdruck rechts abwechselnd positiv und negativ. Und dies giebt also den Satz:

Von den drei Wurzeln der Gleichung (10.) ist eine gröfser als die gröfste Wurzel der Gleichung $A=0$, eine andere kleiner als die kleinste Wurzel jener Gleichung, während die dritte zwischen der gröfsten und kleinsten Wurzel derselben liegt.

§. 4.

Bewegungsellipsen für die drei Wellen.

Um die wirklichen Bewegungen anzugeben, welche den Integralen (3.) entsprechen, hat man nur diese auf ihre reellen Theile zu reduciren, welche den Bewegungsgleichungen für sich genügen müssen. Hierbei ist zu bemerken, dafs die A , B , C einen gemeinschaftlichen Factor $e^{\frac{2\pi m\tau}{\lambda}\sqrt{-1}}$ enthalten können, welcher wegen der darin enthaltenen willkürlichen Constante τ ganz beliebig ist. Setzt man also

$$(17^a.) \quad \begin{cases} A = (A' + A''\sqrt{-1})e^{\frac{2\pi m\tau}{\lambda}\sqrt{-1}}, \\ B = (B' + B''\sqrt{-1})e^{\frac{2\pi m\tau}{\lambda}\sqrt{-1}}, \\ C = (C' + C''\sqrt{-1})e^{\frac{2\pi m\tau}{\lambda}\sqrt{-1}}, \end{cases}$$

so werden die reellen Theile von (3.) folgende:

$$(18.) \quad \begin{cases} u = A' \cos\left(\frac{\alpha x + \beta y + \gamma z - m(t-\tau)}{\lambda} 2\pi\right) - A'' \sin\left(\frac{\alpha x + \beta y + \gamma z - m(t-\tau)}{\lambda} 2\pi\right), \\ v = B' \cos\left(\frac{\alpha x + \beta y + \gamma z - m(t-\tau)}{\lambda} 2\pi\right) - B'' \sin\left(\frac{\alpha x + \beta y + \gamma z - m(t-\tau)}{\lambda} 2\pi\right), \\ w = C' \cos\left(\frac{\alpha x + \beta y + \gamma z - m(t-\tau)}{\lambda} 2\pi\right) - C'' \sin\left(\frac{\alpha x + \beta y + \gamma z - m(t-\tau)}{\lambda} 2\pi\right), \end{cases}$$

wenn, wie im Folgenden vorausgesetzt werden soll, m reell ist. Für die Bewegungen, welche den beiden andern Wurzeln der cubischen Gleichung entsprechen, sollen m , τ , A' etc. die Indices 1, 2 erhalten, und auch diese Wurzeln sollen als reell betrachtet werden.

Die Gleichungen (18.) stellen eine Ellipse dar, deren Mittelpunkt in die Ruhelage des bewegten Molecüls fällt, und deren Ebene durch die Gleichung

$$(19.) \quad 0 = u(B'C'' - C'B'') + v(C'A'' - A'C'') + w(A'B'' - B'A'')$$

ausgedrückt ist. Diese Ellipse hat ferner zwei conjugirte Durchmesser, deren Endpunkte die Coordinaten A', B', C' und A'', B'', C'' haben; denn um den Endpunkt des Durchmessers A', B', C' zu finden, hat man nur $\alpha x + \beta y + \gamma z - m(t - \tau)$ gleich Null zu setzen; und man erhält für eben diesen Werth dann leicht

$$du : dv : dw = A' : B' : C';$$

d. h. die Tangente am Endpunkte des einen Durchmessers ist dem andern parallel, daher die Durchmesser conjugirt, wie es sein sollte.

Die Curve aber, welche die Gleichungen (18.) darstellen, bleibt ungeändert, wenn man das Argument des sin. und cos. um eine beliebige Gröfse ϑ vermehrt und vermindert. Setzt man dann der Kürze wegen

$$(20.) \quad U = \frac{2\pi}{\lambda}(\alpha x + \beta y + \gamma z - m(t - \tau)) - \vartheta,$$

so gehen die Gleichungen (18.) über in

$$(21.) \quad \begin{cases} u = (A' \cos \vartheta - A'' \sin \vartheta) \cos U - (A' \sin \vartheta + A'' \cos \vartheta) \sin U, \\ v = (B' \cos \vartheta - B'' \sin \vartheta) \cos U - (B' \sin \vartheta + B'' \cos \vartheta) \sin U, \\ w = (C' \cos \vartheta - C'' \sin \vartheta) \cos U - (C' \sin \vartheta + C'' \cos \vartheta) \sin U. \end{cases}$$

Diese Formeln stellen, da ϑ ganz beliebig ist, die Curve dar, bezogen auf ein beliebiges System conjugirter Durchmesser, deren Endpunkte die Coordinaten haben:

$$\begin{aligned} &A' \cos \vartheta - A'' \sin \vartheta, \quad B' \cos \vartheta - B'' \sin \vartheta, \quad C' \cos \vartheta - C'' \sin \vartheta, \\ &A' \sin \vartheta + A'' \cos \vartheta, \quad B' \sin \vartheta + B'' \cos \vartheta, \quad C' \sin \vartheta + C'' \cos \vartheta. \end{aligned}$$

In den drei Ellipsen, welche den drei Wellen angehören, kann man nun immer leicht drei Radien angeben, welche gegen einander rechtwinklig sind; denn wenn man diese als erste conjugirte Durchmesser in die Bewegungsellipsen einführen will, so hat man nur $\vartheta, \vartheta_1, \vartheta_2$ so zu bestimmen, daß die drei Richtungen, deren Cosinus sich verhalten wie

$$\begin{aligned} &A' \cos \vartheta - A'' \sin \vartheta, \quad B' \cos \vartheta - B'' \sin \vartheta, \quad C' \cos \vartheta - C'' \sin \vartheta, \\ &A_1' \cos \vartheta_1 - A_1'' \sin \vartheta_1, \quad B_1' \cos \vartheta_1 - B_1'' \sin \vartheta_1, \quad C_1' \cos \vartheta_1 - C_1'' \sin \vartheta_1, \\ &A_2' \cos \vartheta_2 - A_2'' \sin \vartheta_2, \quad B_2' \cos \vartheta_2 - B_2'' \sin \vartheta_2, \quad C_2' \cos \vartheta_2 - C_2'' \sin \vartheta_2, \end{aligned}$$

rechte Winkel einschließen. Bemerkt man aber, daß die Gleichungen (16.) alsdann in die folgenden übergehen, welche die allgemeinen Beziehungen der Ellipsen gegen einander characterisiren:

$$(22.) \quad \begin{cases} (A'_1 A'_2 + B'_1 B'_2 + C'_1 C'_2) + (A''_1 A''_2 + B''_1 B''_2 + C''_1 C''_2) = 0, \\ (A'_2 A' + B'_2 B' + C'_2 C') + (A''_2 A'' + B''_2 B'' + C''_2 C'') = 0, \\ (A' A'_1 + B' B'_1 + C' C'_1) + (A'' A''_1 + B'' B''_1 + C'' C''_1) = 0, \\ (A'_1 A'_2 + B'_1 B'_2 + C'_1 C'_2) - (A'_2 A'_1 + B'_2 B'_1 + C'_2 C'_1) = 0, \\ (A'_2 A'' + B'_2 B'' + C'_2 C'') - (A' A'_2 + B' B'_2 + C' C'_2) = 0, \\ (A' A'_1 + B' B'_1 + C' C'_1) - (A'_1 A'' + B'_1 B'' + C'_1 C'') = 0, \end{cases}$$

so erhält man für die ϑ die Gleichungen

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\vartheta_1 + \vartheta_2) &= \frac{A'_1 A'_2 + B'_1 B'_2 + C'_1 C'_2}{A'_1 A'_2 + B'_1 B'_2 + C'_1 C'_2}, \\ \operatorname{tg}(\vartheta_2 + \vartheta) &= \frac{A'_2 A' + B'_2 B' + C'_2 C'}{A'_2 A'' + B'_2 B'' + C'_2 C''}, \\ \operatorname{tg}(\vartheta + \vartheta_1) &= \frac{A' A'_1 + B' B'_1 + C' C'_1}{A' A'_1 + B' B'_1 + C' C'_1}, \end{aligned}$$

welche offenbar unter allen Umständen neben einander bestehen können.

In den Gleichungen (18.) bezeichnen aber A', B', C' noch den Endpunkt eines ganz beliebigen Durchmessers, da es nur darauf ankommt die willkürliche Constante τ gehörig zu bestimmen, um bei gegebenen Werthen von A, B, C jeden beliebigen Durchmesser durch die Coordinaten A', B', C' darzustellen. Ich werde daher in dem Folgenden durch $A', B', C', A'_1, B'_1, C'_1, A'_2, B'_2, C'_2$ die Endpunkte dreier Durchmesser bezeichnen, welche gegen einander senkrecht gerichtet sind. Es bestehen daher jetzt die Gleichungen

$$(23.) \quad \begin{cases} A'_1 A'_2 + B'_1 B'_2 + C'_1 C'_2 = 0, \\ A'_2 A' + B'_2 B' + C'_2 C' = 0, \\ A' A'_1 + B' B'_1 + C' C'_1 = 0. \end{cases}$$

Aus (22.) folgen dann sogleich die andern:

$$(24.) \quad \begin{cases} A''_1 A''_2 + B''_1 B''_2 + C''_1 C''_2 = 0, \\ A''_2 A'' + B''_2 B'' + C''_2 C'' = 0, \\ A'' A''_1 + B'' B''_1 + C'' C''_1 = 0. \end{cases}$$

Und so hat man den Satz:

Die Durchmesser der drei Ellipsen, welche zu drei gegen einander senkrechten conjugirt sind, sind wiederum gegen einander senkrecht.

Man kann daher jedes dieser beiden Systeme von Durchmessern als Axen eines rechtwinkligen Coordinatensystems betrachten; und bezeichnet man die Coordinaten der Systeme durch u', v', w' und u'', v'', w'' , so hat man zur Transformation derselben in das System u, v, w die Gleichungen:

$$(25.) \quad \begin{cases} p' u' = A'u + B'v + C'w, & p'' u'' = A''u + B''v + C''w, \\ p'_1 v' = A'_1 u + B'_1 v + C'_1 w, & p''_1 v'' = A''_1 u + B''_1 v + C''_1 w, \\ p'_2 w' = A'_2 u + B'_2 v + C'_2 w, & p''_2 w'' = A''_2 u + B''_2 v + C''_2 w, \end{cases}$$

wo der Kürze wegen gesetzt ist

$$(26.) \quad p'_i = \sqrt{A_i'^2 + B_i'^2 + C_i'^2}, \quad p''_i = \sqrt{A_i''^2 + B_i''^2 + C_i''^2}.$$

Durch Auflösung der Gleichungen (25.) aber erhält man dann die Formeln:

$$(27.) \quad \begin{cases} u = \frac{A'}{p'} u' + \frac{A'_1}{p'_1} v' + \frac{A'_2}{p'_2} w' = \frac{A''}{p''} u'' + \frac{A''_1}{p''_1} v'' + \frac{A''_2}{p''_2} w'', \\ v = \frac{B'}{p'} u' + \frac{B'_1}{p'_1} v' + \frac{B'_2}{p'_2} w' = \frac{B''}{p''} u'' + \frac{B''_1}{p''_1} v'' + \frac{B''_2}{p''_2} w'', \\ w = \frac{C'}{p'} u' + \frac{C'_1}{p'_1} v' + \frac{C'_2}{p'_2} w' = \frac{C''}{p''} u'' + \frac{C''_1}{p''_1} v'' + \frac{C''_2}{p''_2} w''. \end{cases}$$

Hieraus ist es leicht die Systeme u', v', w' und u'', v'', w'' durch einander auszudrücken. Setzt man den Gleichungen (22.) zufolge

$$(28.) \quad \begin{cases} A'_1 A'_2 + B'_1 B'_2 + C'_1 C'_2 = A'_2 A'_1 + B'_2 B'_1 + C'_2 C'_1 = b, \\ A'_2 A'' + B'_2 B'' + C'_2 C'' = A' A'_2 + B' B'_2 + C' C'_2 = b_1, \\ A' A'_1 + B' B'_1 + C' C'_1 = A'_1 A'' + B'_1 B'' + C'_1 C'' = b_2, \end{cases}$$

und ferner

$$(29.) \quad \begin{cases} A' A'' + B' B'' + C' C'' = a, \\ A'_1 A'_1 + B'_1 B'_1 + C'_1 C'_1 = a_1, \\ A'_2 A'_2 + B'_2 B'_2 + C'_2 C'_2 = a_2, \end{cases}$$

so erhält man durch Auflösung der Formeln (27.) nach u', v', w' oder nach u'', v'', w'' :

$$(30.) \quad \begin{cases} p' u' = \frac{a u''}{p''} + \frac{b_2 v''}{p'_1} + \frac{b_1 w''}{p'_2}, & p'' u'' = \frac{a u'}{p'} + \frac{b_2 v'}{p'_1} + \frac{b_1 w'}{p'_2}, \\ p'_1 v' = \frac{b_2 u''}{p''} + \frac{a_1 v''}{p'_1} + \frac{b w''}{p'_2}, & p''_1 v'' = \frac{b_2 u'}{p'} + \frac{a_1 v'}{p'_1} + \frac{b w'}{p'_2}, \\ p'_2 w' = \frac{b_1 u''}{p''} + \frac{b v''}{p'_1} + \frac{a_2 w''}{p'_2}, & p''_2 w'' = \frac{b_1 u'}{p'} + \frac{b v'}{p'_1} + \frac{a_2 w'}{p'_2}. \end{cases}$$

Diese Formeln unterscheiden sich von einander nur dadurch, daß in dem einen System p', p'_1, p'_2 , wo in dem andern p'', p''_1, p''_2 auftreten. Bildet

man nun die bekannten Gleichungen, welche die Systeme als rechtwinklig characterisiren, so finden sich für die Verhältnisse der p'^2 dieselben Gleichungen, wie für die der p''^2 , und man hat daher

$$p'^2 : p_1'^2 : p_2'^2 = p''^2 : p_1''^2 : p_2''^2,$$

oder da die p nothwendig positiv sind,

$$p' : p_1' : p_2' = p'' : p_1'' : p_2'',$$

so dafs man setzen kann

$$(31.) \quad p'_i = r' p_i, \quad p''_i = r'' p_i.$$

Da aber die p' etc. nichts anderes sind als die Längen der conjugirten Halbmesser, so folgt hieraus der Satz:

In jeder der Ellipsen stehen die Längen der gedachten beiden Durchmesser in demselben Verhältniſs zu einander.

Die u', v', w' werden aber dann mit den u'', v'', w'' durch das auch umgekehrt geltende System verbunden:

$$(32.) \quad \begin{cases} r' r'' \cdot u' = \frac{a u''}{p^2} + \frac{b_2 v''}{p p_1} + \frac{b_1 w''}{p p_2}, \\ r' r'' \cdot v' = \frac{b_2 u''}{p p_1} + \frac{a_1 v''}{p_1^2} + \frac{b w''}{p_1 p_2}, \\ r' r'' \cdot w' = \frac{b_1 u''}{p p_2} + \frac{b v''}{p_1 p_2} + \frac{a_2 w''}{p_2^2}. \end{cases}$$

Bildet man nun die bekannten Gleichungen der Orthogonalität, so erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{p^2} + \frac{b_2^2}{p_1^2} + \frac{b_1^2}{p_2^2} &= r'^2 r''^2 p^2, & \frac{b_1 b_2}{p^2} + \frac{b a_1}{p_1^2} + \frac{b a_2}{p_2^2} &= 0, \\ \frac{b_2^2}{p^2} + \frac{a_1^2}{p_1^2} + \frac{b^2}{p_2^2} &= r'^2 r''^2 p_1^2, & \frac{b_1 a}{p^2} + \frac{b_2 b}{p_1^2} + \frac{b_1 a_2}{p_2^2} &= 0, \\ \frac{b_1^2}{p^2} + \frac{b^2}{p_1^2} + \frac{a_2^2}{p_2^2} &= r'^2 r''^2 p_2^2, & \frac{b_2 a}{p^2} + \frac{b_2 a_1}{p_1^2} + \frac{b b_1}{p_2^2} &= 0. \end{aligned}$$

Die letzten Gleichungen erlauben a, a_1, a_2 durch die Gröſsen b, p auszudrücken, und geben dann

$$(33.) \quad \begin{cases} a = \frac{b_1 b_2}{b} - \mu p^2, & a_1 = \frac{b b_2}{b_1} - \mu p_1^2, & a_2 = \frac{b_1 b}{b_2} - \mu p_2^2, & \text{wo} \\ 2\mu = \frac{b_1 b_2}{b p^2} + \frac{b_2 b}{b_1 p_1^2} + \frac{b b_1}{b_2 p_2^2} = b b_1 b_2 \left(\frac{1}{b^2 p^2} + \frac{1}{b_1^2 p_1^2} + \frac{1}{b_2^2 p_2^2} \right); \end{cases}$$

und wodurch die ersten Gleichungen übergehen in:

$$(34.) \quad r'^2 r''^2 = \mu^2, \quad \text{oder} \quad r' r'' = \pm \mu.$$

Es ist hier nur nöthig das *untere* Zeichen zu beachten, da man immer dafür sorgen kann, daß μ selbst oder das Product bb_1b_2 negativ ist. Wenn das Product positiv ist, so braucht man nur alle A'_i, B'_i, C'_i mit $-A'_i, -B'_i, -C'_i$, und die A''_i, B''_i, C''_i mit A'_i, B'_i, C'_i zu vertauschen, was erreicht wird, indem man in (18.) τ_i in $\tau_i + \frac{\lambda}{2m_i}$ übergehen läßt, und wodurch die b nur ihre Vorzeichen, nicht aber ihren absoluten Werth verändern. Es bedeutet dies nichts anderes, als daß man in jeder Ellipse statt des einen conjugirten Halbmessers den andern, statt dieses aber die Verlängerung des ersten einführt.

Dies vorausgeschickt, nehmen mit Hülfe der Gleichungen (33.), (34.) die Transformationsgleichungen (32.) die Gestalt an:

$$(35.) \quad \begin{cases} u'' - u' = \frac{b_1 b_2}{\mu p} \Theta'' = -\frac{b_1 b_2}{\mu p} \Theta', & \Theta'' = \frac{u''}{pb} + \frac{v''}{p_1 b_1} + \frac{w''}{p_2 b_2}, \\ v'' - v' = \frac{b_2 b}{\mu p_1} \Theta'' = -\frac{b_2 b}{\mu p_1} \Theta', & \Theta' = \frac{u'}{pb} + \frac{v'}{p_1 b_1} + \frac{w'}{p_2 b_2}, \\ w'' - w' = \frac{bb_1}{\mu p_2} \Theta'' = -\frac{bb_1}{\mu p_2} \Theta', \\ \text{wo noch} & \Theta' + \Theta'' = 0. \end{cases}$$

Diese Gleichungen zeigen, daß ein und dieselbe Ebene $\Theta' = 0$ oder $\Theta'' = 0$ die Winkel der drei Durchmesserpaare halbt und senkrecht ist gegen die Ebenen der drei Ellipsen; da für alle Punkte dieser Ebene

$$u' = u'', \quad v' = v'', \quad w' = w''.$$

Die drei Bewegungsebenen schneiden sich daher in einer geraden Linie, welche auf dieser Ebene senkrecht steht; und die beiden Systeme rechtwinkliger Durchmesser sind in Bezug auf diese Ebene Spiegelbilder von einander.

Ein letztes Gesetz erhält man, indem man aus (33.) die Combination bildet:

$$\frac{a}{p^2} + \frac{a_1}{p_1^2} + \frac{a_2}{p_2^2} = -\mu = r'r''.$$

Es ist nämlich

$$\frac{a_i}{p_i^2 r'r''} = \frac{A'_i A''_i + B'_i B''_i + C'_i C''_i}{\sqrt{A_i'^2 + B_i'^2 + C_i'^2} \sqrt{A_i''^2 + B_i''^2 + C_i''^2}}$$

nichts anderes als der Cosinus des Winkels, welchen die beiden conjugirten Durchmesser einer Ellipse gegen einander bilden. Bezeichnet man daher durch $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ diese Winkel für die drei Ellipsen, so ist

$$(36.) \quad \cos \varepsilon + \cos \varepsilon_1 + \cos \varepsilon_2 = 1.$$

Die Summe der Cosinus der Winkel, welche die in Rede stehenden Durchmesser in den drei Ellipsen gegen einander bilden, ist Eins.

§. 5.

Isotrope Medien.

Die Gleichungen (4.) gestatten eine vollständige Discussion nur dann, wenn das Medium isotrop ist. In diesem Falle dürfen die Grundfunctionen μ , K , H ihre Werthe nicht verändern, wie auch das Coordinatensystem gedreht werde; d. h. die in ihnen vorkommenden Summen dürfen nur von der Verbindung

$$\frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

abhängig sein. Da ausserdem nach (5.) bei einer Entwicklung nach fallenden Potenzen von λ offenbar μ , H , K sämmtlich mit der 0^{ten} Potenz von λ , und bezüglich mit der 0^{ten}, 2^{ten}, 1^{ten} von $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ beginnen müssen, so kann man setzen

$$\begin{aligned}\mu &= \mu_0 + \frac{\mu_1}{\lambda^2} + \frac{\mu_2}{\lambda^4} + \dots, \\ H &= h_0 \frac{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^2}{4} + h_1 \frac{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^3}{6\lambda^2} + h_2 \frac{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^4}{8\lambda^4} + \dots, \\ K &= \lambda \left\{ k_0 \frac{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}{2} + k_1 \frac{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^2}{4\lambda^2} + k_2 \frac{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^3}{6\lambda^4} + \dots \right\}.\end{aligned}$$

Und demnach wird in Folge der Gleichungen (6.):

$$(37.) \quad \begin{cases} c_{11} = h + \alpha^2 h', & c_{23} = \beta \gamma h', & c_1 = \alpha k, \\ c_{22} = h + \beta^2 h', & c_{31} = \gamma \alpha h', & c = \beta k, \\ c_{33} = h + \gamma^2 h', & c_{12} = \alpha \beta h', & c_3 = \gamma k, \end{cases}$$

wo die Constanten h , h' , k die Bedeutung haben:

$$(38.) \quad \begin{cases} h = h_0 + \frac{h_1}{\lambda^2} + \frac{h_2}{\lambda^4} + \dots, \\ h' = 2h_0 + 4\frac{h_1}{\lambda^2} + 6\frac{h_2}{\lambda^4} + \dots, \\ k = \lambda \left(k_0 + \frac{k_1}{\lambda^2} + \frac{k_2}{\lambda^4} + \dots \right). \end{cases}$$

Durch Einführung dieser Bezeichnungen gehen die Gleichungen (4.) in die folgenden über:

$$(39.) \quad \begin{cases} A(m^2 + \mu - h) = \alpha h'(\alpha A + \beta B + \gamma C) + k(\beta C - \gamma B)\sqrt{-1}, \\ B(m^2 + \mu - h) = \beta h'(\alpha A + \beta B + \gamma C) + k(\gamma A - \alpha C)\sqrt{-1}, \\ C(m^2 + \mu - h) = \gamma h'(\alpha A + \beta B + \gamma C) + k(\alpha B - \beta A)\sqrt{-1}. \end{cases}$$

Um die cubische Gleichung zu bilden, deren Wurzeln die mit m^2 bezeichneten Größen werden, hat man nach (10.) die Functionen zu bilden:

$$A = \begin{vmatrix} \alpha^2 h' - m^2 - \mu + h, & \alpha \beta h', & \alpha \gamma h' \\ \alpha \beta h', & \beta^2 h' - m^2 - \mu + h, & \beta \gamma h' \\ \alpha \gamma h', & \beta \gamma h', & \gamma^2 h' - m^2 - \mu + h \end{vmatrix} = (h - \mu - m^2)^2 (h + h' - \mu - m^2),$$

$$A = k^2 [\alpha^2 (\alpha^2 h' - m^2 - \mu + h) + \beta^2 (\beta^2 h' - m^2 - \mu + h) + \gamma^2 (\gamma^2 h' - m^2 - \mu + h) + 2\alpha^2 \beta^2 h' + 2\beta^2 \gamma^2 h' + 2\gamma^2 \alpha^2 h']$$

$$= k^2 (h' + h - \mu - m^2);$$

und die Gleichung (10.) löst sich daher in die Factoren auf:

$$(40.) \quad \begin{cases} m^2 = h + h' - \mu, \\ m^2 = h - \mu + k, \\ m^2 = h - \mu - k. \end{cases}$$

Für die erste dieser Gleichungen gehen dann die Gleichungen (39.) über in

$$\frac{A}{\alpha} = \frac{B}{\beta} = \frac{C}{\gamma}.$$

In dieser Welle sind daher die Schwingungen geradlinig und longitudinal; die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in derselben ist unabhängig von den Constanten der Circularpolarisation, und reducirt sich auf einen constanten Term, welchem andere folgen, die den geraden Potenzen der reciproken Wellenlänge proportional sind.

Für die zweite und dritte Welle aber werden diese Gleichungen:

$$(41.) \quad \begin{cases} \pm kA = \alpha h'(\alpha A + \beta B + \gamma C) + k(\beta C - \gamma B)\sqrt{-1}, \\ \pm kB = \beta h'(\alpha A + \beta B + \gamma C) + k(\gamma A - \alpha C)\sqrt{-1}, \\ \pm kC = \gamma h'(\alpha A + \beta B + \gamma C) + k(\alpha B - \beta A)\sqrt{-1}. \end{cases}$$

Multiplicirt man hier die erste mit α , die zweite mit β , die dritte mit γ und addirt, so kommt

$$(42.) \quad \alpha A + \beta B + \gamma C = 0;$$

oder, wenn man die A, B, C in der Form (17^a.) darstellt:

$$\alpha A' + \beta B' + \gamma C' = 0, \quad \alpha A'' + \beta B'' + \gamma C'' = 0.$$

Die Bewegungscurven liegen also in der Wellenebene; die Schwingungen sind transversal. Benutzt man aber die Gleichung (42.) und summirt die Quadrate

der Gleichungen (41.), so kommt

$$A^2 + B^2 + C^2 = 0,$$

was sich auflöst in

$$A'A'' + B'B'' + C'C'' = 0, \quad A'^2 + B'^2 + C'^2 = A''^2 + B''^2 + C''^2.$$

Diese beiden Gleichungen zeigen, dafs zwei conjugirte Durchmesser der Bewegungscurve gleich grofs sind und sich senkrecht durchschneiden. Die Bewegungscurven sind daher **Kreise**.

Nennt man m_1, m_2 die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten dieser Wellen, so findet sich

$$\frac{m_1^2 - m_2^2}{m_1^2 + m_2^2} = \frac{k}{h - \mu}.$$

Hier beginnt der Zähler mit der ersten Potenz von λ , und es folgen die ungeraden negativen Potenzen; der Nenner aber beginnt mit einer reinen Constanten, auf welche gerade negative Potenzen von λ folgen. Sind die Constanten des Zählers klein, so kann man in dieser Formel die m zum Theil durch den Mittelwerth

$$m = \sqrt{h - \mu} = \sqrt{h_0 - \mu_0} \dots$$

ersetzen, und hat dann:

$$\frac{m_1 - m_2}{m} = \frac{k_0 \lambda + k_1 \lambda^{-1}}{h_0 - \mu_0} + \dots$$

Diese Resultate sind aus einem andern Gesichtspunkte schon von **Cauchy** im 15^{ten} Bande der *Comptes rendus* pag. 1076 ff. entwickelt worden. Dieselben sind hier vorangeschickt, da die Resultate für krystallinische Medien sich in erster Annäherung immer auf diese zurückführen lassen.

§. 6.

Zweiaxige Medien. Zerlegung der cubischen Gleichung.

Ich gehe zu dem Fall über, wo sich durch jeden Punkt drei gegen einander senkrechte Ebenen legen lassen, gegen welche die angrenzenden Molecüle symmetrisch vertheilt sind. Alsdann können die Grundfunctionen μ, H, k keine ungeraden Potenzen von α, β, γ enthalten. Indem man aber zugleich die höhern Potenzen der reciproken Wellenlänge vernachlässigt, und jedesmal nur die niedrigste beibehält, wird

$$(43.) \quad \begin{cases} \mu = a_1 \alpha^2 + a_2 \beta^2 + a_3 \gamma^2, \\ k = \frac{1}{2} (k_1 \alpha^2 + k_2 \beta^2 + k_3 \gamma^2), \\ H = \frac{1}{4} (a_{11} \alpha^4 + a_{22} \beta^4 + a_{33} \gamma^4 + 2a_{23} \beta^2 \gamma^2 + 2a_{31} \gamma^2 \alpha^2 + 2a_{12} \alpha^2 \beta^2). \end{cases}$$

Hier sind die a reine Constanten, während die k der Wellenlänge proportional werden. Wenn man diese Werthe nun zur Bildung der c zu Grunde legt, so erhält man

$$(44.) \quad \begin{cases} c_{11} = 3\alpha^2 a_{11} + \beta^2 a_{12} + \gamma^2 a_{13}, & c_{23} = 2\beta\gamma a_{23}, & c_1 = \alpha k_1, \\ c_{22} = \alpha^2 a_{12} + 3\beta^2 a_{22} + \gamma^2 a_{23}, & c_{31} = 2\gamma\alpha a_{31}, & c_2 = \beta k_2, \\ c_{33} = \alpha^2 a_{13} + \beta^2 a_{23} + 3\gamma^2 a_{33}, & c_{12} = 2\alpha\beta a_{12}, & c_3 = \gamma k_3, \end{cases}$$

und die Gleichungen (4.) nehmen die Gestalt an:

$$(45.) \quad \begin{cases} 0 = A(\alpha^2 a_{11} + \beta^2 a_{12} + \gamma^2 a_{13} - m^2 - \mu) + 2\alpha(\alpha A a_{11} + \beta B a_{12} + \gamma C a_{13}) \\ \quad \quad \quad + \sqrt{-1}(\beta k_2 C - \gamma k_3 B), \\ 0 = B(\alpha^2 a_{12} + \beta^2 a_{22} + \gamma^2 a_{23} - m^2 - \mu) + 2\beta(\alpha A a_{12} + \beta B a_{22} + \gamma C a_{23}) \\ \quad \quad \quad + \sqrt{-1}(\gamma k_3 A - \alpha k_1 C), \\ 0 = C(\alpha^2 a_{13} + \beta^2 a_{23} + \gamma^2 a_{33} - m^2 - \mu) + 2\gamma(\alpha A a_{13} + \beta B a_{23} + \gamma C a_{33}) \\ \quad \quad \quad + \sqrt{-1}(\alpha k_1 B - \beta k_2 A). \end{cases}$$

Da aber in der Natur alle krystallinischen Medien sich nur sehr wenig von unkrystallinischen unterscheiden, so darf man in diesen Gleichungen annehmen, daß die a_{11} , a_{12} , etc. sich von einem Mittelwerth a wenig entfernen, so daß die Differenzen $a_{11} - a_{12}$, etc. gegen die Gröfse a sehr klein sind. Dasselbe von den Coefficienten k vorauszusetzen, scheint vorläufig darum mißlich, weil diese Coefficienten selbst sehr klein sein werden, nämlich von der Ordnung der oben gedachten Differenzen. Doch führen die folgenden Betrachtungen darauf, auch die Differenzen der k als klein gegen den mittleren Werth derselben anzunehmen.

Es kommt zunächst darauf an, die cubische Gleichung für m^2 zu entwickeln, welche die Wellenfläche darstellt, d. h. die Fläche, deren Radien die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der gegen sie senkrechten Wellen darstellen. Zu diesem Zweck sind die Functionen \mathcal{A} und \mathcal{A} zu bilden. Es hat \mathcal{A} den Ausdruck:

$$\mathcal{A} = \begin{vmatrix} 3\alpha^2 a_{11} + \beta^2 a_{12} + \gamma^2 a_{13} - m^2 - \mu, & 2\alpha\beta a_{12}, & 2\alpha\gamma a_{13} \\ 2\alpha\beta a_{12}, & \alpha^2 a_{12} + 3\beta^2 a_{22} + \gamma^2 a_{23} - m^2 - \mu, & 2\beta\gamma a_{23} \\ 2\alpha\gamma a_{13}, & 2\beta\gamma a_{23}, & \alpha^2 a_{13} + \beta^2 a_{23} + 3\gamma^2 a_{33} - m^2 - \mu \end{vmatrix}.$$

Die Untersuchungen von *Cauchy* und *Neumann* haben gezeigt, daß dieser Ausdruck unter gewissen Annahmen in *einen* Factor zerfällt, welcher für m^2 , α^2 , β^2 , γ^2 vom ersten, und einen *andern*, welcher vom zweiten Grade

ist, und von denen der letztere in der Theorie der geradlinigen Polarisation die *Fresnelsche* Wellenfläche darstellt, während der erste für die Lichterscheinungen ohne Bedeutung ist. Nimmt man, da sich ein solcher Factor absondern lassen muß, und derselbe nur linear in α^2 , β^2 , γ^2 sein kann, denselben in der Gestalt an

$$F = p_1 \alpha^2 + p_2 \beta^2 + p_3 \gamma^2 - m^2 - \mu;$$

so muß also \mathcal{A} verschwinden, wenn man diesen Factor gleich Null setzt, d. h. wenn

$$m^2 + \mu = p_1 \alpha^2 + p_2 \beta^2 + p_3 \gamma^2.$$

Führt man dies in dem Ausdruck von \mathcal{A} ein, und läßt zunächst die Coefficienten von α^6 , β^6 , γ^6 verschwinden, so kommt

$$(3a_{11} - p_1)(a_{12} - p_1)(a_{13} - p_1) = 0,$$

$$(3a_{22} - p_2)(a_{23} - p_2)(a_{21} - p_2) = 0,$$

$$(3a_{33} - p_3)(a_{31} - p_3)(a_{32} - p_3) = 0.$$

Diese Gleichungen sind symmetrisch erfüllbar nur durch die Annahme:

$$p_1 = 3a_{11}, \quad p_2 = 3a_{22}, \quad p_3 = 3a_{33}.$$

Daher ist der abzusondernde Factor F nothwendig

$$(46.) \quad F = 3(a_{11}\alpha^2 + a_{22}\beta^2 + a_{33}\gamma^2) - m^2 - \mu.$$

Führt man diese Werthe der p in \mathcal{A} ein, und läßt die Coefficienten von $\alpha^4\beta^2$, etc. verschwinden, so erhält man drei Bedingungen, welchen die a genügen müssen, nämlich

$$(47.) \quad \begin{cases} (3a_{22} - a_{23})(3a_{33} - a_{23}) = 4a_{23}^2, \\ (3a_{33} - a_{31})(3a_{11} - a_{31}) = 4a_{31}^2, \\ (3a_{11} - a_{12})(3a_{22} - a_{12}) = 4a_{12}^2; \end{cases}$$

und indem endlich noch der Coefficient von $\alpha^2\beta^2\gamma^2$ verschwinden muß, erhält man die letzte Bedingung:

$$(48.) \quad 0 = (3a_{11} - a_{12})(3a_{22} - a_{23})(3a_{33} - a_{31}) \\ + (3a_{11} - a_{13})(3a_{22} - a_{21})(3a_{33} - a_{32}) - 16a_{12}a_{23}a_{31}.$$

Es ist bekannt, daß diese vier Gleichungen nicht streng neben einander bestehen können. Denn in Folge der ersten Gleichungen kann man setzen

$$(49.) \quad \begin{cases} 3a_{22} - a_{23} = 2a_{23}e^{\epsilon_1}, & 3a_{33} - a_{23} = 2a_{23}e^{-\epsilon_1}, \\ 3a_{33} - a_{31} = 2a_{31}e^{\epsilon_2}, & 3a_{11} - a_{31} = 2a_{31}e^{-\epsilon_2}, \\ 3a_{11} - a_{12} = 2a_{12}e^{\epsilon_3}, & 3a_{22} - a_{12} = 2a_{12}e^{-\epsilon_3}, \end{cases}$$

wo die ε sehr kleine Gröfsen bedeuten, welche für isotrope Medien verschwinden. Durch Elimination von a_{11} , etc. erhält man hieraus

$$(50.) \quad (1+2e^{\varepsilon_1})(1+2e^{\varepsilon_2})(1+2e^{\varepsilon_3}) = (1+2e^{-\varepsilon_1})(1+2e^{-\varepsilon_2})(1+2e^{-\varepsilon_3}).$$

Aber zugleich geht (48.) über in

$$(51.) \quad \begin{cases} e^{(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)} + e^{-(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)} - 2 = 0, & \text{oder} \\ \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0; \end{cases}$$

wodurch die Gleichung (50.) die Gestalt annimmt

$$(1-e^{\varepsilon_1})(1-e^{\varepsilon_2})(1-e^{\varepsilon_3}) = 0.$$

Es müßte daher eines der ε verschwinden, wodurch das Medium in Bezug auf eine Axe isotrop würde. Dagegen kann man dieselbe als erfüllt ansehen, wenn man überall die Quadrate der Differenzen $a_{11}-a_{12}$, etc. vernachlässigt, wodurch man aus (47.) die Beziehungen erhält:

$$(52.) \quad \begin{cases} a_{22} + a_{33} = 2a_{23} & a_{11} = a_{12} + a_{13} - a_{23}, \\ a_{33} + a_{11} = 2a_{31} & \text{oder} & a_{22} = a_{23} + a_{21} - a_{31}, \\ a_{11} + a_{22} = 2a_{12} & & a_{33} = a_{31} + a_{32} - a_{12}, \end{cases}$$

und wodurch (48.) bis auf Gröfsen höherer Ordnung erfüllt ist. Eine kleine Rechnung ergibt dann für \mathcal{A} die Form:

$$(53.) \quad \mathcal{A} = [3(a_{11}\alpha^2 + a_{22}\beta^2 + a_{33}\gamma^2) - m^2 - \mu] \\ \times [(m^2 + \mu)^2 - (m^2 + \mu)\{(a_{12} + a_{13})\alpha^2 + (a_{23} + a_{21})\beta^2 + (a_{31} + a_{32})\gamma^2\} \\ + a_{12}a_{13}\alpha^2 + a_{21}a_{23}\beta^2 + a_{31}a_{32}\gamma^2].$$

Damit dieser letzte Factor, gleich Null gesetzt, die *Fresnelsche* Wellenfläche darstelle, muß er die Form annehmen:

$$(54.) \quad (m^2 - b^2)(m^2 - c^2)\alpha^2 + (m^2 - c^2)(m^2 - a^2)\beta^2 + (m^2 - a^2)(m^2 - b^2)\gamma^2;$$

und damit dies möglich sei, muß der fragliche Factor vor allem für α^2 , β^2 , γ^2 linear werden; oder in demjenigen Theile desselben, welcher die Quadrate dieser Gröfsen enthält, nämlich

$$\mu[\mu - (a_{12} + a_{13})\alpha^2 - (a_{23} + a_{21})\beta^2 - (a_{31} + a_{32})\gamma^2]$$

muß einer seiner beiden Factoren die Gestalt $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ annehmen. Hier-nach muß also entweder

$$a_1 = a_2 = a_3$$

sein, oder

$$a_1 - a_{12} - a_{13} = a_2 - a_{23} - a_{21} = a_3 - a_{31} - a_{32}.$$

Diese beiden Hypothesen führen zu ganz verschiedenen Folgerungen und müssen neben einander behandelt werden.

1. Ist $a_1 = a_2 = a_3 = f$, so nimmt der zweite Factor von \mathcal{A} die Gestalt (54.) an, wenn man setzt

$$(55.) \quad a^2 = a_{23} - f, \quad b^2 = a_{31} - f, \quad c^2 = a_{12} - f.$$

Diese Hypothese will ich im Folgenden kurz die *Neumannsche* nennen, da sie in ihren Folgerungen auf die von *Neumann* festgehaltene Ansicht von der Lage der Schwingungsrichtung eines polarisirten Strahls führt; obwohl bei *Neumann* selbst (*Poggendorffs Annalen*, Band 25) die Größen a_1, a_2, a_3 sämmtlich gleich Null gesetzt sind, wodurch die dort abgeleiteten Gleichungen keine vollkommene Allgemeinheit haben.

2. Ist

$$a_1 - a_{12} - a_{13} = a_2 - a_{23} - a_{21} = a_3 - a_{31} - a_{32} = -g,$$

so muß man, um die Form (54.) zu erhalten, setzen:

$$(56.) \quad a^2 = g - a_{23}, \quad b^2 = g - a_{31}, \quad c^2 = g - a_{12},$$

und diese Hypothese soll die *Fresnelsche* genannt werden, da sie auf dieselbe Ansicht über die Schwingungsrichtung führt, welche *Fresnel* angegeben hat.

Ich wende mich jetzt zu dem Ausdruck \mathcal{A} , um zu zeigen, dafs auch in diesem der Factor

$$3(a_{11}\alpha^2 + a_{22}\beta^2 + a_{33}\gamma^2) - m^2 - \mu$$

sich absondern läßt, sobald man für die k gewisse Bedingungen annimmt. Der Ausdruck \mathcal{A} hat die Gestalt:

$$\mathcal{A} = \begin{cases} (3\alpha^2 a_{11} + \beta^2 a_{12} + \gamma^2 a_{13} - m^2 - \mu) k_1^2 \alpha^2 + 4\beta^2 \gamma^2 k_2 k_3 a_{23} \\ + (\alpha^2 a_{12} + 3\beta^2 a_{22} + \gamma^2 a_{23} - m^2 - \mu) k_2^2 \beta^2 + 4\gamma^2 \alpha^2 k_3 k_1 a_{31} \\ + (\alpha^2 a_{13} + \beta^2 a_{23} + 3\gamma^2 a_{33} - m^2 - \mu) k_3^2 \gamma^2 + 4\alpha^2 \beta^2 k_1 k_2 a_{12}. \end{cases}$$

Der bloße Anblick dieser Formel lehrt, dafs, wenn sich jener Factor absondern lassen soll, \mathcal{A} nur übergehen kann in

$$(57.) \quad \mathcal{A} = (k_1^2 \alpha^2 + k_2^2 \beta^2 + k_3^2 \gamma^2) [3(a_{11}\alpha^2 + a_{22}\beta^2 + a_{33}\gamma^2) - m^2 - \mu].$$

Die Vergleichung der Coefficienten in beiden Formeln führt dann auf die Bedingungen:

$$k_2^2(3a_{33} - a_{23}) + k_3^2(3a_{22} - a_{23}) = 4k_2 k_3 a_{23},$$

$$k_3^2(3a_{11} - a_{31}) + k_1^2(3a_{33} - a_{31}) = 4k_3 k_1 a_{31},$$

$$k_1^2(3a_{22} - a_{12}) + k_2^2(3a_{11} - a_{12}) = 4k_1 k_2 a_{12}.$$

Führt man hier die Werthe (52.) für a_{11} , a_{22} , a_{33} ein, so kommt

$$3(k_2 + k_3)(a_{12} - a_{13}) = a_{23}(k_2 - k_3),$$

$$3(k_3 + k_1)(a_{23} - a_{21}) = a_{31}(k_3 - k_1),$$

$$3(k_1 + k_2)(a_{31} - a_{32}) = a_{12}(k_1 - k_2).$$

Man erkennt hieraus zunächst, was oben schon angedeutet wurde, daß die Differenzen der k gegen die absoluten Werthe derselben in demselben Verhältniß stehen wie die Differenzen der a gegen ihre absoluten Werthe. Und bezeichnet man ferner durch k , a Mittelwerthe, so erhält man mit Vernachlässigung höherer Potenzen der Differenzen:

$$k_2 - k_3 = \frac{6k}{a}(a_{12} - a_{13}),$$

$$k_3 - k_1 = \frac{6k}{a}(a_{23} - a_{21}),$$

$$k_1 - k_2 = \frac{6k}{a}(a_{31} - a_{32}),$$

Gleichungen, welche offenbar mit einander verträglich sind.

Indem man daher diese Gleichungen bestehen läßt, und also \mathcal{A} in der Form (57.) darstellt, zerfällt die cubische Gleichung für m^2 in die folgenden beiden Factoren:

$$(58.) \quad \left\{ \begin{array}{l} 3(a_{11}\alpha^2 + a_{22}\beta^2 + a_{33}\gamma^2) = m^2 + \mu, \\ (m^2 - b^2)(m^2 - c^2)\alpha^2 + (m^2 - c^2)(m^2 - a^2)\beta^2 + (m^2 - a^2)(m^2 - b^2)\gamma^2 \\ \quad = k_1^2\alpha^2 + k_2^2\beta^2 + k_3^2\gamma^2. \end{array} \right.$$

Und da ferner diese Zerlegung überhaupt nur bis auf Gröfsen höherer Ordnung richtig ist, und die k ohnedies stets von der Ordnung der Differenzen $a^2 - b^2$, etc. sein werden, so kann man auf der rechten Seite ohne gleichberechtigte Gröfsen zu vernachlässigen, statt k_1^2 , k_2^2 , k_3^2 einen Mittelwerth k^2 einführen, wodurch der zweite Factor der cubischen Gleichung auf die einfachere Gestalt zurückkommt:

$$(59.) \quad (m^2 - b^2)(m^2 - c^2)\alpha^2 + (m^2 - c^2)(m^2 - a^2)\beta^2 + (m^2 - a^2)(m^2 - b^2)\gamma^2 = k^2.$$

§. 7.

Schwingungscurven in den drei Wellen.

Wenn man in die Gleichungen (45.) denjenigen Werth von $m^2 + \mu$ einführt, welchen die erste Gleichung (58.) liefert, so wird keiner der Coefficienten von A , B , C von der Ordnung der Differenzen $a^2 - b^2$, etc. Man

ist daher berechtigt, annäherungsweise die Gröfsen a , k durch Mittelwerthe zu ersetzen, und die Gleichungen gehen dann über in:

$$\begin{aligned} 2Aa &= 2\alpha a(\alpha A + \beta B + \gamma C) + \sqrt{-1} \cdot k(\beta C - \gamma B), \\ 2Ba &= 2\beta a(\alpha A + \beta B + \gamma C) + \sqrt{-1} \cdot k(\gamma A - \alpha C), \\ 2Ca &= 2\gamma a(\alpha A + \beta B + \gamma C) + \sqrt{-1} \cdot k(\alpha B - \beta A), \end{aligned}$$

was offenbar ersetzt werden kann durch

$$(60.) \quad \frac{A}{\alpha} = \frac{B}{\beta} = \frac{C}{\gamma}.$$

Man ist daher berechtigt die imaginären Theile der A gleich Null zu setzen, während die reellen sich verhalten wie $\alpha : \beta : \gamma$. *In dieser Welle sind daher die Schwingungen nahezu geradlinig und longitudinal*, und die Constanten der Circularpolarisation üben auf dieselbe fast gar keinen Einfluss aus.

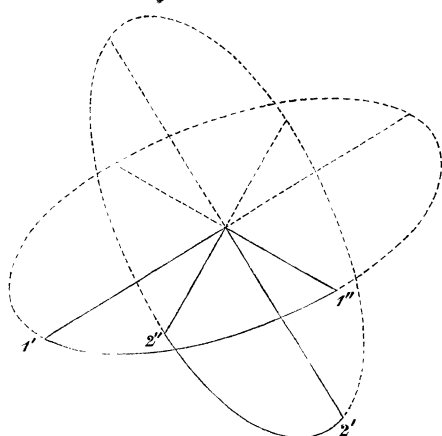
Da also für diese Welle $A'' = B'' = C'' = 0$, so geben die Fundamentalgleichungen (22.) für die andern beiden Wellen die Beziehungen:

$$(61.) \quad \begin{cases} A'_1 \alpha + B'_1 \beta + C'_1 \gamma = 0, & A'_2 \alpha + B'_2 \beta + C'_2 \gamma = 0, \\ A''_1 \alpha + B''_1 \beta + C''_1 \gamma = 0, & A''_2 \alpha + B''_2 \beta + C''_2 \gamma = 0. \end{cases}$$

Die Radian der andern Bewegungsellipsen sind also nahezu in der Wellenebene enthalten, daher die Bewegungen in den beiden andern Wellen nahezu transversal.

Durch Anwendung der im §. 4 bewiesenen allgemeinen Sätze kann man sich eine genauere Vorstellung über die Lage dieser Ellipse bilden. Man hatte dort zwei Systeme von conjugirten Durchmessern zu suchen, deren jedes orthogonal war. Dies kann hier offenbar nicht anders geschehen, als wenn zwei der Durchmesser jedes Systems in der Wellenebene liegen, während die andern in die Normale derselben fallen. Geht man aber auf die Gleichung (36.) zurück, so findet man, daß die beiden nach der Normale gerichteten Halbmesser auf ein und derselben Seite der Wellenebene liegen müssen. Wäre dies nicht der Fall, so wäre der von ihnen eingeschlossene Winkel ε gleich 180° , also $\cos \varepsilon = -1$, mithin nach (36.) nothwendig auch $\cos \varepsilon_1 = 1$, $\cos \varepsilon_2 = 1$. Dies würde also auf den Fall führen, wo alle drei Wellen geradlinige Polarisation zeigen, was hier, wie man leicht sieht, nicht geschehen kann. Es muß also $\cos \varepsilon = 1$ sein, daher

$$\cos \varepsilon_1 + \cos \varepsilon_2 = 0.$$



Die conjugirten Durchmesser beider Ellipsen stehen somit nicht nur in demselben Verhältniss zu einander, sondern schliessen auch Nebenwinkel ein; woraus sogleich folgt, *dass die Ellipsen in beiden Wellen einander ähnlich sind*. Auch sieht man aus der Figur (in welcher ausserdem der Einfachheit wegen auch die *Dimensionen* der Ellipsen gleich angenommen sind), *dass die eine Ellipse gegen die andre um einen rechten Winkel gedreht erscheint* *).

Da hiedurch das gegenseitige Verhalten beider Ellipsen bestimmt ist, so bleibt nur noch übrig, die Formeln für dieselben aufzustellen. Hier scheiden sich die beiden Hypothesen; es sollen zuerst die Folgerungen der *Fresnelschen* entwickelt werden.

Für die Transversalwellen ist es nicht mehr erlaubt, die Gröfsen a durch Mittelwerthe zu ersetzen, weil die in (45.) übrigbleibenden Terme

$$a - m^2 - \mu, \quad \alpha A + \beta B + \gamma C$$

selbst von der Ordnung der Differenzen $a^2 - b^2$, etc. werden. Dagegen darf man die k_1 , etc. auf den Mittelwerth k reduciren. Benutzt man sodann die Gleichungen (52.), (56.), so erhält man leicht

$$a_{11}\alpha^2 + a_{12}\beta^2 + a_{13}\gamma^2 - m^2 - \mu = a^2 - m^2,$$

$$a_{12}\alpha^2 + a_{22}\beta^2 + a_{23}\gamma^2 - m^2 - \mu = b^2 - m^2,$$

$$a_{13}\alpha^2 + a_{23}\beta^2 + a_{33}\gamma^2 - m^2 - \mu = c^2 - m^2,$$

$$a_{11}\alpha A + a_{12}\beta B + a_{13}\gamma C$$

$$= (g - a^2 - b^2 - c^2)(\alpha A + \beta B + \gamma C) + (a^2\alpha A + b^2\beta B + c^2\gamma C) + a^2(\alpha A + \beta B + \gamma C),$$

$$a_{12}\alpha A + a_{22}\beta B + a_{23}\gamma C$$

$$= (g - a^2 - b^2 - c^2)(\alpha A + \beta B + \gamma C) + (a^2\alpha A + b^2\beta B + c^2\gamma C) + b^2(\alpha A + \beta B + \gamma C),$$

$$a_{13}\alpha A + a_{23}\beta B + a_{33}\gamma C$$

$$= (g - a^2 - b^2 - c^2)(\alpha A + \beta B + \gamma C) + (a^2\alpha A + b^2\beta B + c^2\gamma C) + c^2(\alpha A + \beta B + \gamma C).$$

Die letzten drei Ausdrücke unterscheiden sich nur durch die letzten Terme;

*) In der Figur sind durch 1', 2', 1'', 2'' diejenigen Punkte bezeichnet, welche beziehungsweise die Coordinaten haben:

$$A_1, B_1, C_1, \quad A_2, B_2, C_2, \quad A_1'', B_1'', C_1'', \quad A_2'', B_2'', C_2''.$$

und da diese den sehr kleinen Factor $\alpha A + \beta B + \gamma C$ enthalten, so kann man in ihnen wieder a^2 , b^2 , c^2 durch einen Mittelwerth ersetzen. Die drei letzten Ausdrücke werden daher nahezu gleich, und ihr Mittelwerth sei $-\frac{M}{2}$. Dann also lassen sich die Gleichungen (45.) in der folgenden einfachen Gestalt darstellen:

$$A(a^2 - m^2) + k\sqrt{-1}(\beta C - \gamma B) = \alpha M,$$

$$B(b^2 - m^2) + k\sqrt{-1}(\gamma A - \alpha C) = \beta M,$$

$$C(c^2 - m^2) + k\sqrt{-1}(\alpha B - \beta A) = \gamma M.$$

Löst man diese Gleichungen auf, und läßt den gemeinschaftlichen Nenner mit M in den Factor σ eingehen, so erhält man:

$$(62^a.) \quad \begin{cases} \sigma A = \alpha [(m^2 - b^2)(m^2 - c^2) - k^2] + k\sqrt{-1}\beta\gamma(c^2 - b^2), \\ \sigma B = \beta [(m^2 - c^2)(m^2 - a^2) - k^2] + k\sqrt{-1}\gamma\alpha(a^2 - c^2), \\ \sigma C = \gamma [(m^2 - a^2)(m^2 - b^2) - k^2] + k\sqrt{-1}\alpha\beta(b^2 - a^2); \end{cases}$$

und setzt man

$$U = \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z - m(t - \tau)}{\lambda} 2\pi,$$

so ist die allgemeinste Form der resultirenden Bewegungsellipse:

$$(62.) \quad \begin{cases} \sigma u = \alpha [(m^2 - b^2)(m^2 - c^2) - k^2] \cos U - k\beta\gamma(c^2 - b^2) \sin U, \\ \sigma v = \beta [(m^2 - c^2)(m^2 - a^2) - k^2] \cos U - k\gamma\alpha(a^2 - c^2) \sin U, \\ \sigma w = \gamma [(m^2 - a^2)(m^2 - b^2) - k^2] \cos U - k\alpha\beta(b^2 - a^2) \sin U. \end{cases}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen bezüglich mit α , β , γ und addirt, so erhält man

$$u\alpha + v\beta + w\gamma = 0,$$

indem man die Gleichung (59.) berücksichtigt.

Nach der *Neumannschen* Hypothese hingegen erhält man, durch Anwendung der Gleichungen (52.), (55.) für die Coefficienten der Gleichungen (45.), wenn man m_1 die andre Wurzel der Gleichung (59.) nennt und die aus (59.) folgende Gleichung bemerkt:

$$m^2 + m_1^2 = (b^2 + c^2)\alpha^2 + (c^2 + a^2)\beta^2 + (a^2 + b^2)\gamma^2,$$

die nachstehenden Ausdrücke:

$$a_{11}\alpha^2 + a_{12}\beta^2 + a_{13}\gamma^2 - m^2 - \mu = m_1^2 - a^2,$$

$$a_{12}\alpha^2 + a_{22}\beta^2 + a_{23}\gamma^2 - m^2 - \mu = m_1^2 - b^2,$$

$$a_{13}\alpha^2 + a_{23}\beta^2 + a_{33}\gamma^2 - m^2 - \mu = m_1^2 - c^2$$

und

$$\begin{aligned} & a_{11}\alpha A + a_{12}\beta B + a_{13}\gamma C \\ = & (c^2 + b^2 + a^2 + f)(\alpha A + \beta B + \gamma C) - (a^2\alpha A + b^2\beta B + c^2\gamma C) - a^2(\alpha A + \beta B + \gamma C), \\ & a_{12}\alpha A + a_{22}\beta B + a_{23}\gamma C \\ = & (c^2 + b^2 + a^2 + f)(\alpha A + \beta B + \gamma C) - (a^2\alpha A + b^2\beta B + c^2\gamma C) - b^2(\alpha A + \beta B + \gamma C), \\ & a_{13}\alpha A + a_{23}\beta B + a_{33}\gamma C \\ = & (c^2 + b^2 + a^2 + f)(\alpha A + \beta B + \gamma C) - (a^2\alpha A + b^2\beta B + c^2\gamma C) - c^2(\alpha A + \beta B + \gamma C). \end{aligned}$$

Bezeichnet man den mittlern Werth der letzten drei Ausdrücke, ähnlich wie oben, durch $\frac{M}{2}$, so kann man den Gleichungen (45.) folgende Gestalt geben:

$$\begin{aligned} A(a^2 - m_1^2) - k\sqrt{-1}(\beta C - \gamma B) &= \alpha M, \\ B(b^2 - m_1^2) - k\sqrt{-1}(\gamma A - \alpha C) &= \beta M, \\ C(c^2 - m_1^2) - k\sqrt{-1}(\alpha B - \beta A) &= \gamma M; \end{aligned}$$

wodurch man für die Gleichungen der Ellipse erhält:

$$(63.) \quad \begin{cases} \sigma u = \alpha [(m_1^2 - b^2)(m_1^2 - c^2) - k^2] \cos U + k\beta\gamma(c^2 - b^2) \sin U, \\ \sigma v = \beta [(m_1^2 - c^2)(m_1^2 - a^2) - k^2] \cos U + k\gamma\alpha(a^2 - c^2) \sin U, \\ \sigma w = \gamma [(m_1^2 - a^2)(m_1^2 - b^2) - k^2] \cos U + k\alpha\beta(b^2 - a^2) \sin U. \end{cases}$$

Man sieht, daß diese Gleichungen sich von den Gleichungen (62.) nur dadurch unterscheiden, daß m_1 an die Stelle von m getreten ist, und daß k sein Zeichen gewechselt hat.

§. 8.

Bewegungsrichtung in den Transversalwellen.

Es sollen m, m_1 die positiven Quadratwurzeln von m^2, m_1^2 bedeuten, und also α, β, γ die Cosinus der Richtung sein, in welcher die Wellen fortschreiten. Dann sollen α', β', γ' und $\alpha'', \beta'', \gamma''$ die Richtungen zweier Linien bezeichnen, welche gegen einander senkrecht in der Wellenebene liegen; und diese drei gegen einander rechtwinkligen Richtungen sollen durch passende Drehung zur Congruenz bezüglich mit der positiven X -, Y -, Z -Axe gebracht werden können.

Das Coordinatensystem der X, Y, Z soll endlich eine solche Lage haben, daß von der positiven X -Axe aus gesehen, der Zeiger einer Uhr in der YZ -Ebene sich von der positiven Y -Axe durch 90° zur positiven Z -Axe bewege. In Bezug auf diese Bestimmungen will ich den Krystall positiv oder negativ nennen, je nachdem die Constante k einen positiven oder negativen Werth hat.

Die drei Richtungen α , β , γ , etc. bilden dann ein Coordinatensystem ξ , η , ζ , welches durch die Transformationsformeln gegeben ist:

$$\xi = u\alpha + v\beta + w\gamma,$$

$$\eta = u\alpha' + v\beta' + w\gamma',$$

$$\zeta = u\alpha'' + v\beta'' + w\gamma'',$$

und die Determinante dieses Systems ist $+1$, so dafs die Gleichungen bestehen:

$$(64.) \quad \alpha = \beta'\gamma'' - \gamma'\beta'', \quad \beta = \gamma'\alpha'' - \alpha'\gamma'', \quad \gamma = \alpha'\beta'' - \beta'\alpha''.$$

Bildet man jetzt die Flächenelemente dF_1 , dF_2 , welche der Radius vector des bewegten Molecüls in den beiden Transversalwellen beschreibt, und rechnet dieselben positiv, wenn dieser sich von der positiven η -Axe durch 90° zur positiven ζ -Axe bewegt, und unterscheidet man wieder das beiden Wellen Angehörige durch die Indices 1, 2, so erhält man mit Hülfe der Gleichungen (64.) leicht:

$$(65.) \quad \begin{cases} 2dF_1 = \eta_1 d\zeta_1 - \zeta_1 d\eta_1 = \frac{2\pi m_1}{\lambda} dt \begin{vmatrix} A'_1 & A''_1 & \alpha \\ B'_1 & B''_1 & \beta \\ C'_1 & C''_1 & \gamma \end{vmatrix}, \\ 2dF_2 = \eta_2 d\zeta_2 - \zeta_2 d\eta_2 = \frac{2\pi m_2}{\lambda} dt \begin{vmatrix} A'_2 & A''_2 & \alpha \\ B'_2 & B''_2 & \beta \\ C'_2 & C''_2 & \gamma \end{vmatrix}. \end{cases}$$

Multiplicirt man aber diese Gleichungen mit einander, und benutzt den bekannten Satz über die Multiplication von Determinanten, so wird

$$4dF_1 dF_2 = \frac{4\pi^2 m_1 m_2}{\lambda^2} dt^2 \begin{vmatrix} A'_1 A'_2 + B'_1 B'_2 + C'_1 C'_2 & A'_1 A'_2 + B'_1 B'_2 + C'_1 C'_2 & \alpha A'_2 + \beta B'_2 + \gamma C'_2 \\ A'_1 A'_2 + B'_1 B'_2 + C'_1 C'_2 & A'_1 A'_2 + B'_1 B'_2 + C'_1 C'_2 & \alpha A'_2 + \beta B'_2 + \gamma C'_2 \\ A'_1 \alpha + B'_1 \beta + C'_1 \gamma & A'_1 \alpha + B'_1 \beta + C'_1 \gamma & \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \end{vmatrix}.$$

Bemerkt man nun, dafs wegen der Gleichungen (61.) vier Elemente dieser Determinante verschwinden, und dafs nach (22.):

$$A'_1 A'_2 + B'_1 B'_2 + C'_1 C'_2 = -(A''_1 A''_2 + B''_1 B''_2 + C''_1 C''_2) = p,$$

$$A''_1 A''_2 + B''_1 B''_2 + C''_1 C''_2 = A'_1 A'_2 + B'_1 B'_2 + C'_1 C'_2 = q,$$

so geht die obige Gleichung über in

$$4dF_1 dF_2 = -\frac{4\pi^2 m_1 m_2}{\lambda^2} dt^2 (p^2 + q^2).$$

Dies zeigt, *dafs die Bewegungen in den beiden Transversalwellen immer in entgegengesetztem Sinne vor sich gehen*, da das Product der Flächenelemente stets negativ ist.

Um den Sinn der Drehung in jeder der Wellen zu bestimmen, mag zuerst die *Fresnelsche* Hypothese untersucht werden. Wenn man in (65.) die *A, B, C* aus (62^a.) bestimmt, so erhält man:

$$\begin{aligned}
 dF_1 &= \frac{k\pi m_1}{\sigma^2 \lambda} dt \begin{vmatrix} \alpha(m_1^2 - b^2)(m_1^2 - c^2), & \beta\gamma(c^2 - b^2), & \alpha \\ \beta(m_1^2 - c^2)(m_1^2 - a^2), & \gamma\alpha(a^2 - c^2), & \beta \\ \gamma(m_1^2 - a^2)(m_1^2 - b^2), & \alpha\beta(b^2 - a^2), & \gamma \end{vmatrix} \\
 &= \frac{k\pi m_1}{\sigma^2 \lambda} dt \{ \beta^2 \gamma^2 (c^2 - b^2)^2 (m_1^2 - a^2) + \gamma^2 \alpha^2 (a^2 - c^2)^2 (m_1^2 - b^2) + \alpha^2 \beta^2 (b^2 - a^2)^2 (m_1^2 - c^2) \}, \\
 dF_2 &= \frac{k\pi m_2}{\sigma^2 \lambda} dt \begin{vmatrix} \alpha(m_2^2 - b^2)(m_2^2 - c^2), & \beta\gamma(c^2 - b^2), & \alpha \\ \beta(m_2^2 - c^2)(m_2^2 - a^2), & \gamma\alpha(a^2 - c^2), & \beta \\ \gamma(m_2^2 - a^2)(m_2^2 - b^2), & \alpha\beta(b^2 - a^2), & \gamma \end{vmatrix} \\
 &= \frac{k\pi m_2}{\sigma^2 \lambda} dt \{ \beta^2 \gamma^2 (c^2 - b^2)^2 (m_2^2 - a^2) + \gamma^2 \alpha^2 (a^2 - c^2)^2 (m_2^2 - b^2) + \alpha^2 \beta^2 (b^2 - a^2)^2 (m_2^2 - c^2) \}.
 \end{aligned}$$

Die eingeklammerten Ausdrücke müssen nach dem Obigen immer entgegengesetztes Zeichen haben; daher ist nothwendig derjenige von beiden positiv, welcher der gröfsern Wurzel entspricht, der andere negativ; und man hat somit den Satz:

In positiven Krystallen geschieht die Bewegung, von derjenigen Seite gesehen, nach welcher die Welle sich bewegt, in demselben Sinne wie bei dem Zeiger einer Uhr bei der Welle mit gröfserer Fortpflanzungsgeschwindigkeit, entgegengesetzt in der ändern.

Dieser Satz ist auch noch richtig nach der Neumannschen Hypothese; denn weil man nach derselben m_1 und m_2 zu vertauschen hat, zugleich aber auch $-k$ an die Stelle von k zu setzen, so bleiben die Vorzeichen von dF_1 , dF_2 hierdurch unverändert.

In negativen Krystallen tritt natürlich genau das Gegentheil des oben ausgesprochenen Satzes ein.

§. 9.

Die Wellenfläche.

Die Wellenfläche, deren Gleichung durch (59.) gegeben ist, besteht aus zwei Mänteln, da diese Gleichung quadratisch ist für m^2 . Bemerkt man

ferner die für z identische Gleichung

$$(z^2 - m_1^2)(z^2 - m_2^2) = (z^2 - b^2)(z^2 - c^2)\alpha^2 + (z^2 - c^2)(z^2 - a^2)\beta^2 + (z^2 - a^2)(z^2 - b^2)\gamma^2 - k^2,$$

so ergeben sich daraus für $z^2 = a^2, b^2, c^2$ die Gleichungen

$$(66.) \quad \begin{cases} \alpha^2 = \frac{(a^2 - m_1^2)(a^2 - m_2^2) + k^2}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}, \\ \beta^2 = \frac{(b^2 - m_1^2)(b^2 - m_2^2) + k^2}{(b^2 - c^2)(b^2 - a^2)}, \\ \gamma^2 = \frac{(c^2 - m_1^2)(c^2 - m_2^2) + k^2}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)}. \end{cases}$$

Von diesen hebe ich zunächst nur die zweite hervor. Ist $a^2 > b^2 > c^2$, so zeigt dieselbe, daß der Ausdruck

$$(b^2 - m_1^2)(b^2 - m_2^2) = \beta^2(b^2 - c^2)(b^2 - a^2) - k^2$$

wesentlich negativ ist und nie kleiner werden kann als k^2 . Es ist daher immer ein Werth von m^2 größer, der andere kleiner als b^2 , und dieselben können nie einander gleich werden. Die Oberfläche besteht daher aus zwei ganz getrennten Hälften, welche sich außerhalb und innerhalb einer Kugel vom Radius b befinden.

Was die Construction der Oberfläche anbetrifft, so kann man allerdings ein Verfahren aufstellen, welches eine Verallgemeinerung der *Fresnelschen* Construction ist, doch wird dasselbe hier nutzlos. Ich bemerke es nur, um des folgenden allgemeinen Theorems zu gedenken, aus welchem diese so wie die *Fresnelsche* Construction als Beispiele folgen:

Es seien A, B, C Functionen des Radius Vector m; λ, μ, ν die Cosinus seiner Richtung; sucht man sodann die Maxima des Radius Vector in dem Durchschnitt der Oberfläche

$$\frac{\lambda^2}{A} + \frac{\mu^2}{B} + \frac{\nu^2}{C} = 0$$

mit der Ebene

$$\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu = 0,$$

und trägt die erhaltenen Längen auf der Richtung der Normale (α, β, γ) dieser Ebene an, so erhält man die Oberfläche

$$A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 = 0,$$

von welcher man auf die nämliche Weise wieder zu der ersten zurückkehren kann.

Da nämlich die Gleichung $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$ besteht, so findet man offenbar die Maxima von m aus den Gleichungen

$$\left(p + \frac{1}{A}\right)\lambda = q\alpha,$$

$$\left(p + \frac{1}{B}\right)\mu = q\beta,$$

$$\left(p + \frac{1}{C}\right)\nu = q\gamma,$$

wo p , q unbekannte Coefficienten sind. Multiplicirt man aber diese Gleichungen bezüglich mit λ , μ , ν und addirt, so kommt

$$p = 0,$$

und daher

$$\lambda = q\alpha A, \quad \mu = q\beta B, \quad \nu = q\gamma C,$$

oder wenn man bezüglich mit α , β , γ multiplicirt und addirt:

$$\alpha^2 A + \beta^2 B + \gamma^2 C = 0.$$

Dies giebt im vorliegenden Fall einen Zusammenhang zwischen der Oberfläche

$$(66^a.) \quad \frac{\lambda^2}{(m^2 - b^2)(m^2 - c^2) - k^2} + \frac{\mu^2}{(m^2 - c^2)(m^2 - a^2) - k^2} + \frac{\nu^2}{(m^2 - a^2)(m^2 - b^2) - k^2} = 0$$

und der Wellenfläche, welcher aber nur für $k = 0$ von Nutzen ist.

Dagegen kann man die Wellenfläche zusammengesetzt denken aus einer Reihe von sphärischen Ellipsen, welche, wenn p einen constanten Parameter bedeutet, die Durchschnitte der Kugeln

$$m^2 = p^2$$

mit dem Kegelsystem

$$(67.) \quad \{(p^2 - b^2)(p^2 - c^2) - k^2\}\alpha^2 + \{(p^2 - c^2)(p^2 - a^2) - k^2\}\beta^2 \\ + \{(p^2 - a^2)(p^2 - b^2) - k^2\}\gamma^2 = 0$$

sind. In jedem Radius Vector der Oberfläche schneiden sich zwei der Kegel (67.), deren Parameter die ihm zukommenden Fortpflanzungsgeschwindigkeiten angeben, und von deren sphärischen Ellipsen eine dem äußern, die andere dem innern Mantel der Oberfläche angehört.

Unter diesen Kegeln sind diejenigen hervorzuheben, welche in ein Ebenenpaar zerfallen. Dies geschieht nur bei denjenigen, in welchen einer der Coefficienten von α^2 , β^2 , γ^2 in (67.) verschwindet; und das Ebenenpaar ist nur reell, wenn der mittlere Coefficient verschwindet, d. h. wenn

$$(68.) \quad (p^2 - a^2)(p^2 - c^2) = k^2,$$

wodurch die Gleichung (67.) übergeht in

$$(69.) \quad \alpha^2(p^2 - c^2)(a^2 - b^2) = \beta^2(p^2 - a^2)(b^2 - c^2).$$

Da die Gleichung (68.) für p^2 quadratisch ist, so stellt (69.) zwei Ebenenpaare vor. Dieselben sind symmetrisch gegen die YZ -Ebene und schneiden sich in der Y -Axe; es sind die Ebenen der Kreisschnitte der Wellenoberfläche, — jede dieser Ebenen schneidet dieselbe in einem Kreise und einem Oval.

Um die Richtung des Strahles zu finden, welcher einer gegebenen Welle angehört, hat man nur den Durchschnittspunkt benachbarter Wellen zu bestimmen, welche zu gleicher Zeit vom Mittelpunkt ausgegangen sind, und sich die Zeit 1 hindurch vorwärts bewegt haben. Die Gleichung der gegebenen Wellenebene sei:

$$(70.) \quad x\alpha + y\beta + z\gamma = m,$$

wo x, y, z die Coordinaten desjenigen Punktes bedeuten mögen, nach welchem der Strahl gerichtet ist. Für benachbarte Wellen, welche durch eben diesen Punkt gehen, ist dann:

$$(71.) \quad x d\alpha + y d\beta + z d\gamma = dm.$$

Stellt man ferner die Wellenfläche wieder unter der allgemeinen Gestalt dar:

$$(72.) \quad 0 = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 = m^4 - 2pm^2 + q,$$

so hat man für die nächsten Wellen noch

$$A\alpha d\alpha + B\beta d\beta + C\gamma d\gamma + 2(m^2 - p)m dm = 0,$$

oder, wenn man mit m_1 die zweite Wurzel von (72.) bezeichnet,

$$(73.) \quad A\alpha d\alpha + B\beta d\beta + C\gamma d\gamma + (m^2 - m_1^2)m dm = 0.$$

Hierzu kommen noch die beiden Beziehungen

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1, \quad \alpha d\alpha + \beta d\beta + \gamma d\gamma = 0,$$

von denen die letzte mit den Gleichungen (71.), (73.) verträglich sein muß für alle beliebigen Werthe der Differentiale $d\alpha, d\beta, d\gamma$, welche dieser letzten Gleichung genügen. Daher muß diese Gleichung sich als Folge von (71.), (73.) darstellen lassen, oder es muß sein:

$$m(m_1^2 - m^2)x = (A + \varrho)\alpha,$$

$$m(m_1^2 - m^2)y = (B + \varrho)\beta,$$

$$m(m_1^2 - m^2)z = (C + \varrho)\gamma,$$

durch ϱ einen unbekannten Factor bezeichnet. Multiplicirt man aber bezüglich mit α, β, γ und addirt, so kommt

$$m^2(m_1^2 - m^2) = \varrho,$$

und indem man diesen Werth, sowie die Werthe von A , B , C einführt, erhält man für die Coordinaten des Strahls die Ausdrücke:

$$(73^a.) \quad \begin{cases} x = \alpha \left(m + \frac{(m^2 - b^2)(m^2 - c^2) - k^2}{m^2(m_1^2 - m^2)} \right), \\ y = \beta \left(m + \frac{(m^2 - c^2)(m^2 - a^2) - k^2}{m^2(m_1^2 - m^2)} \right), \\ z = \gamma \left(m + \frac{(m^2 - a^2)(m^2 - b^2) - k^2}{m^2(m_1^2 - m^2)} \right). \end{cases}$$

Die Aufstellung derjenigen Oberfläche, auf welcher alle Punkte x , y , z sich befinden, scheint mit großen Schwierigkeiten verknüpft zu sein.

Ich bemerke über die Lage des Strahls noch den folgenden Satz, welcher auf einer allgemeinen Eigenschaft beruht:

Die Ebene des Strahls und der Wellennormale ist senkrecht auf der Wand desjenigen Constructionskegels (67.), dessen Parameter die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellennormale anzeigt.

Um diesen Satz einzusehen, hat man nur in dem Schnitt der Wellenebene mit diesem Kegel, auf dessen Seite dieselbe senkrecht ist, vorwärts zu gehen. Alsdann bleibt m constant, und die Gleichung (70.) giebt

$$x d\alpha + y d\beta + z d\gamma = 0,$$

d. h. der Strahl ist gegen das Element der Schnittcurve senkrecht; woraus ohne Weiteres der obige Satz folgt.

Will man sich der Oberfläche (66^a.) bedienen, so findet man noch leicht den Satz, welcher hier wie bei der *Fresnelschen* Fläche gilt:

Die Ebene des Strahls und der Wellennormale geht durch denjenigen Radius Vector des construierenden Schnitts der Oberfläche (66^a.) hindurch, welcher die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellennormale darstellt.

Es bleibt endlich übrig, die Elemente der Bewegungsellipsen (62.) oder (63.) mit der Wellenfläche in geometrische Beziehung zu setzen; wobei wieder die beiden Hypothesen sich scheiden. In jedem Falle sind beide Bewegungsellipsen auf conjugirte Durchmesser bezogen, von denen der eine (der zweite) in beiden dieselbe Richtung hat. *Von den beiden andern Durchmessern steht nach der Fresnelschen Hypothese offenbar jeder senkrecht auf der Wand desjenigen Constructionskegels, welcher die seiner Ellipse zukommende Fortpflanzungsgeschwindigkeit anzeigt; nach der Neumannschen aber auf der Wand des andern Kegels.*

Die zu diesen Richtungen conjugirten Durchmesser, welche zusammenfallen, sind aber nach beiden Hypothesen parallel dem Durchschnitte der Wellenebene mit der Tangentenebene des Fresnelschen Ovaloids

$$m^2 = a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + c^2\gamma^2$$

zu finden, diese Tangentenebene da gelegt, wo die Wellennormale das Ovaloid durchschneidet. Denn diese Linie steht senkrecht auf der Wellennormale, deren Cosinus sich verhalten wie $\alpha:\beta:\gamma$, und auf der Normale des Ovaloids, deren Cosinus sich verhalten wie:

$$\alpha(2m^2 - a^2) : \beta(2m^2 - b^2) : \gamma(2m^2 - c^2).$$

Die Cosinus der gesuchten Richtung verhalten sich also wie:

$$\beta\gamma(c^2 - b^2) : \gamma\alpha(a^2 - c^2) : \alpha\beta(b^2 - a^2),$$

wie es wirklich bei der geforderten stattfindet.

§. 10.

Richtungen circularer Polarisation.

Es ist von Interesse zu untersuchen, in welchen Richtungen die Bewegungsellipsen in Kreise übergehen, welches der Aehnlichkeit wegen bei beiden zugleich geschehen muß. Alsdann sind nothwendig die conjugirten Durchmesser der Bewegungscurven gegen einander senkrecht; was aus (62.) oder (63.) auf die Gleichung

$$\alpha\beta\gamma = 0$$

führt. Die Welle eines circularpolarisirten Strahls geht daher immer durch eine Axe. Man überzeugt sich aber auch leicht, daß in der Richtung der Axen selbst keine circular Polarisation eintritt. Es kann daher für dergleichen Richtungen nicht mehr als *eine* der Größen α , β , γ verschwinden. Es sei dies β . Die Gleichungen (62.) gehen dann über in:

$$\sigma u = \alpha [(m^2 - b^2)(m^2 - c^2) - k^2] \cos U,$$

$$\sigma v = -k\gamma\alpha(a^2 - c^2) \sin U,$$

$$\sigma w = \gamma [(m^2 - a^2)(m^2 - b^2) - k^2] \cos U.$$

Zugleich aber kann man, in Folge der Gleichung der Wellenfläche, setzen:

$$(74.) \quad \begin{cases} \alpha [(m^2 - b^2)(m^2 - c^2) - k^2] = \mu\gamma, \\ \gamma [(m^2 - b^2)(m^2 - a^2) - k^2] = -\mu\alpha, \end{cases}$$

wo μ einen unbekannten Factor bedeutet. Alsdann kann man für die Bewegungsgleichungen schreiben:

$$\sigma u = \mu \gamma \cos U, \quad \sigma v = -k \gamma \alpha (a^2 - c^2) \sin U, \quad \sigma w = -\mu \alpha \cos U.$$

Die Projectionen des einen conjugirten Halbmessers sind also $\mu \gamma$, 0, $-\mu \alpha$, die des andern 0, $-k \gamma \alpha (a^2 - c^2)$, 0. Damit die Curve ein Kreis sei, müssen beide Halbmesser gleiche Längen haben; und da $\alpha^2 + \gamma^2 = 1$, so hat man demnach:

$$\mu^2 = k^2 \gamma^2 \alpha^2 (a^2 - c^2)^2, \quad \mu = \pm k \gamma \alpha (a^2 - c^2).$$

Dies in die Gleichungen (74.) eingeführt, giebt:

$$\gamma^2 = \pm \frac{(m^2 - b^2)(m^2 - c^2) - k^2}{k(a^2 - c^2)}, \quad \alpha^2 = \mp \frac{(m^2 - b^2)(m^2 - a^2) - k^2}{k(a^2 - c^2)};$$

und wenn man jetzt die Gleichung $\alpha^2 + \gamma^2 = 1$ benutzt, so hat man:

$$(75.) \quad m^2 = b^2 \pm k, \quad \alpha^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}, \quad \gamma^2 = \frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}.$$

Die Werthe von α , γ sind hier wirklich reell, werden aber durch Vertauschung der a , b , c imaginär. *Es giebt daher Richtungen circularpolarisirter Strahlen nur in der Ebene der größten und kleinsten Axe. Und diese Richtungen sind genau dieselben, welche bei linearpolarisirenden Medien die optischen Axen genannt werden; die Differenz der Quadrate der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten für diese Wellen ist gleich dem Doppelten der Constante k , welche für die Polarisations Eigenschaften des Mediums charakteristisch ist.*

Man sieht sogleich, dafs es für diese Betrachtungen gleichgültig ist, ob man von der *Fresnelschen* oder von der *Neumannschen* Hypothese ausgeht.

Aus dem Obigen folgt, dafs eine Platte, gegen eine optische Axe senkrecht geschnitten, die Eigenschaft hat, die Polarisations Ebene zu drehen; und zwar rechts oder links, jenachdem die Bewegung in der Welle von gröfserer Fortpflanzungsgeschwindigkeit in gleichem oder entgegengesetztem Sinne erfolgt, wie bei dem Zeiger einer Uhr. Dies combinirt mit den Resultaten des §. 8 zeigt ohne Weiteres, dafs die dort positiv genannten Krystalle in der Richtung der optischen Axen *rechtsdrehend* sind, die negativen aber *linksdrehend*.

§. 11.

Anwendung auf einaxige Krystalle (Quarz).

Es ist sehr leicht, die abgeleiteten Resultate auf einaxige Krystalle anzuwenden. Es sei $b = a$, und also die *Z*-Axe die des Krystalls; ferner

$\beta = 0$, was unbeschadet der Allgemeinheit angenommen werden kann; und ζ der Winkel der Wellennormale gegen die Z -Axe, so daß

$$\alpha = \sin \zeta, \quad \gamma = \cos \zeta.$$

Die Gleichung der Wellenfläche geht dann über in

$$(76.) \quad (m^2 - a^2)(m^2 - c^2 \sin^2 \zeta - a^2 \cos^2 \zeta) = k^2.$$

Sie besteht aus zwei Rotationsflächen, welche innerhalb und außerhalb einer Kugel vom Radius a liegen; die Längen der Radien Vektoren längs der optischen Axe sind gegeben durch die Werthe

$$a^2 - k, \quad a^2 + k;$$

und überhaupt sind die ein und derselben Richtung angehörigen Fortpflanzungsgeschwindigkeiten m_1, m_2 durch die Gleichung verbunden:

$$(77.) \quad (m_1^2 - a^2)(m_2^2 - a^2) = -k^2.$$

Benutzt man die Gleichungen (76.), (77.), um die Ausdrücke (73^a.) für die Coordinaten des Strahls zu transformiren, und bezeichnet man durch ψ den Winkel des Strahls (welcher im Hauptschnitt liegt) gegen die Z -Axe, so kommt:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{(2m^2 - a^2)k^2 + (m^2 - a^2)c^2}{(2m^2 - a^2)k^2 + (m^2 - a^2)a^2} \operatorname{tg} \zeta,$$

was dazu dient, die Lage des Strahls vollkommen zu bestimmen.

Die Bewegungsgleichungen (62.) oder (63.) nehmen die Gestalt an:

$$(78.) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(Fresnelsche Hypothese.)} \\ \sigma u = ((m^2 - a^2)(m^2 - c^2) - k^2) \cos U \sin \zeta, \\ \sigma v = -k \sin \zeta \cos \zeta (a^2 - c^2) \sin U, \\ \sigma w = ((m^2 - a^2)^2 - k^2) \cos U \cos \zeta, \\ \text{oder} \\ \text{(Neumannsche Hypothese.)} \\ \sigma u = ((m_1^2 - a^2)(m_1^2 - c^2) - k^2) \cos U \sin \zeta, \\ \sigma v = +k \sin \zeta \cos \zeta (a^2 - c^2) \sin U, \\ \sigma w = ((m_1^2 - a^2)^2 - k^2) \cos U \cos \zeta. \end{array} \right.$$

Aus dieser Form sieht man, daß die Ellipsen bereits auf die Hauptaxen bezogen sind, daß also eine derselben immer im Hauptschnitt liegt, die andere senkrecht dagegen.

Um die Gleichungen der Ellipsen in ihrer Ebene darzustellen, genügt es, für u, w die Coordinate

$$s = w \sin \zeta - u \cos \zeta$$

einzuführen, wodurch die Gleichungen (78.) mit Beseitigung eines gemeinschaftlichen Factors übergehen in:

$$(79.) \quad \begin{cases} \sigma s = (m^2 - a^2) \cos U, \\ \sigma v = k \sin U, \end{cases} \quad \text{oder} \quad \begin{cases} \sigma s = (m_1^2 - a^2) \cos U, \\ \sigma v = -k \sin U. \end{cases}$$

Sei m die grössere Wurzel der quadratischen Gleichung; dann ist nach (77.) $m^2 > a^2$, $m_1^2 < a^2$; und ferner ist nach (76.)

$$(m^2 - a^2) - (a^2 - m_1^2) = (c^2 - a^2) \sin^2 \zeta.$$

Ist also $c^2 > a^2$, so ist $m^2 - a^2 > a^2 - m_1^2$, daher auch

$$m^2 - a^2 > \sqrt{k^2}, \quad a^2 - m_1^2 < \sqrt{k^2};$$

und man sieht also dafs, *nach der Fresnelschen Hypothese, wenn die ungleiche Axe die grössere ist, die grosse Axe der Ellipse mit grösserer Fortpflanzungsgeschwindigkeit im Hauptschnitt liegt; wenn dagegen die ungleiche Axe die kleinere ist, so liegt die grosse Axe der Ellipse mit grösserer Fortpflanzungsgeschwindigkeit gegen den Hauptschnitt senkrecht.*

Nach der Neumannschen Hypothese sind diese Verhältnisse nur umzukehren.

Circulare Polarisation findet nur in der Richtung der Axe statt; und zwar ist in dieser Richtung der Krystall rechtsdrehend oder linksdrehend, je nachdem k positiv oder negativ ist.

Ich schliesse mit einer Bemerkung, welche einen scheinbaren Widerspruch der vorliegenden Theorie mit der Erfahrung, sowie mit der von *Maccullagh* aufgestellten Theorie zu beseitigen geeignet ist. In der letzteren ist es wesentlich, dafs zu den gewöhnlichen optischen Gleichungen Glieder hinzutreten, welche mit der reciproken Wellenlänge proportional sind; während in dem Vorliegenden die Grösse k mit der Wellenlänge direct proportional ist. Dies scheint also darauf hinzuweisen, dafs, wenigstens bei einer Zahl von Substanzen, der erste Theil der Grundfunction K , welcher im §. 6 (43.) allein beibehalten worden ist, unbedeutend sein mufs gegen den folgenden Theil, welcher die vierten Potenzen von α, β, γ enthalten würde, und welcher in der That der Wellenlänge nach (5.) umgekehrt proportional wäre.

Man ist aber in der ganzen vorliegenden Untersuchung darauf geführt worden, daß es überhaupt bei dem möglichen Grade der Annäherung nicht thunlich ist, in den die Circularpolarisation bedingenden Gliedern die für die verschiedenen Axen eintretenden Unterschiede festzuhalten; sondern daß vielmehr diese so behandelt werden können, als ob das Medium unkrystallinisch wäre. Daraus geht aber hervor, daß man höhere Glieder der Entwicklung von K ohne Weiteres dadurch berücksichtigen kann, daß man die Gröfse k aus den für unkrystallinische Medien vollkommen strengen Gleichungen §.5 (38.) entnimmt, und daß man also für k eine nach absteigenden Potenzen von λ^2 geordnete Reihe setzen kann; wodurch offenbar in den Gleichungen der obigen Theorie durchaus nichts verändert wird. Es hat also auch keine Schwierigkeit anzunehmen, daß das erste Glied jener Reihe unbedeutend sei gegen das zweite, und daß also k wesentlich der reciproken Wellenlänge proportional sei. Und diese Annahme führt dann sehr leicht auf die Gleichungen *Maccullaghs*.

Carlsruhe, den 7^{ten} October 1859.