LE RELAZIONI IRREDUTTIBILI FRA GL'INVARIANTI
D'UNA FORMA QUALUNQUE D'OTTAVO ORDINE.

Memoria di **R. ALAGNA**, in Palermo.

Adunanze del 14 e 28 luglio 1895.

Il metodo da me tenuto nella ricerca delle relazioni fra gl'invarianti d'una forma qualunque d'ottavo ordine (t. VI di questi Rendiconti, pp. 77-79) lasciava in dubbio, come ebbi ad avvertire, se le relazioni trovate fossero o no del grado minimo. Per completare la ricerca occorreva quindi dimostrare la irridutibilità delle relazioni α , β , γ ; ovvero dedurre da queste, nel caso che non fossero del grado minimo, le tre relazioni irridutibili. — Mi era già messo a studiare intorno a questo argomento, quando il sig. Hammond da Oxford mi avvertiva gentilmente per lettera che non sarebbe stato difficile determinare a priori il grado delle relazioni da trovarsi. — Il metodo suggeritomi dal sig. Hammond è il seguente:

Dalle formule del Sylvester « Tables of the Generating Functions and Groundforms for the Binary Quantics of the First Ten Orders » (American Journal of Mathematics, vol. II, pp. 223-251) si deduce che, per una forma di ottavo ordine, il numero degli invarianti linearmente indipendenti di grado n è il coefficiente di a^n nello sviluppo della frazione:

$$\frac{1 + a^8 + a^9 + a^{10} + a^{18}}{(1 - a^2)(1 - a^3) \dots (1 - a^7)};$$

della presente nota con (1'), (2')... per distinguerle dalle formule (1), (2)... trovate precedentemente.

§ 1.

Per la scelta delle tre sizigie indipendenti fra le cinque che hanno luogo tra gl'invarianti fondamentali, ci riferiremo alla relazione α trovata nella mia precedente Nota.

Sia la forma particolare

$$f = 28 a_2 x_1^6 x_2^2 + 8 a_7 x_1 x_2^7.$$

Si trova che tutti gl'invarianti di f sono nulli ad eccezione di J_5 e J_{10} . — In questo caso, come ebbi a notare a pag. 99, le β e γ si riducono identicamente a zero e la α si riduce a

$$2^5 J_{10}^3 - 3 J_{10}^2 J_5^2 = 0,$$

la quale, sopprimendo il fattore estraneo J_{10}^2 che è diverso da zero, può scriversi più semplicemente

$$2^5 J_{10} - 3 J_5^2 = 0;$$

relazione che può essere facilmente verificata, perocchè si ha

$$J_5 = 2^4 \cdot 5^2 a_2^3 a_7^2, \quad J_{10} = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^4 a_2^6 a_7^4.$$

Questo risultato mostra che, non essendo la relazione α irriduttibile ma una combinazione qualunque di relazioni più semplici, fra queste una almeno deve contenere dei termini ove figurano soltanto gl'invarianti J_5 e J_{10} ; ciò che fra le 5 sizigie può soltanto accadere per la relazione del 20° grado.

Similmente, se si considera la forma particolare

$$f = 56 a_3 x_1^5 x_2^3 + 28 a_6 x_1^2 x_2^6$$

si trova che tutti gl'invarianti fondamentali di f sono nulli ad ecce-

zione di J_3, J_6, J_9 . La α si riduce in questo caso alla relazione del 18° grado

$$i_m^3 - 6j_m^2 = 0,$$

la quale esprime che si annulla il discriminante di m .

Si conclude che fra le tre relazioni indipendenti, una almeno deve contenere dei termini ove figurano soltanto gl'invarianti J_3, J_6, J_9 , ciò che può aver luogo solamente per la sizigia del 18° grado.

Considerando infine la relazione α , si trova in essa il termine $J_7 J_9$, il quale non può provenire che dalla sizigia del 16° grado.

Per le precedenti considerazioni, scegliremo come relazioni indipendenti quelle dei gradi 16°, 18°, 20° che ci proponiamo di trovare nei paragrafi seguenti.

§ 2.

La relazione del 16° grado.

Si consideri la relazione (d) pag. 81; da essa si ricava:

$$\begin{aligned} (qm)^2 q_x^2 m_x^2 &= \frac{1}{2^4} i_m \cdot m - \frac{1}{2^3 \cdot 3} J_2 \varepsilon - \frac{3}{2^2 \cdot 5 \cdot 7} J_2 \nu \\ &+ \frac{1}{2^3 \cdot 3} J_3 H_m - \frac{3}{5 \cdot 7} J_4 t \end{aligned} \quad (1')$$

ove è:

$$\varepsilon = (pm)^2 p_x^2 m_x^2.$$

Ponendo inoltre:

$$(km)^3 k_x m_x = \alpha; \quad (hm)^3 h_x m_x = \beta; \quad (pm)^3 p_x m_x = \gamma,$$

dalla stessa (d) si ha:

$$(qm)^3 q_x m_x = -\frac{3}{5 \cdot 7} J_4 \alpha - \frac{3}{2^2 \cdot 5 \cdot 7} J_2 \beta - \frac{1}{2^3 \cdot 3} J_2 \gamma. \quad (2')$$

Delle forme α, β, γ , e le prime due fanno parte del sistema

completo, le due ultime no; queste si potrebbero quindi esprimere in funzione dei covarianti indipendenti, ma nel nostro caso torna più comodo il lasciarle indicate come sopra.

Sviluppando in serie la forma $(qm)^2 q_x^2 m_y^2$, secondo la formula di Clebsch e Gordan, si ha per le (1') e (2')

$$\begin{aligned}
 (qm)^2 q_x^2 m_y^2 = & \frac{1}{2^4} i_m m_x^2 m_y^2 - \frac{1}{2^3 \cdot 3} J_2 \varepsilon_x^2 \varepsilon_y^2 - \frac{3}{2^2 \cdot 5 \cdot 7} J_2 \eta_x^2 \eta_y^2 \\
 & + \frac{1}{2^3 \cdot 3} J_3 H_{mx}^2 H_{my}^2 - \frac{3}{5 \cdot 7} J_4 t_x^2 t_y^2 - \frac{3}{5 \cdot 7} J_4 \alpha_x \alpha_y (xy) \\
 & - \frac{3}{2^2 \cdot 5 \cdot 7} J_2 \beta_x \beta_y (xy) - \frac{1}{2^3 \cdot 3} J_2 \gamma_x \gamma_y (xy) \\
 & + \frac{1}{3} (qm)^4 (xy)^2,
 \end{aligned} \tag{3'}$$

dalla quale, cambiando le x nelle n e le y nelle k e ponendo per brevità $(nk)^3 n_x k_x = \delta$, si ricava

$$\begin{aligned}
 (qm)^2 (qn)^2 (mk)^2 (nk)^2 = & \frac{1}{2^4} i_m (\mu m)^4 - \frac{1}{2^3 \cdot 3} J_2 (\mu \varepsilon)^4 \\
 & - \frac{3}{2^2 \cdot 5 \cdot 7} J_2 (\mu \eta)^4 + \frac{1}{2^3 \cdot 3} J_3 (\mu H_m)^4 - \frac{3}{5 \cdot 7} J_4 (\mu t)^4 \\
 & - \frac{3}{5 \cdot 7} J_4 (\delta \alpha)^2 - \frac{3}{2^2 \cdot 5 \cdot 7} J_2 (\delta \beta)^2 - \frac{1}{2^3 \cdot 3} J_2 (\delta \gamma)^2 + \frac{1}{3} (qm)^4 J_7.
 \end{aligned} \tag{4'}$$

D'altra parte si consideri la forma $(ab)^4 (ak)^2 (mk)^2 a_x^2 m_x^2$. Si trova facilmente

$$\begin{aligned}
 (ab)^4 (ak)^2 (mk)^2 a_x^2 m_x^2 = & \frac{1}{2} J_7 m + \frac{1}{2} J_5 n + \frac{1}{2} (mn)^4 k \\
 & - (am)^2 (ak)^2 (ab)^4 m_x^2 k_x^2 - (am)^2 (mk)^2 (ab)^4 a_x^2 k_x^2.
 \end{aligned} \tag{5'}$$

Dalla (7) pag. 81 intanto si ricava:

$$\begin{aligned}
 (am)^2 (ab)^4 a_x^2 m_x^2 = (mn)^2 m_x^2 n_x^2 = & \frac{2^2}{3^2} J_4 p + \frac{2}{3} p - \frac{2}{3} \pi \\
 & + \frac{2}{7} j_k k + \frac{1}{3^2} J_2 q - \frac{1}{3^2} J_3 n + \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7} J_2 J_4 k - \frac{2}{5 \cdot 7} J_4 h
 \end{aligned} \tag{6'}$$

e però, sviluppando in serie $(am)^2(ab)^4a_x^2m_y^2$, cambiando in seguito le x nelle y e facendo la somma delle due relazioni che così si ottengono, si ha:

$$\begin{aligned} (am)^2(ab)^4a_x^2m_y^2 + (am)^2(ab)^4a_y^2m_x^2 &= \frac{2^3}{3^2}J_4p_x^2p_y^2 + \frac{2^2}{3}\rho_x^2\rho_y^2 \\ &- \frac{2^2}{3}\pi_x^2\pi_y^2 + \frac{2^2}{7}j_kk_x^2k_y^2 + \frac{2^2}{3^2}J_2q_x^2q_y^2 - \frac{2}{3^2}J_3n_x^2n_y^2 \\ &+ \frac{2}{3 \cdot 5 \cdot 7}J_2J_4k_x^2k_y^2 - \frac{2^2}{5 \cdot 7}J_4b_x^2b_y^2 + \frac{2}{3}(mn)^4(xy)^2. \end{aligned} \quad (7')$$

Cambiando in quest'ultima relazione le y nelle k e tenendo presente, come può facilmente verificarsi, che

$$(\rho k)^2\rho_x^2k_x^2 = \frac{1}{2 \cdot 3}J_8k - \frac{1}{2}\tau + \frac{1}{2^2 \cdot 3}J_4q \quad (8')$$

$$(\pi k)^2\pi_x^2k_x^2 = -\frac{1}{2^2 \cdot 3}J_4u + \frac{1}{2^2 \cdot 3}j_kp - \frac{1}{2^2 \cdot 3}J_8k + \frac{1}{2^2}J_6b \quad (9')$$

dalla (7') si deduce

$$\begin{aligned} (am)^2(ab)^4(mk)^2a_x^2k_x^2 + (am)^2(ab)^4(ak)^2m_x^2k_x^2 &= J_4u + \frac{1}{3}J_8k \\ &- \frac{2}{3}\tau + \frac{1}{3^2}J_4q - \frac{1}{3^2}j_kp - \frac{1}{3}J_6b + \frac{2^2}{7}j_kb + \frac{2}{3^2}J_2\rho \\ &- \frac{2}{3^2}J_3\mu + \frac{2}{3 \cdot 5 \cdot 7}J_2J_4b - \frac{2}{3 \cdot 5 \cdot 7}J_4^2k + \frac{2}{3}(mn)^4k. \end{aligned} \quad (10')$$

Sostituendo questo valore nella (5'), si ha:

$$\begin{aligned} (ab)^4(ak)^2(mk)^2a_x^2m_x^2 &= \frac{1}{2}J_7m + \frac{1}{2}J_5n - \frac{1}{2 \cdot 3}(mn)^4k - J_4u \\ &- \frac{1}{3}J_8k + \frac{2}{3}\tau - \frac{1}{3^2}J_4q + \frac{1}{3^2}j_kp + \frac{1}{3}J_6b - \frac{2^2}{7}j_kb \\ &- \frac{2}{3^2}J_2\rho + \frac{2}{3^2}J_3\mu - \frac{2}{3 \cdot 5 \cdot 7}J_2J_4b + \frac{2}{3 \cdot 5 \cdot 7}J_4^2k \end{aligned} \quad (11')$$

dalla quale, facendo le quarte sovrapposizioni dei due membri sopra

q , si ottiene :

$$\begin{aligned}
 (ab)^4 (ak)^2 (mk)^2 (aq)^2 (mq)^2 = & -\frac{1}{2} J_7 (qm)^4 + \frac{1}{2} J_5 (qn)^4 \\
 & - \frac{1}{2 \cdot 3} (mn)^4 J_8 - J_4 (qu)^4 - \frac{1}{3} J_8^2 + \frac{2}{3} (q\tau)^4 \\
 & - \frac{1}{3^2} J_4 (qq')^4 + \frac{1}{3^2} j_k (pq)^4 + \frac{1}{3} J_6 J_{10} - \frac{2^2}{7} j_k J_{10} \\
 & - \frac{2}{3^2} J_2 (qp)^4 + \frac{2}{3^2} J_3 (q\mu)^4 - \frac{2}{3 \cdot 5 \cdot 7} J_2 J_4 J_{10} + \frac{2}{3 \cdot 5 \cdot 7} J_4^2 J_8.
 \end{aligned} \tag{12'}$$

Ma evidentemente

$$(ab)^4 (ak)^2 (mk)^2 (aq)^2 (mq)^2 = (nk)^2 (qn)^2 (mk)^2 (qm)^2,$$

cosicchè, eguagliando i secondi membri delle (4') e (12'), si ha

$$\begin{aligned}
 (q\tau)^4 = & \frac{3}{2^2} J_8^2 + \frac{3}{2 \cdot 5 \cdot 7} J_4^2 J_8 + \frac{3}{2^5} i_m (\mu m)^4 - \frac{1}{2^4} J_2 (\mu \varepsilon)^4 \\
 & - \frac{3^2}{2^3 \cdot 5 \cdot 7} J_2 (\mu \nu)^4 + \frac{1}{2^4} J_3 (\mu H_m)^4 - \frac{3^2}{2 \cdot 5 \cdot 7} J_4 (\mu t)^4 \\
 & - \frac{3^2}{2 \cdot 5 \cdot 7} J_4 (\delta \alpha)^2 - \frac{3^2}{2^3 \cdot 5 \cdot 7} J_2 (\delta \beta)^2 - \frac{1}{2^4} J_2 (\delta \gamma)^2 \\
 & - \frac{1}{2^2} J_7 (qm)^4 - \frac{3}{2^2} J_5 (qn)^4 + \frac{1}{2^2 \cdot 5} J_2 j_k J_8 + \frac{3}{2} J_4 (qu)^4 \\
 & + \frac{1}{2 \cdot 3} J_4 (qq')^4 - \frac{1}{2 \cdot 3} j_k (pq)^4 - \frac{1}{2} J_6 J_{10} \\
 & + \frac{2 \cdot 3}{7} j_k J_{10} + \frac{1}{3} J_2 (qp)^4 - \frac{1}{3} J_3 (q\mu)^4 + \frac{1}{5 \cdot 7} J_2 J_4 J_{10}.
 \end{aligned}$$

Indicando per brevità il secondo membro della precedente eguaglianza con A , possiamo scrivere

$$(q\tau)^4 = A. \tag{a'}$$

Ciò posto, si consideri nuovamente la (d), che può scriversi

$$q + \frac{1}{2^3 \cdot 3} J_2 p + \frac{3}{2^2 \cdot 5 \cdot 7} J_2 b + \frac{3}{5 \cdot 7} J_4 k = \frac{3}{2^3} H_m + \frac{1}{2^3 \cdot 3} J_3 m. \tag{13'}$$

Facendo le seconde sovrapposizioni dei due membri della precedente eguaglianza sopra sè stessi, si ha, ponendo $(pq)^2 p_x^2 q_x^2 = \eta$:

$$\begin{aligned}
 (qq')^2 q_x^2 q_x'^2 = & \frac{3}{2^6} j_m m - \frac{3}{2^7} i_m H_m + \frac{1}{2^6 \cdot 3^2} J_3^2 H_m \\
 & + \frac{1}{2^6 \cdot 3} J_3 i_m \cdot m - \frac{1}{2^6 \cdot 3^2} J_2^2 H_p - \frac{3}{2^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2} J_2^2 j_k k \\
 & + \frac{3}{2^5 \cdot 5^2 \cdot 7^2} J_2^2 J_4 b - \frac{3^2}{5^2 \cdot 7^2} J_4^2 b - \frac{1}{2^2 \cdot 3} J_2 \eta \quad (14') \\
 & - \frac{3}{2 \cdot 5 \cdot 7} J_2 \tau - \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 7} J_4 \rho - \frac{1}{2^4 \cdot 5 \cdot 7} J_2^2 \pi \\
 & - \frac{1}{2^2 \cdot 5 \cdot 7} J_2 J_4 u - \frac{3}{2^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2} J_2 J_4^2 k,
 \end{aligned}$$

dalla quale, cambiando le x nell'e b , si ricava

$$\begin{aligned}
 (q\tau)^4 = & \frac{3}{2^6} j_m J_7 - \frac{3}{2^7} i_m D_{km} + \frac{1}{2^6 \cdot 3^2} J_3^2 D_{km} + \frac{1}{2^6 \cdot 3} J_3 i_m J_7 \\
 & - \frac{1}{2^6 \cdot 3^2} J_2^2 D_{kp} - \frac{3}{2^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2} J_2^2 j_k^2 + \frac{1}{2^6 \cdot 5^2 \cdot 7^2} J_2^2 J_4^3 \\
 & - \frac{3}{2 \cdot 5^2 \cdot 7^2} J_4^4 - \frac{1}{2^2 \cdot 3} J_2 (p\tau)^4 - \frac{1}{2 \cdot 5 \cdot 7} J_2 J_8 j_k \\
 & + \frac{1}{2^2 \cdot 5 \cdot 7} J_2 J_4 J_{10} - \frac{1}{5 \cdot 7} J_4^2 J_8 - \frac{1}{2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} J_4^2 J_6 j_k \\
 & + \frac{1}{2^5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} J_2^2 J_4 J_8 - \frac{1}{2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} J_2 J_4^2 J_6 - \frac{3}{2^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2} J_2 J_4^2 j_k
 \end{aligned}$$

ovvero, indicando il secondo membro di questa eguaglianza con B ,

$$(q\tau)^4 = B. \quad (b')$$

Dalle (a') e (b') si deduce

$$A - B = 0. \quad (I)$$

Questa relazione è del 16° grado nei coefficienti della forma fondamentale e non è identicamente nulla, perchè in B manca il termine J_8^2 che si trova invece in A ; essa è dunque la relazione del 16° grado che si cerca.

Rimane soltanto ad esprimere le forme invariantive che figurano in A e B in funzione degli invarianti fondamentali $J_2, J_3, \dots J_{10}$, per ottenere l'espressione effettiva della relazione cercata. — Le forme $(qm)^4, (qn)^4$ che si trovano nella A sono state calcolate rispettivamente a pag. 82 e 95 della mia Nota precedente; bisogna quindi calcolare le altre.

CALCOLO DI $(\mu m)^4$ — Essendo $\mu = (nk)^2 n_x^2 k_x^2$, si avrà

$$(\mu m)^4 = (nk)^2 (mn)^2 (mk)^2.$$

Dalla (6') si ricava immediatamente, riflettendo che

$$(\rho k)^4 = J_{10}$$

$$(\pi k)^4 = \frac{1}{2 \cdot 3} J_4 J_6,$$

la seguente espressione di $(\mu m)^4$:

$$\begin{aligned} (\mu m)^4 = & \frac{2}{3} J_{10} + \frac{1}{3} J_4 J_6 + \frac{2^3}{5 \cdot 7} J_4 j_k + \frac{1}{3^2} J_2 J_8 \\ & - \frac{1}{3^2} J_3 J_7 + \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7} J_2 J_4^2. \end{aligned} \quad (15')$$

CALCOLO DI $(\mu v)^4$ — Si ha evidentemente

$$(\mu v)^4 = (nk)^2 (vn)^2 (vk)^2.$$

Intanto poichè $v = (mh)^2 m_x^2 h_x^2$, si deduce

$$v_x^2 v_y^2 = \frac{1}{2} (mh)^2 m_x^2 h_y^2 + \frac{1}{2} (mh)^2 m_y^2 h_x^2 - \frac{1}{3} J_7 (xy)^2,$$

dalla quale, cambiando le x nelle n e le y nelle k , si ottiene

$$\begin{aligned} (nk)^2 (vn)^2 (vk)^2 = & \frac{1}{2} (mh)^2 (mn)^2 (kh)^2 (nk)^2 \\ & + \frac{1}{2} (mh)^2 (mk)^2 (nh)^2 (nk)^2 - \frac{1}{3} J_7^2. \end{aligned}$$

Il 1° termine che figura nel 2° membro si esprime subito in funzione degli invarianti fondamentali. Si ha infatti

$$(k h)^2 k_x^2 h_y^2 = \frac{1}{2 \cdot 3} J_4 k_x^2 k_y^2 + \frac{1}{3} j_k (x y)^2$$

donde

$$(m h)^2 (m n)^2 (k h)^2 (n k)^2 = \frac{1}{2 \cdot 3} J_4 (\mu m)^4 + \frac{1}{3} j_k (m n)^4.$$

Quanto al 2° termine, basta sviluppare in serie la forma

$$k_x^2 k_y^2 h_x^2 h_y^2.$$

Si trova

$$k_x^2 k_y^2 h_x^2 h_y^2 = \frac{1}{2} k_x^4 h_y^4 + \frac{1}{2} k_y^4 h_x^4 - \frac{1}{2 \cdot 3} j_k (x y)^4 - \frac{1}{3} J_4 k_x^2 k_y^2 (x y)^2$$

donde

$$(m k)^2 (n k)^2 (m h)^2 (n h)^2 = \frac{1}{2} J_5 J_9 + \frac{1}{2} J_7^2 - \frac{1}{2 \cdot 3} j_k (m n)^4 - \frac{1}{3} J_4 (\mu m)^4.$$

Si ha quindi

$$(\mu v)^4 = -\frac{1}{2^2 \cdot 3} J_4 (\mu m)^4 + \frac{1}{2^2 \cdot 3} j_k (m n)^4 + \frac{1}{2^2} J_5 J_9 - \frac{1}{2^2 \cdot 3} J_7^2 \quad (16')$$

ove $(\mu m)^4$ ci è data dalla (15') e $(m n)^4$ dalla (17) pag. 84.

CALCOLO DI $(q q')^4$. — Dalla relazione

$$(a n)^4 a_x^4 = q + \frac{2}{7} J_4 k + \frac{1}{5} J_2 b \quad (17')$$

trovata a pag. 89, si ricava

$$(q q')^4 = (a n)^4 (a q)^4 - \frac{2}{7} J_4 J_8 - \frac{1}{5} J_2 J_{10}.$$

Si trova intanto

$$(aq)^4 a_*^4 = -\frac{2^4}{3 \cdot 5 \cdot 7} J_4 m + \frac{2^2}{5} \mu + \frac{2}{5} \nu + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5} J_2 n + \frac{1}{5} J_3 h \quad (18')$$

donde

$$\begin{aligned} (aq)^4 (an)^4 &= -\frac{2^4}{3 \cdot 5 \cdot 7} J_4 (mn)^4 + \frac{2^2}{5} (\mu n)^4 + \frac{2}{5} (\nu n)^4 \\ &\quad + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5} J_2 i_n + \frac{1}{5} J_3 J_9. \end{aligned}$$

Le sovrapposizioni indicate nel 2° membro sono state calcolate nella mia Nota precedente; si può quindi esprimere immediatamente $(aq)^4 (an)^4$ e per conseguenza $(qq')^4$ in funzione degli invarianti fondamentali. — Si ha

$$\begin{aligned} (qq')^4 &= -\frac{2^4}{3 \cdot 5 \cdot 7} J_4 (mn)^4 + \frac{2^2}{5} (\mu n)^4 + \frac{2}{5} (\nu n)^4 \\ &\quad + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5} J_2 i_n + \frac{1}{5} J_3 J_9 - \frac{2}{7} J_4 J_8 - \frac{1}{5} J_2 J_{10}. \end{aligned} \quad (19')$$

CALCOLO DI $(pq)^4$. — Con metodo analogo al precedente si determina $(pq)^4$. Dalla (17') si ha infatti

$$(pq)^4 = (an)^4 (ap)^4 - \frac{2}{7} J_4 J_6 - \frac{1}{5} J_2 J_8.$$

A pag. 84 si trova intanto l'espressione di $(ap)^4 a_*^4$, la quale ci dà

$$(ap)^4 (an)^4 = -\frac{2^5}{5 \cdot 7} i_n + \frac{2 \cdot 3}{5} (tn)^4 + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5} J_2 (mn)^4 + \frac{1}{5} J_3 J_7;$$

ma $(tn)^4 = (\mu m)^4$, quindi si ottiene

$$\begin{aligned} (pq)^4 &= -\frac{2^5}{5 \cdot 7} i_n + \frac{2 \cdot 3}{5} (\mu m)^4 + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5} J_2 (mn)^4 \\ &\quad + \frac{1}{5} J_3 J_7 - \frac{2}{7} J_4 J_6 - \frac{1}{5} J_2 J_8. \end{aligned} \quad (20')$$

CALCOLO DI $(\mu t)^4$. — Si ha evidentemente

$$(\mu t)^4 = (n k)^2 (t n)^2 (t k)^2.$$

Si trova intanto facilmente

$$(k t)^2 k_x^2 t_x^2 = \frac{1}{2 \cdot 3} J_5 k + \frac{1}{2 \cdot 3} J_4 m - \frac{1}{2} v,$$

dalla quale si deduce

$$(\mu t)^4 = \frac{1}{2 \cdot 3} J_5 J_7 + \frac{1}{2^2 \cdot 3} J_4 (m n)^4 - \frac{1}{2} (v n)^4. \quad (21')$$

CALCOLO DI $(q u)^4$ — Dalla (7) pag. 81 si ricava immediatamente, cambiando le y nelle k e facendo uso delle relazioni trovate nella medesima pagina,

$$(a t)^4 a_x^4 = \frac{2}{3} q + 2 u + \frac{2^3}{5 \cdot 7} J_4 k + \frac{1}{3^2} J_2 p - \frac{1}{3^2} J_3 m + \frac{2}{5 \cdot 7} J_2 h \quad (22')$$

dalla quale si deduce

$$\begin{aligned} (a t)^4 (a q)^4 &= \frac{2}{3} (q q')^4 + 2 (q u)^4 + \frac{2^3}{5 \cdot 7} J_4 J_8 + \frac{1}{3^2} J_2 (p q)^4 \\ &\quad - \frac{1}{3^2} J_3 (q m)^4 + \frac{2}{5 \cdot 7} J_2 J_{10}. \end{aligned} \quad (23')$$

Similmente dalla (18') si deduce

$$\begin{aligned} (a t)^4 (a q)^4 &= -\frac{2^4}{3 \cdot 5 \cdot 7} J_4 B_{k,m} + \frac{2^2}{5} (\mu t)^4 + \frac{2}{5} (v t)^4 \\ &\quad + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5} J_2 (t n)^4 + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5} J_3 J_4 J_5. \end{aligned} \quad (24')$$

Si trova intanto con i soliti metodi:

$$(t v)^4 = -\frac{1}{2^2 \cdot 3} J_4 B_{k,m} + \frac{1}{2^2 \cdot 3} j_k i_m + \frac{1}{2 \cdot 3} J_7 J_8;$$

cosicchè, sostituendo questo valore nella (24') e uguagliando in se-

guito i secondi membri delle (23') e (24'), si ottiene:

$$\begin{aligned}
 (qu)^4 = & -\frac{13}{2^2 \cdot 5 \cdot 7} J_4 B_{k,m} + \frac{2}{5} (\mu t)^4 + \frac{1}{2^2 \cdot 3 \cdot 5} j_k i_m + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5} J_7 J_5 \\
 & + \frac{1}{2^2 \cdot 3 \cdot 5} J_2 (\mu m)^4 + \frac{1}{2^2 \cdot 3 \cdot 5} J_3 J_4 J_5 - \frac{1}{3} (qq')^4 - \frac{2^2}{5 \cdot 7} J_4 J_8 \quad (25') \\
 & - \frac{1}{2 \cdot 3^2} J_2 (pq)^4 + \frac{1}{2 \cdot 3^2} J_3 (qm)^4 - \frac{1}{5 \cdot 7} J_2 J_{10},
 \end{aligned}$$

la quale relazione determina $(qu)^4$, essendo tutte le forme invariantive indicate nel 2° membro state già espresse in funzione degli invarianti fondamentali.

CALCOLO DI $(qp)^4$.—Questo invariante si calcola facilmente per mezzo della (14'), dalla quale si deduce cambiando le x nelle k . Si ottiene:

$$\begin{aligned}
 (qp)^4 = & \frac{3}{2^6} j_m J_5 - \frac{3}{2^7} i_m B_{k,m} + \frac{1}{2^6 \cdot 3^2} J_3^2 B_{k,m} + \frac{1}{2^6 \cdot 3} J_3 J_5 i_m \\
 & - \frac{1}{2^6 \cdot 3^2} J_2^2 B_{k,p} - \frac{3}{2^5 \cdot 5^2 \cdot 7^2} J_2^2 J_4 j_k - \frac{3^2}{5^2 \cdot 7^2} J_4^2 j_k \\
 & - \frac{1}{2^2 \cdot 3} J_2 (qu)^4 - \frac{1}{2 \cdot 5 \cdot 7} J_2 J_4 J_8 - \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 7} J_4 J_{10} \\
 & - \frac{1}{2^5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} J_2^2 J_4 J_6 - \frac{3}{2^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2} J_2 J_4^2. \quad (26')
 \end{aligned}$$

CALCOLO DI $(\mu H_m)^4$. — Dalla relazione

$$(mm')^2 m_x^2 m_y'^2 = H_{mx}^2 H_{my}^2 + \frac{1}{3} i_m (xy)^2$$

si deduce, cambiando le y nelle n e le x nelle k ,

$$(\mu H_m)^4 = (n H_m)^2 (k H_m)^2 (nk)^2 = (mm')^2 (m'n)^2 (mk)^2 (nk)^2 - \frac{1}{3} J_7 i_m.$$

Facendo uso della (11') che ci dà il valore di $(mk)^2 (nk)^2 m_x^2 n_x^2$,

si ha :

$$\begin{aligned}
 (\mu H_m)^4 = & \frac{1}{3} (m n)^4 J_5 + \frac{1}{2 \cdot 3} i_m J_7 - J_4 (m u)^4 - \frac{1}{3} J_8 J_5 \\
 & + \frac{2}{3} (\tau m)^4 - \frac{1}{3^2} J_4 (q m)^4 + \frac{1}{3^2} j_k (p m)^4 \\
 & + \frac{1}{3} J_6 J_7 - \frac{2^2}{7} j_k J_7 - \frac{2}{3^2} J_2 (\rho m)^4 + \frac{2}{3^2} J_3 (\mu m)^4 \quad (27') \\
 & - \frac{2}{3 \cdot 5 \cdot 7} J_2 J_4 J_7 + \frac{2}{3 \cdot 5 \cdot 7} J_4^2 J_5 ;
 \end{aligned}$$

e però il calcolo di $(\mu H_m)^4$ dipende da quello delle forme $(m u)^4$, $(\tau m)^4$, $(\rho m)^4$, le sole che non sono state fin qui calcolate.

Quanto ad $(m u)^4 = (p t)^4$, basta fare la 4^a sovrapposizione della (5) pag. 80 sopra t , della (22') sopra m ed eguagliare i secondi membri delle eguaglianze che così si ottengono. Si trova :

$$(u m)^4 = \frac{1}{7} J_2 J_7 + \frac{2}{5 \cdot 7} J_4 J_5 - \frac{2}{3} (q m)^4 - \frac{1}{3^2} J_2 (p m)^4 + \frac{1}{3^2} J_3 i_m.$$

La forma $(\rho m)^4$, essendo eguale a $(q m)^2 (q k)^2 (m k)^2$, può dedursi immediatamente dalla (1') cambiando le x nelle k e facendo uso della relazione precedente. Si ottiene :

$$\begin{aligned}
 (\rho m)^4 = & \frac{1}{2^4} i_m J_5 - \frac{1}{2^3 \cdot 3 \cdot 7} J_2^2 J_7 - \frac{1}{2^3 \cdot 3 \cdot 7} J_2 J_4 J_5 + \frac{1}{2^2 \cdot 3^2} J_2 (q m)^4 \\
 & + \frac{1}{2^3 \cdot 3^3} J_2^2 (p m)^4 - \frac{1}{2^3 \cdot 3^3} J_2 J_3 i_m + \frac{1}{2^3 \cdot 3} J_3 B_{k,m} - \frac{3}{5 \cdot 7} J_4 J_7.
 \end{aligned}$$

Il calcolo di $(\tau m)^4 = (q m)^2 (q h)^2 (m h)^2$ può dedursi, come sopra, dalla stessa (1'), cambiando le x nelle h . Si trova :

$$\begin{aligned}
 (\tau m)^4 = & \frac{1}{2^4} i_m J_7 - \frac{1}{2^3 \cdot 3} J_2 (\varepsilon h)^4 - \frac{1}{2^2 \cdot 5 \cdot 7} J_2 J_5 j_k + \frac{1}{2^3 \cdot 5 \cdot 7} J_2 J_4 J_7 \\
 & + \frac{1}{2^3 \cdot 3} J_3 D_{k,m} - \frac{1}{2 \cdot 5 \cdot 7} J_4^2 J_5,
 \end{aligned}$$

cosicchè, per calcolare $(\tau m)^4$, bisogna prima trovare il valore di $(\varepsilon h)^4 = (p v)^4$.

Dalla (1) pag. 79 si ricavano coi soliti metodi le relazioni

$$\begin{aligned}(g n)^4 g_x^4 &= \frac{2}{3 \cdot 5} J_4 m - \frac{2^5}{5 \cdot 7} \mu + \frac{2}{5} \nu + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5} J_2 n + \frac{1}{5} J_3 b, \\(g p)^4 g_x^4 &= -\frac{2^2}{5 \cdot 7} q + \frac{2^4}{5^2 \cdot 7^2} J_4 k - \frac{2}{5 \cdot 7} J_2 b + \frac{2^3 \cdot 3}{5 \cdot 7} u - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5} J_2 p \\&\quad + \frac{1}{3 \cdot 5} J_3 m + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5^2} J_2^2 k.\end{aligned}$$

Facendo della 1^a di queste eguaglianze la 4^a sovrapposizione sopra p , della 2^a la 4^a sovrapposizione sopra n ed eguagliando infine i secondi membri delle eguaglianze che si ottengono, si ha :

$$\begin{aligned}(\varepsilon h)^4 &= -\frac{2}{7} (q n)^4 + \frac{2^3}{5 \cdot 7^2} J_4 J_7 - \frac{1}{7} J_2 J_9 - \frac{1}{2 \cdot 3} J_2 (p n)^4 - \frac{1}{2} J_3 J_8 \\&\quad + \frac{1}{2 \cdot 3} J_3 (m n)^4 + \frac{1}{2^2 \cdot 3 \cdot 5} J_2^2 J_7 - \frac{1}{3} J_4 (p m)^4 + 2^2 (u n)^4.\end{aligned}$$

Intanto facendo le quarte sovrapposizioni delle (17') e (22') rispettivamente sopra t ed n , riflettendo che $(q t)^4 = (p m)^4$ il cui valore è stato innanzi trovato ed eguagliando i due membri delle eguaglianze che così si ottengono, si ha :

$$\begin{aligned}(u n)^4 &= \frac{1}{2} (p m)^4 + \frac{1}{5 \cdot 7} J_4 J_7 + \frac{1}{2^2 \cdot 3 \cdot 5} J_2 J_4 J_5 - \frac{1}{3} (q n)^4 \\&\quad - \frac{1}{2 \cdot 3^2} J_2 (p n)^4 + \frac{1}{2 \cdot 3^2} J_3 (m n)^4 - \frac{1}{5 \cdot 7} J_2 J_9.\end{aligned}$$

Nota $(u n)^4$, lo saranno anche $(\varepsilon h)^4$ e $(\tau m)^4$ ed infine $(\mu H_m)^4$.

CALCOLO DI $(q \mu)^4$.—Determinato $(\mu H_m)^4$, si trova immediatamente $(q \mu)^4$, facendo uso della (d) pag. 81. Si ottiene

$$\begin{aligned}(q \mu)^4 &= -\frac{3}{2^3} (\mu H_m)^4 + \frac{1}{2^3 \cdot 3} J_3 (\mu m)^4 - \frac{1}{2^3 \cdot 3} J_2 (u n)^4 \\&\quad - \frac{1}{2^3 \cdot 5 \cdot 7} J_2 J_4 J_7 - \frac{3}{5 \cdot 7} J_4 J_9\end{aligned}\tag{28'}$$

ove, come si vede, le forme indicate nel 2° membro sono tutte state già calcolate.

CALCOLO DI $(\delta \alpha)^2$. — Essendo $\alpha_x^2 = (k m)^3 k_x m_x$, si ha :

$$(\delta \alpha)^2 = (k m)^3 (k \delta) (m \delta).$$

Intanto :

$$\delta_x \delta_y = (n k)^3 n_x k_y - \frac{1}{2} J_7(x y)$$

donde

$$(\delta \alpha)^2 = (n k)^3 (k' m)^3 (n k') (k m) - \frac{1}{2} J_7 J_5.$$

Secondo una nota identità, si ha :

$$\begin{aligned} (n k)^3 (k' m)^3 (n k') (k m) &= \frac{1}{2} J_5 J_7 + \frac{1}{2} (k' m)^2 (k n)^2 (k' n)^2 (k m)^2 \\ &\quad - \frac{1}{2} (k' m)^2 (n k)^2 (k k')^2 (m n)^2. \end{aligned}$$

Si trova intanto facilmente

$$\begin{aligned} (k' m)^2 (k n)^2 (k' n)^2 (k m)^2 &= J_5 J_7 - \frac{1}{2 \cdot 3} J_4 (m n)^4 - 2 (\nu n)^4, \\ (k' m)^2 (n k)^2 (k k')^2 (m n)^2 &= (\nu n)^4 + \frac{1}{3} J_4 (m n)^4; \end{aligned}$$

cosicchè, sostituendo, si ottiene :

$$(\delta \alpha)^2 = \frac{1}{2} J_5 J_7 - \frac{1}{2^2} J_4 (m n)^4 - \frac{3}{2} (\nu n)^4 \quad (29')$$

CALCOLO DI $(\delta \beta)^2$. — Con procedimento perfettamente analogo al precedente, si trova :

$$(\delta \beta)^2 = \frac{1}{2^2} J_7^2 + \frac{1}{2^2} J_5 J_9 - \frac{1}{2^2} j_k (m n)^4 - \frac{1}{2^2} J_4 (\mu m)^4. \quad (30')$$

CALCOLO DI $(p\tau)^4$.—Dalla (6') si ha, facendo la 4^a sovrapposizione dei due membri di essa sopra q e riflettendo che $(\pi q)^4 = (p\tau)^4$,

$$(p\tau)^4 = \frac{2}{3} J_4 (pq)^4 + (\rho q)^4 + \frac{3}{7} j_k J_8 + \frac{1}{2 \cdot 3} J_2 (qq')^4 - \frac{1}{2 \cdot 3} J_3 (qn)^4 \\ + \frac{1}{2 \cdot 5 \cdot 7} J_2 J_4 J_8 - \frac{3}{5 \cdot 7} J_4 J_{10} - \frac{3}{2} (mn)^2 (qm)^2 (qn)^2.$$

La (1') intanto ci dà :

$$(mn)^2 (qm)^2 (qn)^2 = \frac{1}{2^4} i_m (mn)^4 - \frac{1}{2^3 \cdot 3} J_2 (n\varepsilon)^4 - \frac{2}{2^3 \cdot 5 \cdot 7} J_2 (\nu n)^4 \\ + \frac{1}{2^3 \cdot 3} J_3 (nH_m)^4 - \frac{3}{5 \cdot 7} J_4 (\mu m)^4;$$

coscicchè la determinazione di $(mn)^2 (qm)^2 (qn)^2$ dipende soltanto da $(n\varepsilon)^4$ e $(nH_m)^4$, essendo le altre forme del 2° membro già note.

Quanto a $(nH_m)^4$ si determina immediatamente per mezzo della (d) pag. 81; $(n\varepsilon)^4 = (pm)^2 (pn)^2 (mn)^2$ si ottiene subito dalla (6'), riflettendo che $(\rho p)^4 = (uq)^4$ e $(\pi p)^4 = D_{k,p}$, forme già precedentemente calcolate.

Si ottiene pertanto :

$$(p\tau)^4 = (\rho q)^4 + \frac{2}{3} J_4 (pq)^4 + \frac{3}{7} j_k J_8 + \frac{1}{2 \cdot 3} J_2 (qq')^4 \\ - \frac{1}{3} J_3 (qn)^4 + \frac{3}{2^3 \cdot 5 \cdot 7} J_2 J_4 J_8 - \frac{3}{5 \cdot 7} J_4 J_{10} - \frac{3}{2^5} i_m (mn)^4 \\ + \frac{1}{2^2 \cdot 3^2} J_2 J_4 i_p + \frac{1}{2^3 \cdot 3} J_2 (qu)^4 + \frac{1}{2^3 \cdot 7} J_2 J_6 j_k - \frac{1}{2^3 \cdot 3} J_2 D_{k,p} \quad (31') \\ + \frac{1}{2^4 \cdot 3^2} J_2^2 (pq)^4 - \frac{1}{2^3 \cdot 3^2} J_2 J_3 (pn)^4 + \frac{1}{2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} J_2^2 J_4 J_6 \\ + \frac{3^2}{2^3 \cdot 5 \cdot 7} J_2 (\nu n)^4 - \frac{1}{2^3 \cdot 5 \cdot 7} J_2 J_3 J_9 + \frac{1}{2^4 \cdot 3^2} J_3^2 (mn)^4 \\ - \frac{1}{2 \cdot 5 \cdot 7} J_3 J_4 J_7 + \frac{3^2}{2 \cdot 5 \cdot 7} J_4 (\mu m)^4.$$

CALCOLO DI $(\mu\varepsilon)^4 + (\delta\gamma)^2$. — Per completare la ricerca delle
Rend. Circ. Matem., t. X, parte 1^a.—Stampato il 3 gennajo 1896. 8

forme invariantive che si trovano nelle A e B , ci rimarrebbe a calcolare $(\mu\epsilon)^4$ e $(\delta\gamma)^2$; ma, come si vedrà, torna più comodo calcolare la loro somma.

Si ha infatti

$$(\mu\epsilon)^4 = \frac{1}{2}(nk)^2(mn)^2(pk)^2(pm)^2 + \frac{1}{2}(nk)^2(pn)^2(mk)^2(pm)^2 - \frac{1}{3}J_7(pm)^4,$$

$$(\delta\gamma)^2 = \frac{1}{2}(nk)^2(pm)^2(mk)^2(pn)^2 - \frac{1}{2}(nk)^2(pm)^2(pk)^2(mn)^2.$$

Sommando membro a membro,

$$(\mu\epsilon)^4 + (\delta\gamma)^2 = (nk)^2(pm)^2(mk)^2(pn)^2 - \frac{1}{3}J_7(pm)^4.$$

Come si vede, il calcolo di $(\mu\epsilon)^4 + (\delta\gamma)^2$ dipende da quello della sola forma $(nk)^2(pm)^2(mk)^2(pn)^2$, la quale si ottiene immediatamente dalla (11') cambiando le x nelle p . Si ha:

$$\begin{aligned} (\mu\epsilon)^4 + (\delta\gamma)^2 &= \frac{1}{2 \cdot 3} J_7(pm)^4 + \frac{1}{2} J_5(pn)^4 - \frac{1}{2 \cdot 3} J_6(mn)^4 \\ &\quad - J_4(pu)^4 + \frac{2}{3} (p\tau)^4 - \frac{1}{3^2} J_4(pq)^4 + \frac{1}{3^2} j_k i_p - \frac{2^2}{7} j_k j_8 \quad (32') \\ &\quad - \frac{2}{3^2} J_2(qu)^4 + \frac{2}{3^2} J_3(un)^4 - \frac{2}{3 \cdot 5 \cdot 7} J_2 J_4 J_8 + \frac{2}{3 \cdot 5 \cdot 7} J_4^2 J_6. \end{aligned}$$

Avendo così espresse in funzione degli invarianti fondamentali le forme invariantive che si trovano nelle A e B , non resta che a fare le sostituzioni e le opportune riduzioni.

Si perviene così alla seguente relazione del 16° grado, che è la più semplice delle tre relazioni che si cercano:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2^3 \cdot 3 \cdot 5^4} J_2^6 J_4 - \frac{3}{2^3 \cdot 5^3} J_2^4 J_4^2 + \frac{7}{2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2} J_2^4 J_8 - \frac{1}{2 \cdot 5^3} J_2^3 J_3 J_4 - \frac{7}{2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2} J_2^3 J_3 J_7 \\ &\quad + \frac{551}{2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^3} J_2^3 J_4 J_6 - \frac{7}{2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2} J_2^3 J_5^2 + \frac{13}{2^2 \cdot 3 \cdot 5^2} J_2^3 J_{10} + \frac{3^3}{2^3 \cdot 5^2} J_2^3 J_4^3 \\ &\quad - \frac{7}{2^3 \cdot 5} J_2^2 J_4 J_8 + \frac{3^2}{2 \cdot 5^2} J_2^2 J_3 J_4^2 - \frac{7}{2^2 \cdot 3 \cdot 5} J_2^2 J_3 J_8 + \frac{7}{2^3 \cdot 5} J_2 J_3 J_4 J_7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{829}{2^2 \cdot 3 \cdot 5^2} J_2 J_4 J_6 + \frac{7}{2^3 \cdot 5} J_2 J_4 J_5^2 - 2 J_2 J_4 J_{10} + \frac{1}{2^3 \cdot 5} J_2 J_5 J_9 \\
& + \frac{3^2 \cdot 7}{2^3 \cdot 5} J_2 J_6 J_8 - \frac{1}{2^3 \cdot 5} J_2 J_7^2 + \frac{3}{2 \cdot 5^2} J_3^4 J_4 + \frac{7}{2^2 \cdot 3 \cdot 5} J_3^3 J_7 - \frac{551}{2^2 \cdot 3 \cdot 5^2} J_3^2 J_4 J_6 \\
& + \frac{7}{2^2 \cdot 3 \cdot 5} J_3^2 J_5^2 - \frac{13}{2 \cdot 5} J_3^2 J_{10} + \frac{1}{2^3 \cdot 3 \cdot 5} J_3 J_4^2 J_5 + \frac{1}{2^2 \cdot 5} J_3 J_4 J_9 - \frac{3^2 \cdot 7}{2^3 \cdot 5} J_3 J_6 J_7 \\
& - \frac{3^2}{5^2 \cdot 7^2} J_4^4 - \frac{13}{5 \cdot 7} J_4^2 J_8 + \frac{3}{2^2 \cdot 5} J_4 J_5 J_7 + \frac{3^2 \cdot 7 \cdot 11}{2 \cdot 5^2} J_4 J_6^2 - \frac{3^2 \cdot 7}{2^3 \cdot 5} J_5^2 J_6 \\
& + \frac{2^2 \cdot 3 \cdot 7}{5} J_6 J_{10} - \frac{3}{2 \cdot 5} J_7 J_9 + \frac{3}{2^2} J_8^2 = 0.
\end{aligned}$$

§ 3.

Il metodo, adoperato per la ricerca della relazione del 16° grado, si presta per il calcolo della relazione del 18° grado.

Dalla (3') infatti, cambiando le x nelle n , le y nelle h e ponendo per brevità $(nh)^2 n_x^2 h_x^2 = \theta$; $(nh)^3 n_x h_x = \delta'$, si ricava

$$\begin{aligned}
(qm)^2 (qn)^2 (mh)^2 (nh)^2 &= \frac{1}{2^4} i_m (\theta m)^4 - \frac{1}{2^3 \cdot 3} J_2 (\theta \varepsilon)^4 \\
&- \frac{3}{2^2 \cdot 5 \cdot 7} J_2 (\theta \nu)^4 + \frac{1}{2^3 \cdot 3} J_3 (\theta H_m)^4 - \frac{3}{5 \cdot 7} J_4 (\theta t)^4 - \frac{3}{5 \cdot 7} J_4 (\delta' \alpha)^2 \quad (33') \\
&- \frac{3}{2^2 \cdot 5 \cdot 7} J_2 (\delta' \beta)^2 - \frac{1}{2^3 \cdot 3} J_2 (\delta' \gamma)^2 + \frac{1}{3} (qm)^4 J_9.
\end{aligned}$$

Chiamando per brevità il 2° membro della precedente eguaglianza con C , si può scrivere

$$(qm)^2 (qn)^2 (mh)^2 (nh)^2 = C. \quad (c')$$

Considerando intanto la forma $(ah)^2 (mh)^2 (ah')^4 a_x^2 m_x^2$, si trova facilmente

$$\begin{aligned}
(ah)^2 (mh)^2 (ah')^4 a_x^2 m_x^2 &= \frac{1}{2} J_9 m + \frac{1}{2} J_7 n + \frac{1}{2} (mn)^4 h \\
&- (am)^2 (ah)^2 (ah')^4 m_x^2 h_x^2 - (am)^2 (mh)^2 (ah')^4 a_x^2 h_x^2.
\end{aligned} \quad (34')$$

La (7'), cambiando le y nelle h e tenendo presente che

$$(\rho h)^2 \rho_x^2 h_x^2 = -\frac{1}{2^2 \cdot 3} J_4 \rho + \frac{1}{2^2 \cdot 3} j_k q - \frac{1}{2^2 \cdot 3} J_8 h + \frac{1}{2^2} J_{10} k,$$

$$(\pi h)^2 \pi_x^2 h_x^2 = -\frac{1}{2 \cdot 3} j_k u + \frac{1}{2^2 \cdot 3} J_4 \pi + \frac{1}{2^3 \cdot 3^2} J_4^2 p + \frac{1}{2 \cdot 3} J_8 h,$$

ci dà

$$\begin{aligned} (am)^2 (ah')^4 (ah)^2 m_x^2 h_x^2 + (am)^2 (ah')^4 (mh)^2 a_x^2 h_x^2 = & -\frac{7}{3^2} J_4 \pi - \frac{1}{3^2} J_4 \rho \\ & + \frac{1}{3^2} j_k q + \frac{1}{3} J_{10} k - \frac{1}{3} J_8 h + \frac{2}{3^2} j_k u - \frac{1}{2 \cdot 3^3} J_4^2 p + \frac{2}{5 \cdot 7} J_4 j_k k \\ & + \frac{2}{3^2} J_2 \tau - \frac{2}{3^2} J_3 \theta + \frac{1}{3^2 \cdot 5 \cdot 7} J_2 J_4^2 k + \frac{2}{3 \cdot 5 \cdot 7} J_4^2 h + \frac{2}{3} (mn)^4 h; \end{aligned}$$

cosicchè, sostituendo nella (34'), si ottiene :

$$\begin{aligned} (ah)^2 (mh)^2 (ah')^4 a_x^2 m_x^2 = & \frac{1}{2} J_9 m + \frac{1}{2} J_7 n - \frac{1}{2 \cdot 3} (mn)^4 h \\ & - \frac{7}{3^2} J_4 \pi + \frac{1}{3^2} J_4 \rho - \frac{1}{3^2} j_k q - \frac{1}{3} J_{10} k + \frac{1}{3} J_8 h \\ & - \frac{2}{3^2} j_k u + \frac{1}{2 \cdot 3^3} J_4^2 p - \frac{2}{5 \cdot 7} J_4 j_k k - \frac{2}{3^2} J_2 \tau + \frac{2}{3^2} J_3 \theta \\ & = \frac{1}{3^2 \cdot 5 \cdot 7} J_2 J_4^2 k - \frac{2}{3 \cdot 5 \cdot 7} J_4^2 h \end{aligned} \quad (35')$$

dalla quale

$$\begin{aligned} (ah)^2 (mh)^2 (ah')^4 (aq)^2 (qm)^2 = & \frac{1}{2} J_9 (qm)^4 + \frac{1}{2} J_7 (qn)^4 \\ & - \frac{1}{2 \cdot 3} (mn)^4 J_{10} - \frac{7}{3^2} J_4 (\pi q)^4 + \frac{1}{3^2} J_4 (\rho q)^4 - \frac{1}{3^2} j_k (qq')^4 \\ & - \frac{2}{3^2} j_k (qu)^4 + \frac{1}{2 \cdot 3^3} J_4^2 (pq)^4 - \frac{2}{5 \cdot 7} J_4 j_k J_8 - \frac{2}{3^2} J_2 (q\tau)^4 \\ & + \frac{2}{3^2} J_3 (q\theta)^4 - \frac{1}{3^2 \cdot 5 \cdot 7} J_2 J_4^2 J_8 - \frac{2}{3 \cdot 5 \cdot 7} J_4^2 J_{10} \end{aligned}$$

che scriveremo per brevità

$$(ah)^2 (mh)^2 (ah')^4 (aq)^2 (qm)^2 = D,$$

indicando con D il secondo membro della relazione precedente.

Ma

$$(qm)^2(qn)^2(mh)^2(nh)^2 = (ab)^2(mh)^2(ab')^4(aq)^2(qm)^2, \quad (d')$$

si ha dunque

$$C - D = 0. \quad (II)$$

Questa relazione è evidentemente del 18° grado; e poichè in C si ha il termine $\frac{1}{3}(qm)^4 J_9$, ed in D il termine simile $\frac{1}{2}(qm)^4 J_9$, questo stesso termine si troverà nella (II). Da esso si dedurrà il termine J_9^2 che non potrà provenire da altri termini della (II); il che mostra che la (II) non è identicamente nulla. Inoltre nella stessa (II) si avrà il termine $J_{10}J_8$ proveniente soltanto dal termine $(mn)^4 J_{10}$ che si trova nella D ; cosicchè la relazione (II) serve ad esprimere $\alpha J_9^2 + \beta J_{10}J_8$ in funzione degli altri invarianti del medesimo grado. Essa è dunque la relazione del 18° grado che si cerca.

Rimane ora ad esprimere gl'invarianti che si trovano nelle C e D in funzione di quelli fondamentali.

CALCOLO DI $(\theta m)^4$. — Si ha evidentemente

$$(\theta m)^4 = (nh)^2(mn)^2(mh)^2 = (\nu n)^4,$$

la cui espressione, come si è detto, trovasi a pag. 95 della mia Nota precedente.

CALCOLO DI $(\theta \nu)^4$. — Si ha

$$(\theta \nu)^4 = (nh)^2(\nu n)^2(\nu h)^2.$$

Se nello sviluppo di $\nu_x^2 \nu_y^2$ trovato precedentemente, si cambiano le x nelle n e le y nelle h , si ottiene

$$(\theta \nu)^4 = \frac{1}{2}(mh)^2(mn)^2(hh')^2(nh')^2 + \frac{1}{2}(mh)^2(mh')^2(nh)^2(nh')^2 - \frac{1}{3}J_7J_9.$$

Il 1° termine del 2° membro si esprime subito in funzione degli

invarianti fondamentali. Si ha infatti

$$(h h')^2 h_x^2 h_y'^2 = \frac{1}{3} j_k k_x^2 k_y^2 - \frac{1}{2 \cdot 3} J_4 h_x^2 h_y^2 + \frac{1}{2 \cdot 3^2} J_4^2 (x y)^2,$$

dalla quale

$$(m h)^2 (n h')^2 (h h')^2 (m n)^2 = \frac{1}{3} j_k (\mu m)^4 - \frac{1}{2 \cdot 3} J_4 (\nu n)^4 + \frac{1}{2 \cdot 3^2} J_4^2 (m n)^4.$$

Quanto al 2° termine, basta sviluppare in serie la forma $h_x^2 h_y^2 h_x'^2 h_y'^2$. Si trova facilmente

$$h_x^2 h_y^2 h_x'^2 h_y'^2 = h_y'^4 h_x^4 - \frac{1}{2^2 \cdot 3^2} J_4^2 (x y)^4 - \frac{2}{3} j_k k_x^2 k_y^2 (x y)^2 + \frac{1}{3} J_4 h_x^2 h_y^2 (x y)^2$$

e però

$$(m h)^2 (n h)^2 (m h')^2 (n h')^2 = J_7 J_9 - \frac{1}{2^2 \cdot 3^2} J_4^2 (m n)^4 - \frac{2}{3} j_k (\mu m)^4 + \frac{1}{3} J_4 (\nu n)^4.$$

Sostituendo, si ha :

$$(\theta \nu)^4 = \frac{1}{2 \cdot 3} J_7 J_9 - \frac{1}{2 \cdot 3} j_k (\mu m)^4 + \frac{1}{2^2 \cdot 3} J_4 (\nu n)^4 + \frac{1}{2^3 \cdot 3^2} J_4^2 (m n)^4 \quad (36')$$

CALCOLO DI $(\theta H_m)^4$.—Per il calcolo di questo invariante ci serviremo dello stesso metodo adoperato per il calcolo di $(\mu H_m)^4$.

Si ha :

$$(\theta H_m)^4 = (m m')^2 (m' n)^2 (m h)^2 (n h)^2 - \frac{1}{3} i_m J_9.$$

Il 1° termine che figura nel 2° membro si deduce immediatamente dalla (35') cambiando le x nelle m ; cosicchè si ottiene

$$\begin{aligned} (\theta H_m)^4 &= \frac{1}{2 \cdot 3} i_m J_9 + \frac{1}{3} (m n)^4 J_7 - \frac{7}{3^2} J_4 (\pi m)^4 + \frac{1}{3^2} J_4 (\rho m)^4 \\ &\quad - \frac{1}{3^2} j_k (q m)^4 + \frac{1}{3} J_8 J_7 - \frac{1}{3} J_{10} J_5 - \frac{2}{3^2} j_k (u m)^4 \\ &\quad + \frac{1}{2 \cdot 3^3} J_4^2 (p m)^4 - \frac{2}{5 \cdot 7} J_4 J_5 j_k - \frac{2}{3^2} J_2 (\tau m)^4 \\ &\quad + \frac{2}{3^2} J_3 (\theta m)^4 - \frac{1}{3^2 \cdot 5 \cdot 7} J_2 J_4^2 J_5 - \frac{2}{5 \cdot 5 \cdot 7} J_4^2 J_7. \end{aligned} \quad (37')$$

Questa relazione determ'na $(\theta H_m)^4$, essendo tutti gli invarianti indicati nel secondo membro stati già espressi in funzione di quelli fondamentali.

CALCOLO DI $(q\theta)^4$. — Dalla (d) pag. 81 si ha :

$$(q\theta)^4 = \frac{3}{2^3} (\theta H_m)^4 + \frac{1}{2^3 \cdot 3} J_3 (\theta m)^4 - \frac{1}{2^3 \cdot 3} J_2 (p\theta)^4 \\ - \frac{3}{2^2 \cdot 5 \cdot 7} J_2 (\theta h)^4 - \frac{3}{5 \cdot 7} J_4 (\theta k)^4.$$

Si trova subito

$$(\theta h)^4 = -\frac{1}{3} j_k J_7 - \frac{1}{2 \cdot 3} J_4 J_9$$

$$(\theta k)^4 = \frac{1}{2 \cdot 3} J_4 J_7.$$

Quanto a $(p\theta)^4 = (\pi n)^4$, la determinazione può farsi nel seguente modo.

Dal valore di $(gn)^4 g_s^4$ dato precedentemente si ricava

$$(gn)^4 (gq)^4 = \frac{2}{3 \cdot 5} J_4 (qm)^4 - \frac{2^5}{5 \cdot 7} (q\mu)^4 + \frac{2}{5} (\tau m)^4 \\ + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5} J_2 (qn)^4 + \frac{1}{5} J_3 J_{10}. \quad (38')$$

Si trova intanto

$$(gq)^4 g_s^4 = -\frac{2}{3 \cdot 5 \cdot 7} J_4 p - \frac{2^2}{5 \cdot 7} \rho + \frac{2^2}{5} \pi + \frac{2}{5 \cdot 7} j_k k - \frac{2 \cdot 3^3}{5^2 \cdot 7^2} J_4 h \\ - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5} J_2 q + \frac{1}{3 \cdot 5} J_3 n - \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7} J_2 J_4 k + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5^2} J_2^2 h$$

dalla quale si deduce

$$(gn)^4 (gq)^4 = -\frac{2}{3 \cdot 5 \cdot 7} J_4 (pn)^4 - \frac{2^2}{5 \cdot 7} (q\mu)^4 + \frac{2^2}{5} (p\theta)^4 \\ + \frac{2}{5 \cdot 7} j_k J_7 - \frac{2 \cdot 3^3}{5^2 \cdot 7^2} J_4 J_9 - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5} J_2 (qn)^4 + \frac{1}{3 \cdot 5} J_3 i_n \\ - \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7} J_2 J_4 J_7 + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5^2} J_2^2 J_9. \quad (39')$$

Eguagliando i secondi membri delle (38') e (39'), si ricava il valore di $(p\theta)^4$ e per conseguenza quello di $(q\theta)^4$.

Si ottiene:

$$\begin{aligned}
 (q\theta)^4 = & \frac{3}{2^3} (\theta H_m)^4 + \frac{1}{2^3 \cdot 3} J_3 (\theta m)^4 - \frac{1}{2^4 \cdot 3^2} J_2 J_4 (qm)^4 \\
 & + \frac{1}{2^3 \cdot 3} J_2 (q\mu)^4 - \frac{1}{2^4 \cdot 3} J_2 (\tau m)^4 - \frac{1}{2^5 \cdot 3^2} J_2^2 (qn)^4 \\
 & - \frac{1}{2^5 \cdot 3} J_2 J_3 J_{10} - \frac{1}{2^4 \cdot 3^2 \cdot 7} J_2 J_4 (pn)^4 - \frac{1}{2^4 \cdot 3 \cdot 5} J_2 J_7 j_k \quad (40') \\
 & + \frac{1}{2^4 \cdot 7^2} J_2 J_4 J_9 + \frac{1}{2^5 \cdot 3^2} J_2 J_3 i_n - \frac{1}{2^5 \cdot 3^2 \cdot 7} J_2^2 J_4 J_7 \\
 & + \frac{1}{2^6 \cdot 3^2 \cdot 5} J_2^3 J_9 - \frac{1}{2 \cdot 5 \cdot 7} J_4^2 J_7.
 \end{aligned}$$

CALCOLO DI $(\theta t)^4$. — Si ha evidentemente

$$(\theta t)^4 = (nb)^2 (tn)^2 (tb)^2.$$

Sviluppando in serie $t_x^2 t_y^2$, si ha:

$$t_x^2 t_y^2 = \frac{1}{2} (mk)^2 m_y^2 k_x^2 + \frac{1}{2} (mk) m_x^2 k_y^2 - \frac{1}{3} J_5 (xy)^2$$

dalla quale si ricava subito, cambiando le x e le y rispettivamente nelle n ed h e servendoci delle relazioni trovate per il calcolo di $(\mu v)^4$,

$$(\theta t)^4 = -\frac{1}{2^2 \cdot 3} J_5 J_9 + \frac{1}{2^2} J_7^2 + \frac{1}{2^2 \cdot 3} j_k (mn)^4 - \frac{1}{2^2 \cdot 3} J_4 (\mu m)^4. \quad (41')$$

CALCOLO DI $(\delta' \alpha)^2$, $(\delta' \beta)^2$, $(\theta \varepsilon)^4 + (\delta' \gamma)^2$. — Il calcolo di questi invarianti si fa con procedimento identico a quello usato per il calcolo degli invarianti $(\delta \alpha)^2$, $(\delta \beta)^2$, $(\mu \varepsilon)^4 + (\delta \gamma)^2$.

Si ottiene:

$$(\delta' \alpha)^2 = \frac{1}{2^2} J_5 J_9 + \frac{1}{2^2} J_7^2 - \frac{1}{2^2} j_k (mn)^4 - \frac{1}{2^2} J_4 (\mu m)^4 \quad (42')$$

$$(\delta' \beta)^2 = \frac{1}{2} J_7 J_9 - \frac{1}{2^3 \cdot 3} J_4^2 (mn)^4 - \frac{1}{2} j_k (\mu m)^4 + \frac{1}{2^2} J_4 (v n)^4 \quad (43')$$

$$\begin{aligned}
(\theta \varepsilon)^4 + (\delta' \gamma)^2 = & \frac{1}{2 \cdot 3} J_9 (p m)^4 + \frac{1}{2} J_7 (p n)^4 - \frac{1}{2 \cdot 3} (m n)^4 J_8 \\
& - \frac{7}{3^2} J_4 D_{k,p} + \frac{1}{3^2} J_4 (q u)^4 - \frac{1}{3^2} j_k (p q)^4 - \frac{1}{3} J_{10} J_6 + \frac{1}{3} J_8^2 \\
& - \frac{2}{3^2} j_k B_{k,p} + \frac{1}{2 \cdot 3} J_4^2 i_p - \frac{2}{5 \cdot 7} J_4 J_6 j_k - \frac{2}{3^2} J_2 (p \tau)^4 + \frac{2}{3^2} J_3 (p \theta)^4 \\
& - \frac{1}{3^2 \cdot 5 \cdot 7} J_2 J_4 J_6 - \frac{2}{3 \cdot 5 \cdot 7} J_4^2 J_8.
\end{aligned} \quad (44')$$

Sostituendo nella (II) agli invarianti che figurano nelle C e D le loro espressioni in funzione degli invarianti fondamentali, secondo sono stati precedentemente calcolati, si ottiene la relazione seguente, che è la seconda delle relazioni che si cercano :

$$\begin{aligned}
& \frac{7}{2^8 \cdot 3^3 \cdot 5^4} J_2^9 - \frac{7 \cdot 203}{2^7 \cdot 3^4 \cdot 5^4} J_2^5 J_4 - \frac{7}{2^7 \cdot 3 \cdot 5^3} J_2^6 J_3^2 + \frac{7 \cdot 11^2}{2^7 \cdot 3^3 \cdot 5^3} J_2^6 J_6 \\
& + \frac{7 \cdot 407}{2^8 \cdot 3^2 \cdot 5^3} J_2^5 J_4^2 - \frac{7}{2^4 \cdot 3^5 \cdot 5^2} J_2^5 J_8 + \frac{7 \cdot 203}{2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^3} J_2^4 J_3^2 J_4 + \frac{7}{2^4 \cdot 3^5 \cdot 5^2} J_2^4 J_3 J_7 \\
& - \frac{7 \cdot 98173}{2^7 \cdot 3^5 \cdot 5^3} J_2^4 J_4 J_6 + \frac{7}{2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^2} J_2^4 J_{10} + \frac{7}{2^6 \cdot 5^2} J_2^3 J_3^4 - \frac{7 \cdot 11^2}{2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^2} J_2^3 J_3^2 J_6 \\
& - \frac{1}{2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2} J_2^3 J_3 J_4 J_5 - \frac{1}{2^3 \cdot 3 \cdot 5^2} J_2^3 J_3 J_9 - \frac{3 \cdot 139}{2^4 \cdot 5^2 \cdot 7} J_2^3 J_3^3 + \frac{107}{2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2} J_2^3 J_4 J_8 \\
& - \frac{7}{2 \cdot 3^4 \cdot 5^2} J_2^3 J_5 J_7 + \frac{7^2 \cdot 8389}{2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2} J_2^3 J_6^2 - \frac{7 \cdot 407}{2^7 \cdot 3 \cdot 5^2} J_2^2 J_3^2 J_4^2 + \frac{7}{2^3 \cdot 3^4 \cdot 5} J_2^2 J_3^2 J_8 \\
& - \frac{7}{2^4 \cdot 3^3 \cdot 5} J_2^2 J_3 J_4 J_7 + \frac{129071}{2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^2} J_2^2 J_4^2 J_6 - \frac{41}{2^3 \cdot 3^3 \cdot 5} J_2^2 J_4 J_{10} - \frac{1}{2^3 \cdot 3^3 \cdot 5} J_2^2 J_5 J_9 \\
& - \frac{7}{2^4 \cdot 3 \cdot 5} J_2^2 J_6 J_8 + \frac{1}{2^3 \cdot 3^3 \cdot 5} J_2^2 J_7^2 - \frac{7 \cdot 203}{2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^2} J_2 J_3^4 J_4 - \frac{7}{2^3 \cdot 3^4 \cdot 5} J_2 J_3^2 J_7 \\
& + \frac{7 \cdot 98173}{2^6 \cdot 3^4 \cdot 5^2} J_2 J_3^2 J_4 J_6 - \frac{7}{2 \cdot 3^3 \cdot 5} J_2 J_3^2 J_{10} + \frac{1}{3^4} J_2 J_3 J_4^2 J_5 + \frac{2}{3^3} J_2 J_3 J_4 J_9 \\
& + \frac{7}{2^4 \cdot 3 \cdot 5} J_2 J_3 J_6 J_7 + \frac{17}{2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7} J_2 J_4^4 - \frac{83}{2 \cdot 3^3 \cdot 5} J_2 J_4^2 J_8 + \frac{7}{2 \cdot 3^2 \cdot 5} J_2 J_4 J_5 J_7 \\
& - \frac{7 \cdot 36733}{2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^2} J_2 J_4 J_6^2 + \frac{7}{2^2 \cdot 5} J_2 J_6 J_{10} - \frac{7}{2^5 \cdot 5} J_3^6 + \frac{7 \cdot 11^2}{2^5 \cdot 3 \cdot 5} J_3^4 J_6 \\
& + \frac{1}{2^3 \cdot 3 \cdot 5} J_3^3 J_4 J_5 + \frac{1}{2^2 \cdot 5} J_3^3 J_9 + \frac{3}{2^4 \cdot 5 \cdot 7} J_3^2 J_4^2 - \frac{1}{5} J_3^2 J_4 J_8 + \frac{7}{3^3 \cdot 5} J_3^2 J_5 J_7
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{7^2 \cdot 8389}{2^7 \cdot 3^3 \cdot 5} J_3^2 J_6^2 + \frac{1}{2 \cdot 5 \cdot 7} J_3 J_4^2 J_7 - \frac{3^2}{2^4 \cdot 5} J_3 J_4 J_5 J_6 + \frac{1}{2^3 \cdot 3^2} J_3 J_5 J_{10} \\
& -\frac{7 \cdot 17}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5} J_3 J_6 J_9 - \frac{1}{2^2 \cdot 3^2} J_3 J_7 J_8 - \frac{3}{5 \cdot 7} J_4^3 J_6 - \frac{3}{5 \cdot 7} J_4^2 J_{10} + \frac{1}{3 \cdot 5} J_4 J_5 J_9 \\
& + \frac{157}{2^2 \cdot 3 \cdot 5} J_4 J_6 J_8 - \frac{7}{2 \cdot 5} J_5 J_6 J_7 + \frac{5 \cdot 7^3}{2^4} J_6^3 + \frac{1}{2 \cdot 3} J_8 J_{10} - \frac{2}{3 \cdot 5} J_9^2 = 0.
\end{aligned}$$

§ 4.

Per la ricerca della relazione del 20° grado, si consideri il covariante H_n , la cui espressione trovasi a pag. 93 della mia nota precedente. Facendo uso delle relazioni (8') e (9') e delle seguenti che si trovano facilmente

$$\left. \begin{aligned}
(\tau k)^2 \tau_x^2 k_x^2 &= -\frac{1}{2^2 \cdot 3} J_4 \rho + \frac{1}{2^2 \cdot 3} j_k q + \frac{1}{2^2} J_8 b - \frac{1}{2^2 \cdot 3} J_{10} k \\
(\mu k)^2 \mu_x^2 k_x^2 &= -\frac{1}{2} \theta + \frac{1}{2^2 \cdot 3} J_4 n + \frac{1}{2 \cdot 3} J_7 k \\
(\nu k)^2 \nu_x^2 k_x^2 &= -\frac{1}{2^2 \cdot 3} J_4 t + \frac{1}{2^2 \cdot 3} j_k m - \frac{1}{2^2 \cdot 3} J_7 k + \frac{1}{2^2} J_5 b \\
(u k)^2 u_x^2 k_x^2 &= -\frac{1}{2} \pi + \frac{1}{2^2 \cdot 3} J_4 p + \frac{1}{2 \cdot 3} J_6 k
\end{aligned} \right\} (45')$$

si ricava

$$\begin{aligned}
& (k H_n)^2 k_x^2 H_{nx}^2 \\
= & \left(\frac{1}{2^2} J_{10} + \frac{1}{2^2 \cdot 3^2} J_2 J_8 - \frac{1}{2^2 \cdot 3^2} J_3 J_7 - \frac{7}{2^4 \cdot 3} J_4 J_6 + \frac{47}{2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7} J_2 J_4^2 - \frac{1}{2^4 \cdot 3^3 \cdot 5} J_2^2 J_4 + \frac{1}{2^3 \cdot 3^2} J_3^2 J_4 \right. \\
& + \left(-\frac{1}{2} J_8 - \frac{1}{2^2 \cdot 3^2} J_2 J_6 + \frac{1}{2^2 \cdot 3^2} J_3 J_5 + \frac{19}{2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} J_2 j_k + \frac{1}{2^2 \cdot 5} J_4^2 \right) b \\
& + \left(\frac{1}{2^2 \cdot 3} J_2 J_4 + \frac{5^2}{2^2 \cdot 3^2} j_k \right) u + \left(-\frac{1}{2^2 \cdot 3} J_2 j_k + \frac{1}{2^3 \cdot 3} J_4^2 \right) p \\
& + \left(-\frac{1}{2^2 \cdot 3} J_3 J_4 + \frac{1}{2^2} J_7 \right) t + \left(\frac{1}{2^2 \cdot 3} J_2 J_4 - \frac{1}{2^2} j_k \right) q
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2 \cdot 3^2} J_2 \tau + \frac{1}{2 \cdot 3^2} J_3 \theta - \frac{1}{2^2 \cdot 3^3} J_3 J_4 n + \frac{1}{2^2 \cdot 3^3} J_3 j_k m \\
& - \frac{1}{2^2} J_4 \pi - \frac{1}{2^2} J_5 \mu.
\end{aligned}$$

Sviluppando in serie $(k H_n)^2 k_x^2 H_{ny}^2$, cambiando nella eguaglianza che si ottiene le x nelle y , facendo la somma membro a membro delle due eguaglianze che così si ottengono e mutando in seguito le x e le y rispettivamente nelle m ed n , si ottiene, ponendo $(mn)^2 m_x^2 n_x^2 = \mathfrak{A}_x^4$,

$$\begin{aligned}
& (k H_n)^2 (k m)^2 (n H_n)^2 (m n)^2 + (k H_n)^2 (k n)^2 (m H_n)^2 (m n)^2 \\
& = \left(\frac{1}{2} J_{10} + \frac{1}{2 \cdot 3^2} J_2 J_8 - \frac{1}{2 \cdot 3^2} J_3 J_7 - \frac{7}{2^3 \cdot 3} J_4 J_6 + \frac{47}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7} J_2 J_4 - \frac{1}{2^3 \cdot 3^3 \cdot 5} J_3^2 J_4 + \frac{1}{2^2 \cdot 3^2} J_3^2 J_4 \right) (\mu m)^4 \\
& + \left(-J_8 - \frac{1}{2 \cdot 3^2} J_2 J_6 + \frac{1}{2 \cdot 3^2} J_3 J_5 + \frac{19}{2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} J_2 j_k + \frac{1}{2 \cdot 5} J_4 \right) (vn)^4 \\
& + \left(\frac{1}{2 \cdot 3^2} J_2 J_4 + \frac{5}{2 \cdot 3^2} j_k \right) (\mathfrak{A}u)^4 + \left(-\frac{1}{2 \cdot 3^3} J_2 j_k + \frac{1}{2^2 \cdot 3} J_4 \right) (\mathfrak{A}p)^4 \\
& + \left(-\frac{1}{2 \cdot 3^2} J_3 J_4 + \frac{1}{2} J_7 \right) (\mathfrak{A}t)^4 + \left(\frac{1}{2 \cdot 3^3} J_2 J_4 - \frac{1}{2} j_k \right) (\mathfrak{A}q)^4 \\
& - \frac{1}{3^2} J_2 (\mathfrak{A}\tau)^4 + \frac{1}{3^2} J_3 (\mathfrak{A}\theta)^4 - \frac{1}{2 \cdot 3^3} J_3 J_4 (\mathfrak{A}n)^4 + \frac{1}{2 \cdot 3^3} J_3 j_k (\mathfrak{A}m)^4 \\
& - \frac{1}{2} J_4 (\mathfrak{A}\pi)^4 - \frac{1}{2} J_5 (\mathfrak{A}\mu)^4 + \frac{2}{3} (\mu n)^4 (mn)^4.
\end{aligned}$$

Questa relazione è del 20° grado nei coefficienti di f e non è identicamente nulla, come si vedrà appena avremo calcolato i due invarianti che formano il primo membro della relazione precedente.

CALCOLO DI $(k H_n)^2 (k m)^2 (n H_n)^2 (m n)^2$. — Si ha per la teoria delle forme biquadratiche

$$(n H_n)^2 n_x^2 H_{ny}^2 = \frac{1}{2 \cdot 3} i_n n_x^2 n_y^2 + \frac{1}{3} j_n (xy)^2,$$

dalla quale

$$(n H_n)^2 (m n)^2 (k H_n)^2 (m k)^2 = \frac{1}{2.3} i_n (\mu m)^4 + \frac{1}{3} j_n J_5. \quad (47')$$

CALCOLO DI $(k H_n)^2 (k n)^2 (m H_n)^2 (m n)^2$. — Sviluppando in serie $H_{nx}^2 H_{ny}^2 n_x^2 n_y^2$, si ha :

$$H_{nx}^2 H_{ny}^2 n_x^2 n_y^2 = \frac{1}{2} n_x^4 H_{ny}^4 + \frac{1}{2} n_y^4 H_{nx}^4 - \frac{1}{2.3} j_n (xy)^4 - \frac{1}{3} i_n n_x^2 n_y^2 (xy)^2,$$

dalla quale si ricava :

$$\begin{aligned} (k H_n)^2 (m H_n)^2 (k n)^2 (m n)^2 &= \frac{1}{2} J_7 (m H_n)^4 + \frac{1}{2} (m n)^4 (\mu n)^4 \\ &\quad - \frac{1}{2.3} j_n J_5 - \frac{1}{3} i_n (\mu m)^4, \end{aligned} \quad (48')$$

ove si ha, come risulta immediatamente dalla (6'),

$$\begin{aligned} (m H_n)^4 &= \frac{2^2}{3^2} J_4 (p n)^4 + \frac{2}{3} (q \mu)^4 - \frac{2}{3} (p \theta)^4 + \frac{2}{7} j_k J_7 \\ &\quad + \frac{1}{3^2} J_2 (q n)^4 - \frac{1}{3^2} J_3 i_n + \frac{1}{3.5.7} J_2 J_4 J_7 - \frac{2}{5.7} J_4 J_9. \end{aligned}$$

Prima di procedere nel calcolo delle forme invariantive che figurano nel 2° membro della (46'), è bene accertarci che questa relazione non è identicamente nulla. È facile infatti vedere che il termine J_{10}^2 proviene nel 1° membro solamente da $i_n (\mu m)^4$, il quale ha per coefficiente $-\frac{1}{2.3}$, e però si ha nel 1° membro, tenendo presenti i valori di i_n e $(\mu m)^4$ che si trovano il primo a pag. 88 della mia Nota precedente e l'altro nella presente Nota, il termine $-\frac{1}{3^2} J_{10}^2$.

Nel 2° membro il termine J_{10}^2 proviene da $\frac{1}{2} J_{10} (\mu m)^4$ che ci fornisce il termine $\frac{1}{3} J_{10}^2$; cosicchè nella (46'), fatte le riduzioni, rimane il termine in J_{10}^2 , il che mostra che la detta relazione non è identicamente nulla.

CALCOLO DI $(\mathfrak{z}u)^4$.—Dalla (6') si ha immediatamente:

$$(\mathfrak{z}u)^4 = \frac{2^2}{3^2} J_4 B_{k,p} + \frac{2}{3} (\rho u)^4 - \frac{2}{3} (\pi u)^4 + \frac{2}{7} j_k J_8 + \frac{1}{3^2} J_2 (qu)^4 \\ - \frac{1}{3^2} J_3 (un)^4 + \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7} J_2 J_4 J_8 - \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7} J_4^2 J_6.$$

Le forme $(\rho u)^4$ e $(\pi u)^4$ si ricavano dalle (8') e (9') facendo le sovrapposizioni sopra p . Si ottiene:

$$(\rho u)^4 = -\frac{1}{2} (p\tau)^4 + \frac{1}{2^2 \cdot 3} J_4 (pq)^4 + \frac{1}{2 \cdot 3} J_6 J_8,$$

$$(\pi u)^4 = -\frac{1}{2^2 \cdot 3} J_4 B_{k,p} + \frac{1}{2^2 \cdot 3} j_k i_p + \frac{1}{2 \cdot 3} J_6 J_8.$$

Sostituendo, si ha:

$$(\mathfrak{z}u)^4 = \frac{1}{2} J_4 B_{k,p} - \frac{1}{3} (p\tau)^4 + \frac{1}{2 \cdot 3^2} J_4 (pq)^4 - \frac{1}{2 \cdot 3^2} j_k i_p + \frac{2}{7} j_k J_8 \\ + \frac{1}{3^2} J_2 (qu)^4 - \frac{1}{3^2} J_3 (un)^4 + \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7} J_2 J_4 J_8 - \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7} J_4^2 J_6. \quad (49')$$

CALCOLO DI $(\mathfrak{z}p)^4$, $(\mathfrak{z}q)^4$, $(\mathfrak{z}m)^4$.—Questi invarianti si ricavano immediatamente dalla (6'). Si ottiene:

$$\left. \begin{aligned} (\mathfrak{z}p)^4 &= \frac{2^2}{3^2} J_4 i_p + \frac{2}{3} (qu)^4 - \frac{2}{3} D_{k,p} + \frac{2}{7} j_k J_6 \\ &\quad + \frac{1}{3^2} J_2 (pq)^4 - \frac{1}{3^2} J_3 (pn)^4 + \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7} J_2 J_4 J_6 - \frac{2}{5 \cdot 7} J_4 J_8; \\ (\mathfrak{z}q)^4 &= \frac{2^2}{3^2} J_4 (pq)^4 + \frac{2}{3} (\rho q)^4 - \frac{2}{3} (p\tau)^4 + \frac{2}{7} j_k J_8 \\ &\quad + \frac{1}{3^2} J_2 (qq')^4 - \frac{1}{3^2} J_3 (qn)^4 + \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7} J_2 J_4 J_8 - \frac{2}{5 \cdot 7} J_4 J_{10}; \\ (\mathfrak{z}m)^4 &= \frac{2^2}{3^2} J_4 (pm)^4 + \frac{2}{3} (\rho m)^4 - \frac{2}{3} (\varepsilon b)^4 + \frac{2}{7} j_k J_5 \\ &\quad + \frac{1}{3^2} J_2 (qm)^4 - \frac{1}{3^2} J_3 (mn)^4 + \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7} J_2 J_4 J_5 - \frac{2}{5 \cdot 7} J_4 J_7. \end{aligned} \right\} \quad (50')$$

CALCOLO DI $(\mathfrak{z}t)^4$.—Dalla (6') si ha :

$$(\mathfrak{z}t)^4 = \frac{2^2}{3^2} J_4(u m)^4 + \frac{2}{3} (\rho t)^4 - \frac{2}{3} (\pi t)^4 + \frac{2}{7} j_k J_7 + \frac{1}{3^2} J_2(\rho m)^4 \\ - \frac{1}{3^2} J_3(\mu m)^4 + \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7} J_2 J_4 J_7 - \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7} J_4^2 J_5.$$

Le (8') e (9') intanto ci danno :

$$(\rho t)^4 = \frac{1}{2 \cdot 3} J_8 J_5 - \frac{1}{2} (\tau m)^4 + \frac{1}{2^2 \cdot 3} J_4(q m)^4,$$

$$(\pi t)^4 = -\frac{1}{2^2 \cdot 3} J_4(u m)^4 + \frac{1}{2^2 \cdot 3} j_k(p m)^4 - \frac{1}{2^2 \cdot 3} J_8 J_5 + \frac{1}{2^2} J_6 J_7;$$

di modo che si ha infine :

$$(\mathfrak{z}t)^4 = \frac{1}{2} J_4(u m)^4 + \frac{1}{2 \cdot 3} J_8 J_5 - \frac{1}{3} (\tau m)^4 + \frac{1}{2 \cdot 3^2} J_4(q m)^4 \\ - \frac{1}{2 \cdot 3^2} j_k(p m)^4 - \frac{1}{2 \cdot 3} J_6 J_7 + \frac{2}{7} j_k J_7 + \frac{1}{3^2} J_2(\rho m)^4 \quad (51') \\ - \frac{1}{3^2} J_3(\mu m)^4 + \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7} J_2 J_4 J_7 - \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7} J_4^2 J_5.$$

CALCOLO DI $(\mathfrak{z}\tau)^4$. — La (6') ci dà :

$$(\mathfrak{z}\tau)^4 = \frac{2^2}{3^2} J_4(p \tau)^4 + \frac{2}{3} (\rho \tau)^4 - \frac{2}{3} (\pi \tau)^4 + \frac{2}{7} j_k(\tau k)^4 \\ + \frac{1}{3^2} J_2(q \tau)^4 - \frac{1}{3^2} J_3(q \theta)^4 + \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7} J_2 J_4(\tau k)^4 - \frac{2}{2 \cdot 7} J_4(\tau h)^4.$$

Si ricava intanto :

$$(\tau k)^4 = \frac{1}{2 \cdot 3} J_4 J_8,$$

$$(\tau h)^4 = \frac{1}{3} j_k J_8 - \frac{1}{2 \cdot 3} J_4 J_{10}.$$

Inoltre dalle espressioni di $(\rho, h)^2$ e $(\pi, h)^2$, trovate innanzi, si deduce :

$$(\rho \tau)^4 = -\frac{1}{2^2 \cdot 3} J_4 (\rho q)^4 + \frac{1}{2^2 \cdot 3} j_k (q q')^4 + \frac{1}{2 \cdot 3} J_8 J_{10},$$

$$(\pi \tau)^4 = -\frac{1}{2 \cdot 3} j_k (q u)^4 + \frac{1}{2^2 \cdot 3} J_4 (p \tau)^4 + \frac{1}{2^3 \cdot 3^2} J_4^2 (p q)^4 + \frac{1}{2 \cdot 3} J_8 J_{10};$$

cosicchè, sostituendo, si ha :

$$\begin{aligned} (\varpi \tau)^4 &= \frac{7}{2 \cdot 3^2} J_4 (p \tau)^4 - \frac{1}{2 \cdot 3^2} J_4 (\rho q)^4 + \frac{1}{2 \cdot 3^2} j_k (q q')^4 + \frac{1}{3^2} j_k (q u)^4 \\ &\quad - \frac{1}{2^2 \cdot 3^3} J_4^2 (p q)^4 + \frac{1}{5 \cdot 7} j_k J_4 J_8 + \frac{1}{3^2} J_2 (q \tau)^4 - \frac{1}{3^2} J_3 (q \theta)^4 \quad (52') \\ &\quad + \frac{1}{2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7} J_2 J_4 J_8 + \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7} J_4^2 J_{10}. \end{aligned}$$

CALCOLO DI $(\varpi \theta)^4$. — Come precedentemente, si ottiene :

$$\begin{aligned} (\varpi \theta)^4 &= \frac{2^2}{3^2} J_4 (p \theta)^4 + \frac{2}{3} (\rho \theta)^4 - \frac{2}{3} (\pi \theta)^4 + \frac{2}{7} j_k (\theta k)^4 \\ &\quad + \frac{1}{3^2} J_2 (q \theta)^4 - \frac{1}{3^2} J_3 (\theta n)^4 + \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7} J_2 J_4 (\theta k)^4 - \frac{2}{5 \cdot 7} J_4 (\theta h)^4. \end{aligned}$$

Si ricava intanto subito :

$$(\theta k)^4 = \frac{1}{2 \cdot 3} J_4 J_7,$$

$$(\theta h)^4 = \frac{1}{3} j_k J_7 - \frac{1}{2 \cdot 3} J_4 J_9.$$

Inoltre dalle espressioni di $(\rho, h)^2$, $(\pi, h)^2$ si deduce :

$$(\rho \theta)^4 = -\frac{1}{2^2 \cdot 3} J_4 (q u)^4 + \frac{1}{2^2 \cdot 3} j_k (q n)^4 - \frac{1}{2^2 \cdot 3} J_8 J_9 + \frac{1}{2^2} J_{10} J_7,$$

$$(\pi \theta)^4 = -\frac{1}{2 \cdot 3} j_k (u n)^4 + \frac{1}{2^2 \cdot 3} J_4 (p \theta)^4 + \frac{1}{2^3 \cdot 3^2} J_4^2 (p n)^4 + \frac{1}{2 \cdot 3} J_8 J_9;$$

e però

$$\begin{aligned}
 (\varkappa \theta)^4 = & \frac{7}{2 \cdot 3^2} J_4 (p \theta)^4 - \frac{1}{2 \cdot 3^2} J_4 (q \mu)^4 + \frac{1}{2 \cdot 3^2} j_k (q n)^4 - \frac{1}{2 \cdot 3} J_8 J_9 \\
 & + \frac{1}{2 \cdot 3} J_{10} J_7 + \frac{1}{3^2} j_k (u n)^4 - \frac{1}{2^2 \cdot 3} J_4^2 (p n)^4 + \frac{1}{5 \cdot 7} J_4 J_7 j_k \quad (53') \\
 & + \frac{1}{3^2} J_2 (q \theta)^4 - \frac{1}{3^2} J_3^2 D_{k,n} + \frac{1}{2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7} J_2 J_4^2 J_7 + \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7} J_4^2 J_9.
 \end{aligned}$$

CALCOLO DI $(\varkappa \pi)^4$ e $(\varkappa \mu)^4$.—Queste forme invariantive si calcolano come quelle precedenti; per $(\varkappa \pi)^4$ basta fare uso delle relazioni

$$(\pi k)^4 = \frac{1}{2 \cdot 3} J_4 J_6,$$

$$(\pi h)^4 = \frac{1}{3} j_k J_6 - \frac{1}{2 \cdot 3} J_4 J_8,$$

$$(\rho \pi)^4 = -\frac{1}{2^2 \cdot 3} J_4 (q u)^4 + \frac{1}{2^2 \cdot 3} j_k (p q)^4 - \frac{1}{2^2 \cdot 3} J_8^2 + \frac{1}{2^2} J_{10} J_6,$$

$$(\pi \pi')^4 = -\frac{1}{2 \cdot 3} j_k B_{k,p} + \frac{1}{2^2 \cdot 3} J_4 D_{k,p} + \frac{1}{2^3 \cdot 3^2} J_4^2 i_p + \frac{1}{2 \cdot 3} J_8^2;$$

per $(\varkappa \mu)^4$ delle altre

$$(\mu k)^4 = J_9,$$

$$(\mu h)^4 = \frac{1}{2 \cdot 3} J_4 J_7,$$

$$(\rho \mu)^4 = \frac{1}{2 \cdot 3} J_8 J_7 - \frac{1}{2} (q \theta)^4 + \frac{1}{2^2 \cdot 3} J_4 (q n)^4,$$

$$(\pi \mu)^4 = -\frac{1}{2^2 \cdot 3} J_4 (u n)^4 + \frac{1}{2^2 \cdot 3} j_k (p n)^4 - \frac{1}{2^2 \cdot 3} J_8 J_7 + \frac{1}{2^2} J_6 J_9.$$

Si ottiene pertanto :

$$\begin{aligned}
 (\pi)^4 = & \left. \begin{aligned}
 & \frac{7}{2 \cdot 3^2} J_4 D_{k,p} - \frac{1}{2 \cdot 3^2} J_4 (qu)^4 + \frac{1}{2 \cdot 3^2} j_k (pq)^4 - \frac{1}{2 \cdot 3} J_8^2 \\
 & + \frac{1}{2 \cdot 3} J_{10} J_6 + \frac{1}{3^2} j_k B_{k,p} - \frac{1}{2^2 \cdot 3^3} J_4^2 j_p + \frac{1}{5 \cdot 7} J_4 J_6 j_k \\
 & + \frac{1}{3^2} J_2 (p\tau)^4 - \frac{1}{3^2} J_3 (p\theta)^4 + \frac{1}{2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7} J_2 J_4 J_6 \\
 & + \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7} J_4^2 J_8 ;
 \end{aligned} \right\} (54') \\
 (\mu)^4 = & \left. \begin{aligned}
 & \frac{1}{2} J_4 (un)^4 + \frac{1}{2 \cdot 3} J_8 J_7 - \frac{1}{3} (q\theta)^4 + \frac{1}{2 \cdot 3^2} J_4 (qn)^4 \\
 & - \frac{1}{2 \cdot 3^2} j_k (pn)^4 - \frac{1}{2 \cdot 3} J_6 J_9 + \frac{2}{7} j_k J_9 + \frac{1}{3^2} J_2 (q\mu)^4 \\
 & - \frac{1}{3^2} J_3 (\mu n)^4 + \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7} J_2 J_4 J_9 - \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7} J_4^2 J_7 .
 \end{aligned} \right\}
 \end{aligned}$$

Calcolate così tutte le forme invariantive che entrano nella (46') in funzione di forme state già calcolate nei paragrafi precedenti, non resta che a fare le sostituzioni e le opportune riduzioni per avere l'espressione effettiva della terza relazione che si cerca.

Si ottiene così la seguente relazione :

$$\begin{aligned}
 & \frac{13}{2^7 \cdot 3^5 \cdot 5^4} J_8^2 J_4 + \frac{7}{2^7 \cdot 3^7 \cdot 5} J_2^6 J_3 J_5 - \frac{31}{2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^4} J_2^6 J_4^2 - \frac{7}{2^5 \cdot 3^6 \cdot 5} J_2^6 J_8 \\
 & - \frac{13}{2^5 \cdot 3^4 \cdot 5^3} J_2^2 J_3^2 J_4 - \frac{7}{2^4 \cdot 3^6 \cdot 5^2} J_2^2 J_3 J_7 + \frac{3319}{2^6 \cdot 3^6 \cdot 5^3} J_2^2 J_4 J_6 - \frac{7}{2^3 \cdot 3^7 \cdot 5^2} J_2^2 J_5^2 \\
 & + \frac{1}{3^5 \cdot 5^2} J_2^2 J_{10} - \frac{101}{2^6 \cdot 3^6 \cdot 5} J_2^4 J_3 J_4 J_5 + \frac{1}{2^3 \cdot 3^5 \cdot 5} J_2^4 J_3 J_9 + \frac{59}{2^7 \cdot 5^3} J_2^4 J_4^2 \\
 & + \frac{7^2}{2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2} J_2^4 J_4 J_8 - \frac{7}{2^4 \cdot 3^6 \cdot 5^2} J_2^4 J_5 J_7 - \frac{7}{2^5 \cdot 3^6} J_2^3 J_3 J_5 + \frac{11^2}{2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^2} J_2^3 J_3^2 J_4^2 \\
 & + \frac{7}{2^2 \cdot 3^4 \cdot 5} J_2^3 J_3 J_8 + \frac{239}{2^4 \cdot 3^5 \cdot 5^2} J_2^3 J_3 J_4 J_7 + \frac{7 \cdot 127}{2^6 \cdot 3^6 \cdot 5} J_2^3 J_3 J_5 J_6 - \frac{95609}{2^6 \cdot 3^5 \cdot 5^3} J_2^3 J_4 J_6 \\
 & + \frac{221}{2^4 \cdot 3^5 \cdot 5^2} J_2^3 J_4 J_5^2 - \frac{37}{2^2 \cdot 3^4 \cdot 5} J_2^3 J_4 J_{10} + \frac{1}{2^3 \cdot 3^5 \cdot 5^2} J_2^3 J_5 J_9 - \frac{7 \cdot 31}{2^4 \cdot 3^5} J_2^3 J_6 J_8 \\
 & - \frac{1}{2^2 \cdot 3^5 \cdot 5} J_2^3 J_7^2 + \frac{13}{2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^2} J_2^2 J_3^4 J_4 + \frac{7}{2^3 \cdot 3^5 \cdot 5} J_2^2 J_3 J_7 - \frac{3319}{2^5 \cdot 3^5 \cdot 5^2} J_2^2 J_3^2 J_4 J_6
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{7}{2^2 \cdot 3^6 \cdot 5} J_2^2 J_3^2 J_5^2 - \frac{2}{3^4 \cdot 5} J_2^2 J_3^2 J_{10} + \frac{7 \cdot 11 \cdot 19}{2^7 \cdot 3^5 \cdot 5} J_2^2 J_3 J_4^2 J_5 - \frac{7}{2^2 \cdot 3^4 \cdot 5} J_2^2 J_3 J_4 J_9 \\
& - \frac{7}{2^4 \cdot 3^2 \cdot 5} J_2^2 J_3 J_6 J_7 - \frac{4637}{2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2} J_2^2 J_4^2 - \frac{5^2 \cdot 61}{2^5 \cdot 3^4 \cdot 7} J_2^2 J_4^2 J_8 + \frac{11}{2^4 \cdot 3^4 \cdot 5} J_2^2 J_4 J_5 J_7 \\
& + \frac{7^2 \cdot 71}{2^7 \cdot 3^2 \cdot 5^2} J_2^2 J_4 J_6^2 - \frac{7}{2^3 \cdot 3^3 \cdot 5} J_2^2 J_5^2 J_6 + \frac{7^2}{2 \cdot 3^4 \cdot 5} J_2^2 J_6 J_{10} - \frac{1}{2 \cdot 3^4 \cdot 5} J_2^2 J_7 J_9 \\
& + \frac{1}{2 \cdot 3^4} J_2^2 J_8^2 + \frac{101}{2^5 \cdot 3^5} J_2 J_3^2 J_4 J_5 - \frac{1}{2^2 \cdot 3^4} J_2 J_3^2 J_9 - \frac{7}{2^2 \cdot 5^2} J_2 J_3^2 J_4 \\
& - \frac{7 \cdot 13}{2^2 \cdot 3^3 \cdot 5} J_2 J_3^2 J_4 J_8 + \frac{7}{2^3 \cdot 3^5 \cdot 5} J_2 J_3^2 J_5 J_7 - \frac{1427}{2^3 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7} J_2 J_3 J_4^2 J_7 \\
& - \frac{853}{2^6 \cdot 3^4 \cdot 5} J_2 J_3 J_4 J_5 J_6 + \frac{1}{2^3 \cdot 3^4} J_2 J_3 J_5 J_{10} + \frac{7}{2 \cdot 3^4} J_2 J_3 J_6 J_9 - \frac{1}{2^2 \cdot 3^4} J_2 J_3 J_7 J_8 \\
& + \frac{2869}{2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2} J_2 J_4^2 J_6 - \frac{5}{2^3 \cdot 3^2} J_2 J_4^2 J_5^2 + \frac{127}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5} J_2 J_4^2 J_{10} - \frac{7}{2^3 \cdot 3^3 \cdot 5} J_2 J_4 J_5 J_9 \\
& + \frac{7 \cdot 667}{2^4 \cdot 3^3 \cdot 5} J_2 J_4 J_6 J_8 + \frac{11}{2^3 \cdot 3^3 \cdot 5} J_2 J_4 J_7^2 - \frac{7}{2^4 \cdot 3^2 \cdot 5} J_2 J_5 J_6 J_7 + \frac{2}{3^3 \cdot 5} J_2 J_9^2 \\
& + \frac{5 \cdot 7}{2^5 \cdot 3^5} J_3^2 J_5 - \frac{7}{2^2 \cdot 3 \cdot 5^2} J_3^2 J_4^2 - \frac{7^2}{2^3 \cdot 3^4} J_3^2 J_8 - \frac{67}{2^2 \cdot 3^4 \cdot 5} J_3^2 J_4 J_7 \\
& - \frac{7 \cdot 127}{2^5 \cdot 3^5} J_3^2 J_5 J_6 + \frac{7 \cdot 1633}{2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^2} J_3^2 J_4 J_6 - \frac{151}{2^3 \cdot 3^4 \cdot 5} J_3^2 J_4 J_5^2 + \frac{7^2}{2^2 \cdot 3^3} J_3^2 J_4 J_{10} \\
& + \frac{1}{3^4 \cdot 5} J_3^2 J_5 J_9 + \frac{1}{2^2 \cdot 3^4} J_3^2 J_7^2 + \frac{7^2 \cdot 13}{2^2 \cdot 3^4} J_3^2 J_6 J_8 - \frac{53}{2^4 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7} J_3 J_4^2 J_5 \\
& - \frac{67}{2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7} J_3 J_4^2 J_9 + \frac{1}{2 \cdot 3^3} J_3 J_4 J_5 J_8 + \frac{593}{2^3 \cdot 3^3 \cdot 5} J_3 J_4 J_6 J_7 + \frac{7^2 \cdot 17}{2^7 \cdot 3^2} J_3 J_5 J_6^2 \\
& - \frac{5}{2 \cdot 3^3} J_3 J_7 J_{10} + \frac{2}{3^3} J_3 J_8 J_9 + \frac{1}{2 \cdot 5^2 \cdot 7} J_4^2 + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} J_4^2 J_8 - \frac{5}{2^2 \cdot 3 \cdot 7} J_4^2 J_5 J_7 \\
& - \frac{18959}{2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2} J_4^2 J_6^2 + \frac{151}{2^4 \cdot 3 \cdot 5} J_4 J_5^2 J_6 - \frac{103}{2 \cdot 3^2} J_4 J_6 J_{10} + \frac{11}{2 \cdot 3^2 \cdot 5} J_4 J_7 J_9 \\
& - \frac{7}{2^2 \cdot 3} J_4 J_8^2 - \frac{1}{2^3 \cdot 3} J_5^2 J_{10} - \frac{7}{2^2 \cdot 3 \cdot 5} J_5 J_6 J_9 + \frac{1}{2^2 \cdot 3} J_5 J_7 J_8 \\
& - \frac{5^2 \cdot 7^2}{2^5 \cdot 3} J_6^2 J_8 + \frac{2^2}{3^2} J_{10}^2 = 0.
\end{aligned}$$

Palermo, giugno 1895.

ROSARIO ALAGNA.