Ueber die Deformation der Räume constanten Riemann'schen Krümmungsmaasses.

Von

FRIEDRICH SCHUR in Leipzig.

Im Folgenden handelt es sich vornehmlich darum Beispiele zu geben für die Deformation von mehr als zweifach ausgedehnten Räumen, welche in sogenannten ebenen Räumen enthalten sind. Hier ist unter Deformation eines Raumes in einen anderen eine solche Abbildung derselben auf einander zu verstehen, bei welcher unendlich kleinen Linien des einen Raumes ihnen gleiche unendlich kleine Linien des andern entsprechen; und unter einem ebenen Raume verstehen wir einen solchen, in welchem das Quadrat des Linienelements durch die Summe der Quadrate der Coordinatenzuwächse dargestellt ist. Während ich, was die auf dieses Problem bezügliche Literatur betrifft, im Allgemeinen auf die Anmerkungen 28 und 29 des vor Kurzem erschienenen Buches von Herrn Killing*) verweisen möchte, will ich nicht unterlassen im Besondern auf eine nicht überall gehörig beachtete Arbeit des Herrn Monro**), „On flexure of spaces“, die Aufmerksamkeit zu lenken. Herr Monro behandelt allerdings nur ein specielles Problem, das Problem nämlich, inwieweit ein Raum von n Dimensionen in einem ebenen Raume von $n + m$ Dimensionen in der Nähe eines Punktes deformirbar ist, wenn man bei Entwicklung der Gleichungen dieses Raumes in Potenzreihen, die in der Nähe des Punktes gelten, sich auf die Glieder zweiter Ordnung beschränkt. Insofern haben seine Schlüsse, wie er es selbst auch zugiebt, nur nach der negativen Seite hin Bedeutung, sie lehren nur, dass das Problem i. A. nur lösbar sein kann, wenn m eine gewisse Grenze übersteigt, dass z. B. ein Raum von n Dimensionen in einem solchen von $n + 1$ Dimensionen i. A. nicht deformirbar ist; aber es ergibt sich bei Herrn Monro dies

*) Killing, Die nicht-euklidischen Raumformen in analytischer Behandlung, Leipzig, 1885, p. 263 u. 264.

**) S. Monro, On flexure of spaces, Proceedings of the London Mathematical Society, vol. IX, p. 171 ff.

Resultat mit ungemein einfachen Mitteln, im Vergleiche zu den Beweisen, die andere Mathematiker dafür gegeben haben. Ein wirklicher Beweis für die Möglichkeit einer solchen Deformation ist erst durch Herrn Killing gegeben worden, indem er a. a. O. p. 222 zeigt, dass jeder n -dimensionale Raum, welcher eine Schaar von $(n - 1)$ -dimensionalen ebenen Räumen enthält, in einem $(n + 1)$ -dimensionalen ebenen Raume deformirbar ist. Durch die Ausführung einer solchen Deformation ist nun auch die von beliebig vielen andern Räumen gegeben, welche in dem zu deformirenden Raume enthalten sind*). Da indessen Herr Killing seinen Beweis durch geometrische Betrachtungen geführt hat, so dürfte es nicht überflüssig sein, analytisch ausgeführte Beispiele von Deformationen der Räume zu geben oder das Problem solcher Deformationen wenigstens auf das bekannte der Deformation von Flächen zurückzuführen. Wir werden uns hauptsächlich mit der Deformation der Räume constanten Riemann'schen Krümmungsmaasses beschäftigen, wollen aber des besseren Verständnisses wegen einige allgemeinere Untersuchungen vorausschicken, welche vor dem Erscheinen des Killing'schen Buches fertig gestellt viel Berührungspunkte**) mit diesem haben.

§ 1.

Ueber das Riemann'sche Krümmungsmaass und das Linienelement der Räume, für welche dasselbe constant ist.

Ist in einem Raume von n Dimensionen das Linienelement gegeben in der Form:

$$(1) \quad ds^2 = \sum_{i,k}^n a_{ik} dx_i dx_k,$$

wo die a_{ik} eindeutige analytische Functionen von $x_1, x_2, \dots, x_n$ sind, welche der Bedingung genügen, dass erstens $a_{ik} = a_{ki}$, zweitens die Discriminante obiger quadratischen Form nicht identisch verschwinde und diese Form eine definite oder stets positive sei, so hat man zunächst das Problem der Variationsrechnung zu lösen, die kürzesten Linien in diesem Raume zu finden. Sieht man dies Problem als gelöst an, so hat man nach Riemann diese kürzesten Linien in folgender Art in Flächen zusammenzufassen, die wir geodätische Flächen nennen können. Man verbinde irgend einen Punkt (x_i) des Raumes mit zwei ihm benachbarten Punkten $(x_i + dx_i)$ und $(x_i + \delta x_i)$ durch kürzeste Linien und ziehe nun die Gesamtheit der kürzesten Linien, welche

*) S. Killing, a. a. O. p. 239.

**) Vergl. im Besonderen § 12 im 2. Abschn. des gen. Buches.

den Punkt (x_i) mit den Punkten $(x_i + \alpha dx_i + \beta \delta x_i)$ verbinden, wo α und β ganz beliebig. Dies ist eine der durch den Punkt (x_i) gehenden geodätischen Flächen, als deren Coordinaten man die Grössen $dx_i \delta x_k - dx_k \delta x_i$ betrachten kann. Das Gaussische Krümmungsmaass nun dieser geodätischen Fläche im Punkte (x_i) ist es, dem man den Namen des Riemann'schen Krümmungsmaasses*) gegeben hat. Ist $n > 2$, so hängt dasselbe natürlich ausser von den Coordinaten x_i auch von den Coordinaten $dx_i \delta x_k - dx_k \delta x_i$ der geodätischen Fläche ab. Dasselbe hat folgende analytische Form:

$$(2) \quad K = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\sum_{i,k;l,m}^n (i,k;l,m) (dx_i \delta x_m - dx_m \delta x_i) (dx_k \delta x_l - dx_l \delta x_k)}{\sum_{i,k;l,m}^n (a_{ik} a_{lm} - a_{kl} a_{mi}) (dx_i \delta x_m - dx_m \delta x_i) (dx_k \delta x_l - dx_l \delta x_k)},$$

wo das Semikolon zwischen i, k und l, m bedeutet, dass nur über verschiedene Paare der Indices i, k und l, m summirt werden soll, wo ferner:

$$(3) \quad (i, k; l, m) = \frac{\partial^2 a_{ik}}{\partial x_i \partial x_m} + \frac{\partial^2 a_{lm}}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{\partial^2 a_{il}}{\partial x_k \partial x_m} - \frac{\partial^2 a_{km}}{\partial x_i \partial x_l} \\ + \frac{1}{2} \sum_{\lambda, \mu}^n A_{\lambda \mu} (p_{\lambda, ik} p_{\mu, lm} - p_{\lambda, il} p_{\mu, km}).$$

Hier bedeutet:

$$(4) \quad p_{\lambda, ik} = \frac{\partial a_{i\lambda}}{\partial x_k} + \frac{\partial a_{k\lambda}}{\partial x_i} - \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_\lambda},$$

und es ist:

$$(5) \quad \sum_{\lambda}^n A_{i\lambda} a_{k\lambda} = 0 \text{ oder } 1,$$

je nachdem $i = k$ oder $i < k$ ist. Bezüglich des Beweises verweise ich auf die o. c. Arbeiten.

In denjenigen Räumen nun, in denen die gewöhnliche projective Geometrie Geltung behält, wenn man die kürzesten Linien als gerade Linien ansieht, ist dies Krümmungsmaass sowohl von den Coordinaten des Punktes als von den Coordinaten der geodätischen Fläche unabhängig, es finden also die Relationen statt:

$$(6) \quad K(a_{ik} a_{lm} - a_{kl} a_{mi}) + \frac{1}{2} (i, k; l, m) = 0.$$

*) Vergl. hierüber die Anm. von Dedekind in Riemann's ges. math. Werken p. 384 ff. und Voss, zur Theorie des Riemann'schen Krümmungsmaasses, Math. Ann. Bd. XVI, p. 571.

Dem Linienelement eines Raumes, in welchem die projective Geometrie gilt, kann man nämlich unter Zugrundelegung einer projectiven Maassbestimmung, auf welche ich hier nicht näher eingehen kann, die Form geben:*)

$$(7) \quad ds^2 = \frac{1}{\kappa^2} \frac{\left(\sum_i^n dx_i^2\right)\left(\sum_i^n x_i^2 - R^2\right) - \left(\sum_i^n x_i dx_i\right)^2}{\left(\sum_i^n x_i^2 - R^2\right)^2},$$

wo der Nenner gleich 0 gesetzt den Ort der unendlich fernen Punkte darstellt, und R mit κ durch die Relation verbunden ist:

$$(8) \quad R\sqrt{-1} = \cot \kappa.$$

Es ist also:

$$(9) \quad a_{kk} = \frac{1}{\kappa^2} \frac{\sum_i^n x_i^2 - R^2 - x_k^2}{\left(\sum_i^n x_i^2 - R^2\right)^2}$$

und:

$$(10) \quad a_{kl} = -\frac{1}{\kappa^2} \frac{x_k x_l}{\left(\sum_i^n x_i^2 - R^2\right)^2}, \quad \text{wenn } k \geq l.$$

Demnach wird: $a_{kk}^0 = -\frac{1}{\kappa^2 R^2}$ und $a_{lk}^0 = 0$, wenn $k \geq l$, wo der Index 0 den Werth der betreffenden Function für den Punkt $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ bezeichnen soll. Es ist ferner stets $\left(\frac{\partial a_{kl}}{\partial x_m}\right)^0 = 0$ und:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 a_{ik}}{\partial x_i \partial x_m}\right)^0 &= -\frac{4}{\kappa^2 R^2}, \quad \text{wenn } i = k = l = m; \\ &= -\frac{2}{\kappa^2 R^4}, \quad \text{wenn } i = k \leq l = m; \\ &= -\frac{1}{\kappa^2 R^4}, \quad \text{wenn } i = l \geq k = m; \\ &= 0 \quad \text{in allen übrigen Fällen.} \end{aligned}$$

Demnach wird

$$(i, k; l, m)^0 = \mp \frac{2}{\kappa^2 R^4},$$

je nachdem $i = k \leq l = m$ oder $i = l \geq k = m$, in allen andern Fällen aber $= 0$.

*) S. Beltrami, Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante, Annali di Mat. ser. II, tom. II, p. 232.

Daraus erkennt man, dass für den Anfangspunkt in der That die Gleichungen (6) erfüllt sind. Nun bleibt aber bei der Transformation:

$$(11) \quad x_1 = R^2 \frac{y_1 + a_1}{R^2 + a_1 y_1}, \quad x_2 = R \sqrt{R^2 - a_1^2} \frac{y_2}{R^2 + a_1 y_1}, \quad \dots, \\ x_n = R \sqrt{R^2 - a_1^2} \frac{y_n}{R^2 + a_1 y_1}$$

das Linienelement seiner Form nach unverändert und es hat jetzt der Anfangspunkt des neuen Systems im alten die Coordinaten $a_1, 0, \dots, 0$, sodass also auch für diesen Punkt die Gleichungen (6) erfüllt sind. So weiter schliessend kann man zeigen, dass dieselben Gleichungen für jeden beliebigen Punkt des betrachteten Raumes erfüllt sind, sodass hierdurch auch direct nachgewiesen ist, dass die Form (7) des Linienelements einen Raum constanten Riemann'schen Krümmungsmaasses bedingt.

Macht man die Substitution:

$$(12) \quad x_1 = \frac{2\sqrt{-1} \kappa R z_1}{\kappa^2 \sum_1^n z_\lambda^2 - 1}, \quad \dots, \quad x_{n-1} = \frac{2\sqrt{-1} \kappa R z_{n-1}}{\kappa^2 \sum_1^n z_\lambda^2 - 1}, \\ x_n = R + \frac{2R}{\kappa^2 \sum_1^n z_\lambda^2 - 1},$$

so geht das Linienelement (7) über in:

$$(13) \quad ds^2 = - \frac{dz_1^2 + dz_2^2 + \dots + dz_n^2}{\kappa^2 \sum_1^n z_\lambda^2}.$$

Diese Transformation ist nur für Räume constanten negativen Krümmungsmaasses auf reelle Weise möglich, d. h. nur wenn κ^2 negativ und R^2 positiv. Die Räume $z_n = \text{const.}$, welche die constante Krümmung 0 haben, entsprechen den Lobatschewsky'schen Grenzflächen*).

Eine in jedem Falle reelle Transformation lautet:

$$(14) \quad x_1 = \sqrt{-1} R \tan \kappa u \cos v_1, \\ x_2 = \sqrt{-1} R \tan \kappa u \sin v_1 \cos v_2, \\ x_3 = \sqrt{-1} R \tan \kappa u \sin v_1 \sin v_2 \cos v_3, \quad \dots, \\ x_{n-1} = \sqrt{-1} R \tan \kappa u \sin v_1 \sin v_2 \dots \sin v_{n-2} \cos v_{n-1}, \\ x_n = \sqrt{-1} R \tan \kappa u \sin v_1 \sin v_2 \dots \sin v_{n-1}$$

*) S. Beltrami, l. c. p. 249.

und giebt dem Linienelement (7) die Form:

$$(15) \quad ds^2 = du^2 + \frac{\sin^2 \kappa u}{\kappa^2} (dv_1^2 + \sin^2 v_1 dv_2^2 + \sin^2 v_1 \sin^2 v_2 dv_3^2 + \dots + \sin^2 v_1 \dots \sin^2 v_{n-2} dv_{n-1}^2).$$

Die geometrische Bedeutung der Grössen u, v_1, v_2 für $n = 3$ ist die der gewöhnlichen räumlichen Polarcoordinaten: Radiusvector, Polhöhe und geographische Länge.

§ 2.

Allgemeines über die Deformirbarkeit der Räume.

Bezogen sich unsre bisherigen Betrachtungen nur auf die Geometrie innerhalb jedes Raumes, so wollen wir uns jetzt mit der Frage beschäftigen, ob gewisse specielle Räume in sogenannten ebenen Räumen, d. h. solchen mit verschwindendem Riemann'schen Krümmungsmaasse, in denen also das Quadrat des Linienelements dargestellt ist durch die Summe der Quadrate der Zuwachse rechtwinkliger Coordinaten, enthalten sein können und inwieweit sie in diesen noch deformirbar sind, d. h. veränderlich ohne Veränderung ihres Linienelements.

In einem ebenen Raume von $n + 1$ Dimensionen werden wir einen beliebigen Raum von n Dimensionen, welcher durch den Anfangspunkt geht und den ebenen Raum $x_{n+1} = 0$ dort tangirt, in der Nähe des Anfangspunktes in rechtwinkligen Coordinaten darstellen können in der Form:

$$(16) \quad x_{n+1} = F(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{2} \sum_{i,k}^n c_{ik} x_i x_k + \dots$$

Demnach wird das Linienelement dieses Raumes:

$$(17) \quad ds^2 = \sum_{i,k}^n a_{ik} dx_i dx_k = dx_1^2 + \dots + dx_n^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n} dx_n \right)^2,$$

also:

$$(18) \quad a_{ii} = 1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \right)^2 \quad \text{und} \quad a_{ik} = \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial x_k} \quad \text{für } i \leq k.$$

Ferner:

$$(19) \quad \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_i} \frac{\partial F}{\partial x_k} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial x_i} \frac{\partial F}{\partial x_i}$$

und

$$(20) \quad \frac{\partial^2 a_{ik}}{\partial x_i \partial x_m} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_l} \frac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial x_m} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial x_l} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_m} + \frac{\partial^3 F}{\partial x_i \partial x_l \partial x_m} \frac{\partial F}{\partial x_k} + \frac{\partial^3 F}{\partial x_k \partial x_l \partial x_m} \frac{\partial F}{\partial x_i}.$$

Daraus folgt weiter:

$$a_{ii}^0 = 1, \quad a_{ik}^0 = 0 \text{ für } i \leq k \text{ und: } \left(\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_l} \right)^0 = 0,$$

ferner:

$$\left(\frac{\partial^2 a_{ik}}{\partial x_l \partial x_m} \right)^0 = 2(c_{il} c_{km} + c_{im} c_{kl}).$$

Demnach wird:

$$(21) \quad (i, k; l, m)^0 = 2(c_{il} c_{km} - c_{ik} c_{lm}).$$

Das Riemann'sche Krümmungsmaass hat daher für unsern Raum im Anfangspunkte die Form:

$$(22) \quad K^0 = \frac{\sum_{i,k;l,m}^n (c_{ik} c_{lm} - c_{il} c_{km}) (dx_i \delta x_m - dx_m \delta x_i) (dx_k \delta x_l - dx_l \delta x_k)}{\sum_{i;l}^n (dx_i \delta x_l - dx_l \delta x_i)^2}.$$

Wäre unser Raum von n Dimensionen nicht in einem ebenen Raume von $n+1$ Dimensionen enthalten, sondern erst in einem solchen von $n+2$ Dimensionen, so wäre er definirt durch die Gleichung (16) und durch die zweite:

$$(23) \quad x_{n+2} = G(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{2} \sum_{i,k}^n e_{ik} x_i x_k + \dots,$$

wobei wir wieder annehmen, dass ihn die beiden ebenen Räume $x_{n+1} = 0$ und $x_{n+2} = 0$ tangiren; dann wird:

$$(24) \quad a_{ii} = 1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial x_i} \right)^2$$

und

$$a_{ik} = \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial x_k} + \frac{\partial G}{\partial x_i} \frac{\partial G}{\partial x_k} \text{ für } i \leq k,$$

sodass schliesslich in dem Ausdrücke K^0 nur der Coefficient

$$c_{ik} c_{lm} - c_{il} c_{km} \text{ durch } c_{ik} c_{lm} - c_{il} c_{km} + e_{ik} e_{lm} - e_{il} e_{km}$$

zu ersetzen ist. In analoger Weise würde, falls unser Raum erst in einem ebenen Raume von $n+m$ Dimensionen liegt, derselbe Coefficient durch eine Summe von m analog gebildeten zu ersetzen sein.

Der Ausdruck (22) erlaubt uns einige, allerdings zunächst nur negative Schlüsse zu ziehen. Stellen wir nämlich die Forderung, dass

durch die Gleichung (16) ein Raum constanten Riemann'schen Krümmungsmaasses dargestellt sei, so müssen in jenem Ausdrucke die Coefficienten des Zählers denen des Nenners proportional sein, d. h. es muss für $n > 2$ sein:

$$c_{ii} = \sqrt{K^0}, \quad c_{ik} = 0 \quad \text{für } i \leq k.$$

Daraus folgt der Satz:

In einem ebenen Raume von $n + 1$ Dimensionen giebt es, sobald $n > 2$, keinen Raum constanten negativen Krümmungsmaasses von n Dimensionen).*

Einen Raum constanten *positiven* Krümmungsmaasses von n Dimensionen giebt es dagegen stets in einem ebenen Raume von $n + 1$ Dimensionen, nämlich den sogenannten *sphärischen* Raum:

$$(25) \quad x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 2r x_{n+1}.$$

Denn für diesen ist in der Nähe des Anfangspunktes:

$$(26) \quad x_{n+1} = \frac{1}{2r} (x_1^2 + \dots + x_n^2) + \dots$$

Man erkennt ausserdem leicht, dass das Linienelement dieses Raumes nach der Substitution:

$$(27) \quad x_i = \frac{r y_i}{\sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^2 - R^2}}$$

die Form (7) annimmt, wenn $x^2 = \frac{1}{r^2}$ gesetzt wird.

Weiterhin aber ergeben sich aus dem für einen in einem $(m + n)$ -dimensionalen ebenen Raume gelegenen n -dimensionalen Raume gebildeten Ausdrücke (22) keine Gründe gegen die Existenz eines n -dimensionalen Raumes constanten negativen Krümmungsmaasses in einem ebenen Raume von $n + m$ Dimensionen, wenn $m > 1$, wenigstens nicht ohne eine genauere Discussion der Abhängigkeit der dadurch bedingten Gleichungen von einander. *In der That existirt in einem ebenen Raume von $2n - 1$ Dimensionen stets ein n -dimensionaler Raum constanten negativen Riemann'schen Krümmungsmaasses, nämlich der Raum:*

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{ll} x_1 = \frac{r^2}{z_n} \cos \frac{z_1}{r}, & x_2 = \frac{r^2}{z_n} \sin \frac{z_1}{r}, \\ x_3 = \frac{r^2}{z_n} \cos \frac{z_2}{r}, & x_4 = \frac{r^2}{z_n} \sin \frac{z_2}{r}, \\ \dots & \dots \\ x_{2n-3} = \frac{r^2}{z_n} \cos \frac{z_{n-1}}{r}, & x_{2n-2} = \frac{r^2}{z_n} \sin \frac{z_{n-1}}{r}, \\ x_{2n-1} = r \int \frac{\sqrt{z_n^2 - (n-1)r^2}}{z_n^2} dz_n, \end{array} \right.$$

*) Dieser Satz ist zuerst von Herrn Beez bewiesen worden (Zur Theorie des Krümmungsmaasses, Schlömilch's Zeitschrift f. Math. u. Phys. XXI, p. 379),

wo $-\frac{1}{r^2} = \kappa^2$ die constante Krümmung ist*); denn man überzeugt sich leicht, dass in den Parametern $z_1, \dots, z_n$ das Linienelement die Form (13) hat.

Was nun die *Deformirbarkeit* eines Raumes von n Dimensionen in einem ebenen Raume von $n + m$ Dimensionen betrifft, so lässt sich aus dem Ausdrucke (22) wieder nur der Schluss ziehen, dass ein n -dimensionaler Raum in einem ebenen Raume von $n + 1$ Dimensionen für $n > 2$ i. A. nicht so deformirt werden kann, dass im Anfangspunkte die ursprünglichen Anfangsbedingungen erfüllt bleiben. Denn dann müssen die geodätischen Flächen des deformirten Raumes im Anfangspunkte dieselben Krümmungen haben wie die sie berührenden des ursprünglichen Raumes, d. h. die den Ausdrücken $c_{ik} c_{lm} - c_{il} c_{km}$ analogen Ausdrücke müssen gegebene Werthe haben, wodurch die c_{ik} bekanntlich für $n > 2$ vollständig bestimmt sind, vorausgesetzt dass die Unterdeterminanten 3. Ordnung der Discriminante der quadratischen Form (16) nicht sämmtlich verschwinden sollen. Die beiden Räume, der ursprüngliche und seine Deformation haben also im Anfangspunkte nicht nur eine Berührung 1. Ordnung, sondern eine Berührung 2. Ordnung, d. h. sie berühren sich auch in allen dem Anfangspunkte benachbarten Punkten. Da nunmehr für diese Punkte dieselben Schlüsse gelten, so haben sie auch in diesen Berührungen 2. Ordnung, u. s. w. kurz sie fallen zusammen.

Was nun den Fall betrifft, dass jene Unterdeterminanten verschwinden, so ist es zunächst leicht zu sehen, dass jeder ebene n -dimensionale Raum in einem ebenen Raume von $n + 1$ Dimensionen deformirt werden kann. Wir beschränken uns, um dies zu erhärten, darauf eine solche Deformation des ebenen n -dimensionalen Raumes anzugeben, nämlich den durch die Gleichung:

$$(29) \quad x_{n+1} = \varphi(x_1)$$

definirten Raum, dessen Linienelement die Form:

$$(30) \quad ds^2 = dx_1^2 (1 + \varphi'(x_1^2)) + dx_2^2 + \dots + dx_n^2$$

hat; dasselbe erhält in der That durch die Substitution:

$$(31) \quad z_1 = \int \sqrt{1 + \varphi'(x_1^2)} dx_1$$

für x_1 die Form der Summe der Quadrate der Coordinatenzuwächse,

dann von Herrn Monro a. a. O. und neuerdings von Herrn Brill (Bemerkung über pseudosphärische Mannigfaltigkeiten von 3 Dimensionen, diese Ann. Bd. XXVI, p. 1). Der obige Beweis lehnt sich am directesten an das Riemann'sche Kriterium an.

*) Diese Formeln sind für $n = 3$ von Herrn Brill a. a. O. gegeben worden.

kann also als eine Deformation des Raumes $x_{n+1} = 0$ betrachtet werden.

Ja es ist leicht zu sehen, dass auch der durch die Gleichung:

$$(32) \quad x_{n+1} = \varphi(x_1, x_2)$$

definierte Raum stets deformirt werden kann; wir erhalten nämlich solche Deformationen durch jede Deformation der im Raume $x_3 = x_4 = \dots = x_n = 0$ durch die Gleichung (32) dargestellten Fläche. Wir verzichten darauf, was sich leicht erreichen liesse, noch allgemeinere deformirbare Räume aufzustellen, weil darum doch die Frage unentschieden bliebe, ob dies die allgemeinsten Räume von n Dimensionen sind, welche in einem ebenen Raume von $n + 1$ Dimensionen deformirbar sind. Zur Entscheidung dieser Frage muss wohl eine Verallgemeinerung des Riemann'schen Krümmungsmaasses aufgestellt werden, die sich zu den geodätischen Räumen von drei Dimensionen verhält wie dieses zu den geodätischen Flächen.

Bedenken wir noch, dass die Beibehaltung der Anfangsbedingungen in dem allgemeineren Falle offenbar mit einer Festsetzung der Lage der etwaigen Deformation gleichbedeutend ist, so können wir nur das folgende Resultat aussprechen:

Ein Raum von n Dimensionen kann in einem ebenen Raume von $n + 1$ Dimensionen nicht deformirt werden, wenn er nicht besonderen Bedingungen genügt, die in dem Verschwinden aller Unterdeterminanten 3. Ordnung der Discriminante der quadratischen Form (16) ihren Ausdruck finden.

Herr Killing glaubt zwar diese Bedingungen dahin präcisiren zu können, dass der n -dimensionale Raum eine Schaar $(n - 1)$ -dimensionaler ebener Räume enthalten muss, „wie nicht näher bewiesen werden soll.“*) Da ich diesen Beweis nicht kenne, so glaubte ich die obige Formulirung vorziehen zu müssen. Sie genügt z. B. um zu erkennen, worauf es uns hier hauptsächlich ankommt, dass *der n -dimensionale sphärische Raum in einem ebenen Raume von $n + 1$ Dimensionen nicht deformirbar ist.*

Weitere Schlüsse lassen sich wiederum aus den dem verallgemeinerten Ausdrücke (22) entspringenden Gleichungen nicht ziehen, und diejenigen Schlüsse, welche Herr Monro a. a. O. aus denselben, allerdings auf anderem Wege gewonnenen Gleichungen gezogen hat, können als bindend oder erheblich nicht erachtet werden. Denn wenn wir in dem speciellen Falle wenigstens die Bedingungen angeben konnten, unter welchen der *im Allgemeinen* richtige Satz zu gelten aufhört, so dürfte dies in dem allgemeineren Falle sehr schwierig sein. Und in der That lässt sich ein Raum constanter positiver Krümmung

*) S. Killing, a. a. O. p. 238.

von n Dimensionen in einem ebenen Raume von $n + 2$ Dimensionen stets deformiren, was man nach dem Satze des Herrn Monro zunächst nicht vermuthen würde.

Will man, falls ein n -dimensionaler Raum in einem ebenen Raume von $n + m$ Dimensionen soll deformirt werden können, eine im Allgemeinen geltende untere Grenze für m erhalten, so geht man wohl am einfachsten auf die Differentialgleichungen des Problems zurück. Darnach müssen $n + m$ Functionen $x_1, x_2, \dots, x_{n+m}$ von n unabhängigen Veränderlichen $u_1, u_2, \dots, u_n$ so bestimmt werden, dass die $\frac{1}{2}n(n+1)$ aus den ersten partiellen Differentialquotienten dieser Functionen gebildeten Ausdrücke: $\sum_{i,k}^{n+m} \frac{\partial x_i}{\partial u_i} \frac{\partial x_k}{\partial u_k}$ gleich werden $\frac{1}{2}n(n+1)$ gegebenen Functionen von $u_1, u_2, \dots, u_n$. Diese $\frac{1}{2}n(n+1)$ partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung für $n + m$ Functionen also werden im Allgemeinen nur lösbar sein, wenn $m \geq \frac{n(n-1)}{2}$.*) Man könnte allerdings daran denken, dass, wenn für $m < \frac{n(n-1)}{2}$ diese $\frac{n(n+1)}{2}$ Differentialgleichungen überhaupt eine Lösung haben, weil ja der n -dimensionale Raum in einem solchen von $n + m$ Dimensionen angenommen ist, sie vielleicht in jedem Falle unendlich viele haben müssten, also auch noch deformirbar wären. Indessen zeigt unser Satz für $m = 1$, dass dem nicht so ist.

§ 3.

Ueber die Deformation der Räume constanter Krümmung.

Wir wollen zunächst beweisen, dass ein n -dimensionaler Raum constanten positiver Krümmung stets deformirbar ist.

Man erkennt dies leicht aus den Gleichungen:

$$(33) \quad \begin{cases} x_1 = \frac{\sin \kappa u}{\kappa} \cos v_1, & x_2 = \frac{\sin \kappa u}{\kappa} \sin v_1 \cos v_2, \\ x_3 = \frac{\sin \kappa u}{\kappa} \sin v_1 \sin v_2 \cos v_3, & \dots, \\ x_{n-1} = \frac{\sin \kappa u}{\kappa} \sin v_1 \sin v_2 \dots \sin v_{n-2} \cos v_{n-1}, \\ x_n = \frac{\sin \kappa u}{\kappa} \sin v_1 \sin v_2 \dots \sin v_{n-2} \sin v_{n-1}, \\ x_{n+1} = f(u), & x_{n+2} = \varphi(u), \end{cases}$$

*) Da $m + n$ partielle Differentialgleichungen für $m + n$ Functionen stets Lösungen mit willkürlichen Functionen haben, so ist wohl die Angabe des Herrn Killing a. a. O. p. 240, dass auch für $m = \frac{n(n-1)}{2}$ besondere Bedingungen zu erfüllen sind, damit eine Deformation möglich sei, nicht richtig.

wodurch nach Formel (15) ein Raum constanten positiven Riemann'schen Krümmungsmaasses definirt ist, sobald:

$$(34) \quad f'(u)^2 + \varphi'(u)^2 = \sin^2 \kappa u,$$

wobei also noch eine der beiden Functionen ganz willkürlich gewählt werden kann.

Ebenso lässt sich zeigen, dass der durch die Gleichungen (28) dargestellte Raum auf mannigfache Weise deformirbar ist. Denn es ist:

$$(35) \quad dx_1^2 + dx_2^2 + dx_{2n-1}^2 = \frac{r^2 (z_n^2 dz_1^2 + (z_n^2 - (n-2)r^2) dz_n^2)}{z_n^4}.$$

So oft es also gelingt x_1, x_2, x_{2n-1} so als Function von z_1 und z_n darzustellen, dass diese Identität befriedigt wird, so oft ergibt sich eine Deformation unseres Raumes. Da durch die Form rechts das Linien-element einer auf eine Rotationsfläche abwickelbare Fläche dargestellt ist, so ist hiermit das Problem der Deformation eines in einem $(2n-1)$ -dimensionalen ebenen Raume enthaltenen n -dimensionalen Raumes constanten negativen Riemann'schen Krümmungsmaasses auf das Biegungsproblem einer Rotationsfläche in unserm gewöhnlichen Raume zurückgeführt. Diejenigen Deformationen, welche, wie Herr Brill a. a. O. bemerkt, durch die Beweglichkeit eines solchen Raumes in sich gegeben sind, wären erst dann als wirkliche Deformationen nachgewiesen, wenn gezeigt wäre, dass solche Bewegungen des Raumes in sich auch mit wirklichen Formveränderungen desselben in Bezug auf den ihn enthaltenden ebenen Raum von $2n-1$ Dimensionen verbunden sind. Dies ist zwar wahrscheinlich, aber in Rücksicht auf die Ausnahmefälle, welche beim Uebergange zu höheren Dimensionen einzutreten pflegen, doch nicht selbstverständlich. Da bei unserer Deformationsmethode noch über zwei willkürliche Functionen verfügt werden kann, so dürfte an einer wirklichen Formveränderung nicht zu zweifeln sein.

Es wird zuletzt nicht ohne Interesse sein, wenn wir neben diesen auf der Hand liegenden Deformationsprocessen zunächst in dem speciellen Falle eines dreidimensionalen Raumes constanten positiven Krümmungsmaasses eine andre Deformationsmethode desselben in einem ebenen Raume von 5 Dimensionen angeben, welche noch zwei willkürliche Functionen je einer Variablen enthält. Während wir nämlich die durch die Formeln (33) definirten dreidimensionalen Räume in einem Raume von 5 Dimensionen auffassen können als entstanden durch Rotation einer Curve in einem Raume von drei Dimensionen um eine in diesem befindliche Ebene, was noch eine doppelte Beweglichkeit giebt, können wir auch fragen nach solchen dreidimensionalen Räumen constanten Krümmungsmaasses, die entstanden sind durch Rotation einer Fläche in einem ebenen vierdimensionalen Raume um einen in diesem

befindlichen ebenen Raum von 3 Dimensionen, was nur noch eine einfache Beweglichkeit giebt. *) Solche Räume werden allgemein dargestellt werden können in der Form:

$$(36) \quad \begin{cases} x_1 = \varphi_1(u, v), & x_2 = \varphi_2(u, v), & x_3 = \varphi_3(u, v), \\ x_4 = \psi(u, v) \cos w, & x_5 = \psi(u, v) \sin w. \end{cases}$$

Soll dieser Raum constantes Krümmungsmaass haben und bezeichnen u, v, w Radiusvector, Polhöhe und Länge in ihm, so muss nach (15) sein:

$$(37) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_1^3 \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial u} \right)^2 &= 1, \\ \sum_i^3 \frac{\partial \varphi_i}{\partial u} \frac{\partial \varphi_i}{\partial v} + \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} &= 0, \\ \sum_i^3 \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial v} \right)^2 &= \frac{\sin^2 \kappa u}{\kappa^2}, \\ \psi^2(u, v) &= \frac{\sin^2 \kappa u}{\kappa} \sin^2 v. \end{aligned} \right.$$

Hieraus folgt:

$$(38) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_i^3 \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial u} \right)^2 &= E = 1 - \cos^2 \kappa u \sin^2 v, \\ \sum_i^3 \frac{\partial \varphi_i}{\partial u} \frac{\partial \varphi_i}{\partial v} &= F = - \frac{\sin \kappa u \cos \kappa u}{\kappa} \sin v \cos v, \\ \sum_i^3 \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial v} \right)^2 &= G = \frac{\sin^2 \kappa u}{\kappa^2} \sin^2 v. \end{aligned} \right.$$

Es wird demnach:

$$(39) \quad E du^2 + 2F du dv + G dv^2 \\ = \sin^2 \kappa u du^2 + \left(\cos \kappa u \cos v du - \frac{\sin \kappa u}{\kappa} \sin v dv \right)^2 = du'^2 + dv'^2,$$

*) Es ist bemerkenswerth, dass in einem ebenen Raume von 4 Dimensionen durch Rotation einer gemeinen Schraubenlinie in einem ebenen dreidimensionalen Raume um eine in diesem befindliche und durch die Axe der Schraubenlinie gehende Ebene eine Fläche constanten positiven Krümmungsmaasses entsteht, wie die Formeln lehren:

$$x_1 = \frac{\sqrt{1-c^2}}{\kappa} \kappa u, \quad x_2 = \frac{c}{\kappa} \cos \kappa u, \quad x_3 = \frac{c}{\kappa} \sin \kappa u \cos \frac{v}{c}, \\ x_4 = \frac{c}{\kappa} \sin \kappa u \sin \frac{v}{c}.$$

wenn gesetzt wird:

$$(40) \quad u' = \frac{\cos \kappa u}{\kappa}, \quad v' = \frac{\sin \kappa u}{\kappa} \cos v.$$

Wir werden daher die Gleichungen (37) auf die allgemeinste Weise befriedigt haben, wenn wir $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ gleich solchen Functionen von u' und v' setzen, dass $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ die drei rechtwinkligen Coordinaten einer abwickelbaren Fläche darstellen, für welche die Linien $u' = \text{const.}$ und $v' = \text{const.}$ geodätische Isothermen sind. Hiermit ist also die Lösung unseres Problems auf die bekanntere zurückgeführt.

Soll diese abwickelbare Fläche die Ebene selbst sein, so können wir $\varphi_1 = u', \varphi_2 = v'$ und $\varphi_3 = 0$ setzen und erhalten den schon bekannten sphärischen Raum. Der nächste einfachere Fall wäre der des Kreiscylinders. Dann können wir setzen:

$$(41) \quad \varphi_1 = a \cos \frac{u'}{a}, \quad \varphi_2 = a \sin \frac{u'}{a}, \quad \varphi_3 = v',$$

und erhalten den Raum constanten positiven Krümmungsmaasses:

$$(42) \quad \begin{cases} x_1 = a \cos \left(\frac{\cos \kappa u}{a \kappa} \right), & x_2 = a \sin \left(\frac{\cos \kappa u}{a \kappa} \right), & x = \frac{\sin \kappa u}{\kappa} \cos v, \\ x_4 = \frac{\sin \kappa u}{\kappa} \sin v \cos w, & x_5 = \frac{\sin \kappa u}{\kappa} \sin v \sin w. \end{cases}$$

Würde man für die letzten beiden Gleichungen (36) die Gleichungen setzen:

$$(43) \quad \begin{cases} x_4 = \psi(u, v_1) \cos v_2, & x_5 = \psi(u, v_1) \sin v_2 \cos v_3, \\ x_6 = \psi(u, v_1) \sin v_2 \sin v_3, \dots \\ x_{n+1} = \psi(u, v_1) \sin v_2 \sin v_3 \dots \sin v_{n-2} \cos v_{n-1}, \\ x_{n+2} = \psi(u, v_1) \sin v_2 \sin v_3 \dots \sin v_{n-1}, \end{cases}$$

so hätte man auch das Problem der Deformation eines n -dimensionalen Raumes constanter Krümmung in einem ebenen Raume von $n+2$ Dimensionen auf die Biegung der Ebene im gewöhnlichen Raume zurückgeführt, also auch Lösungen des Problems mit zwei willkürlichen Functionen erhalten. Obwohl ich nicht zu behaupten wage, dass hiermit das Problem in allgemeinsten Weise gelöst sei, so dürften die obigen Beispiele immerhin der Beachtung werth sein.

Leipzig, im November 1885.