I SIMBOLI DI CHRISTOFFEL ESTESI PER LE FORME DIFFERENZIALI DI PRIMO ORDINE E DI GRADO QUALUNQUE.

Nota di **Luigi Sinigallia**, in Milano.

Adunanza del 24 maggio 1903.

In una recente Nota *) il prof. PASCAL, studiando le forme differenziali di ordine qualunque, è stato condotto a considerare certe funzioni dei coefficienti della forma stessa, funzioni che egli chiama i *simboli a carattere invariantivo*, e che per tali forme fanno un ufficio analogo a quello degli ordinari simboli di CHRISTOFFEL per le forme differenziali quadratiche.

Estendendo un notevole risultato ottenuto dallo stesso Autore per il caso delle forme differenziali del 2° ordine, io ho poi recentemente dimostrato **) l'invariantività delle caratteristiche di certe matrici formate coi detti simboli.

Se ora nella forma che si considera supponiamo nulli i coefficienti di tutti i termini che contengono i differenziali di ordine maggiore di 1 delle variabili (il che, come è facile riconoscere, rappresenta un assieme di condizioni di carattere invariantivo), la forma data acquista il tipo di una forma differenziale di primo ordine e di grado qualunque e le matrici aventi per elementi i simboli relativi (simboli che risultano una

*) PASCAL, *Sulla costruzione dei simboli*, ecc. [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei (5), t. 12 (1903) 1° semestre, pag. 367].

**) *Le matrici a caratteristiche invarianti*, ecc. [Rendiconti del R. Istituto Lombardo (2), t. 36 (1903), pag. 650].

immediata estensione di quelli di CHRISTOFFEL) avranno, come è naturale, le caratteristiche invarianti per ogni trasformazione di variabili. In tal maniera il prof. PASCAL rilevò l'anno scorso per le forme differenziali quadratiche una proprietà dei simboli di CHRISTOFFEL non prima notata *).

Ora, sebbene la proprietà più generale sia, come ho detto, un caso particolare di quella da me già dimostrata in altro luogo, pure credo non inutile darne qui la dimostrazione diretta partendo da una forma di primo ordine e di grado qualunque: e ciò anche per porre in maggiore rilievo, specialmente in un notevole caso particolare, l'importanza dei simboli introdotti in forma tanto più generale dal prof. PASCAL.

Come applicazione di questo teorema dimostrerò poi come, ponendo uguale ad 1 la caratteristica di una di tali matrici, si hanno le condizioni necessarie e sufficienti perchè la forma che si considera sia la potenza di una ordinaria espressione pfaffiana estendendo così anche un risultato che assieme ad altri trovasi in un recente lavoro dello stesso prof. PASCAL **).

1. Abbiasi la forma differenziale di 1° ordine e di grado r

$$(1) \quad \sum_{i_1 \dots i_r} X_{i_1 \dots i_r} dx_{i_1} \dots dx_{i_r},$$

essendo le $X_{i_1 \dots i_r}$ delle funzioni delle variabili $x_1 \dots x_n$ il cui valore non muta comunque si permutino fra loro gli indici $i_1 \dots i_r$; e siano

$$(2) \quad y_i = y_i(x_1 \dots x_n) \quad (i = 1, \dots, n)$$

n funzioni indipendenti delle x , tali cioè che

$$D \equiv \frac{\partial(y_1 \dots y_n)}{\partial(x_1 \dots x_n)} \neq 0.$$

Se la (1) colla sostituzione (2) si muta nella forma

$$(1') \quad \sum_{j_1 \dots j_r} Y_{j_1 \dots j_r} dy_{j_1} \dots dy_{j_r},$$

si avrà

$$(3) \quad X_{i_1 \dots i_r} = \sum_{j_1 \dots j_r} Y_{j_1 \dots j_r} \frac{\partial y_{j_1}}{\partial x_{i_1}} \dots \frac{\partial y_{j_r}}{\partial x_{i_r}}.$$

*) PASCAL, *Sulla teoria invariantiva*, ecc. [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, t. 11 (1902) 2° semestre, pag. 108].

**) PASCAL, *Altre ricerche sulle matrici*, ecc. [Rendiconti del R. Istituto Lombardo (2), t. 36 (1903), pag. 538].

Poniamo ora

$$(4) \quad \begin{cases} \left[\begin{smallmatrix} i_1 & \dots & i_r \\ & h & \end{smallmatrix} \right] = \frac{\partial X_{i_1 \dots i_r}}{\partial x_h} - \sum_i^r \frac{\partial X_{h i_1 \dots i_{s-1} i_{s+1} \dots i_r}}{\partial x_{i_s}}, \\ \left[\begin{smallmatrix} j_1 & \dots & j_r \\ & k & \end{smallmatrix} \right]' = \frac{\partial Y_{j_1 \dots j_r}}{\partial y_k} - \sum_\sigma^r \frac{\partial Y_{k j_1 \dots j_{\sigma-1} j_{\sigma+1} \dots j_r}}{\partial y_{j_\sigma}}; \end{cases}$$

ed osserviamo che il simbolo $(i_1 \dots i_r, h)$ introdotto dal prof. PASCAL *) si riduce appunto al simbolo $\left[\begin{smallmatrix} i_1 & \dots & i_r \\ & h & \end{smallmatrix} \right]$ quando si suppongano nulle tutte le X il cui numero di indici è minore di r .

Avendosi

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_{i_1 \dots i_r}}{\partial x_h} &= \sum_{j_1 \dots j_r, k} \frac{\partial Y_{j_1 \dots j_r}}{\partial y_k} \frac{\partial y_{j_1}}{\partial x_{i_1}} \dots \frac{\partial y_{j_r}}{\partial x_{i_r}} \frac{\partial y_k}{\partial x_h} \\ &+ \sum_{j_1 \dots j_r} \sum_{s=1}^r Y_{j_1 \dots j_r} \frac{\partial y_{j_1}}{\partial x_{i_1}} \dots \frac{\partial y_{j_{s-1}}}{\partial x_{i_{s-1}}} \frac{\partial^2 y_{j_s}}{\partial x_{i_s} \partial x_h} \frac{\partial y_{j_{s+1}}}{\partial x_{i_{s+1}}} \dots \frac{\partial y_{j_r}}{\partial x_{i_r}}, \end{aligned}$$

se esprimiamo il secondo membro della prima delle (4) per le funzioni Y , vediamo che esso consta di termini che contengono solo le derivate prime delle variabili y e di termini che contengono anche le derivate seconde delle stesse variabili.

Il primo gruppo di termini dà evidentemente

$$\sum_{j_1 \dots j_r, k} \left[\begin{smallmatrix} j_1 & \dots & j_r \\ & k & \end{smallmatrix} \right]' \frac{\partial y_{j_1}}{\partial x_{i_1}} \dots \frac{\partial y_{j_r}}{\partial x_{i_r}} \frac{\partial y_k}{\partial x_h};$$

in quanto agli altri termini, quelli contenenti le derivate seconde rispetto ad x_{i_s} ($s = 1, \dots, r$) e ad x_h si distruggono ed i restanti sono due a due uguali fra loro. Sicchè, se, per brevità di scrittura, poniamo col prof. PASCAL **):

$$\begin{aligned} \left(\begin{smallmatrix} j_1 & \dots & j_{r-1} \\ i_1 & \dots & i_r \end{smallmatrix} \right)_{y_k} &= \sum_s^r \frac{\partial^2 y_{j_s}}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_s}} \frac{\partial y_{j_2}}{\partial x_{i_2}} \dots \frac{\partial y_{j_{s-1}}}{\partial x_{i_{s-1}}} \frac{\partial y_{j_s}}{\partial x_{i_{s+1}}} \dots \frac{\partial y_{j_{r-1}}}{\partial x_{i_r}} \\ &+ \sum_s^r \frac{\partial y_{j_1}}{\partial x_{i_1}} \frac{\partial^2 y_{j_2}}{\partial x_{i_2} \partial x_{i_s}} \frac{\partial y_{j_3}}{\partial x_{i_3}} \dots \frac{\partial y_{j_{s-1}}}{\partial x_{i_{s-1}}} \frac{\partial y_{j_s}}{\partial x_{i_{s+1}}} \dots \frac{\partial y_{j_{r-1}}}{\partial x_{i_r}} + \dots \\ &\dots + \frac{\partial y_{j_1}}{\partial x_{i_1}} \dots \frac{\partial y_{j_{r-2}}}{\partial x_{i_{r-2}}} \frac{\partial^2 y_{j_{r-1}}}{\partial x_{i_{r-1}} \partial x_{i_r}}, \end{aligned}$$

*) PASCAL, Rendiconti della R. Accademia dei Lincei (5), t. 12 (1903) 1° semestre, pag. 370.

**) PASCAL, *Su di un invariante simultaneo*, ecc., Rendiconti del R. Istituto Lombardo (2), t. 35 (1902), pag. 694.

avremo

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} \left[\begin{smallmatrix} i_1 & \cdots & i_r \\ & h & \end{smallmatrix} \right] &= \sum_{j_1 \cdots j_r} \left[\begin{smallmatrix} j_1 & \cdots & j_r \\ & k & \end{smallmatrix} \right] \frac{\partial y_{j_1}}{\partial x_{i_1}} \cdots \frac{\partial y_{j_r}}{\partial x_{i_r}} \frac{\partial y_k}{\partial x_h} \\ &- 2 \sum_{j_1 \cdots j_r} Y_{j_1 \cdots j_r} \left(\begin{smallmatrix} j_1 & \cdots & j_{r-1} \\ i_1 & \cdots & i_r \end{smallmatrix} \right) \frac{\partial y_{j_r}}{\partial x_h} \end{aligned} \right.$$

Date più matrici (M_i) aventi lo stesso numero di colonne, denotiamo con $\sum (M_i)$ la matrice che si ottiene scrivendo sotto le linee di una qualunque delle (M_i) successivamente le linee di tutte le altre (M_i) che figurano come termini del sommatorio. Ponendo ora

$$\{M_{i_1 \dots i_{r-2}}\} \equiv \left\| \begin{array}{cccc} 0, & X_{i_1 \dots i_{r-2} 11} & \dots & X_{i_1 \dots i_{r-2} 1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & X_{i_1 \dots i_{r-2} n1} & \dots & X_{i_1 \dots i_{r-2} nn} \end{array} \right\|$$

$$[M_{i_1 \dots i_{r-1}}] \equiv \left\| \begin{array}{ccc} X_{i_1 \dots i_{r-1} 1} \left[\begin{smallmatrix} i_1 & \cdots & i_{r-1} \\ & \text{I} & \end{smallmatrix} \right], & \dots & \left[\begin{smallmatrix} i_1 & \cdots & i_{r-1} \\ & n & \end{smallmatrix} \right] \\ \dots & \dots & \dots \\ X_{i_1 \dots i_{r-1} n} \left[\begin{smallmatrix} i_1 & \cdots & i_{r-1} \\ & \text{I} & \end{smallmatrix} \right], & \dots & \left[\begin{smallmatrix} i_1 & \cdots & i_{r-1} \\ & n & \end{smallmatrix} \right] \end{array} \right\|$$

intenderemo che i sommatori $\sum \{M_{i_1 \dots i_{r-2}}\}$, $\sum [M_{i_1 \dots i_{r-1}}]$ siano estesi rispettivamente a tutte le $\binom{n+r-3}{r-2}$, $\binom{n+r-2}{r-1}$ combinazioni con ripetizione delle classi $r-2$, $r-1$ degli indici, variando questi da 1 ad n . Converrà anzi, per quanto segue, far percorrere successivamente agli indici $i_1 \dots i_r$ tutti i valori da 1 ad n , sicchè la matrice rappresentata simbolicamente in modo evidente con

$$(A) \equiv \sum \{M_{i_1 \dots i_{r-2}}\} + \sum [M_{i_1 \dots i_{r-1}}]$$

avrà $n^{r-1}(1+n)$ linee $\left[\text{delle quali però solo } n \left\{ \binom{n+r-3}{r-2} + \binom{n+r-2}{r-1} \right\} \right.$
 $\left. \text{sono diverse tra loro} \right]$.

Premesse queste cose, dimostriamo che la *caratteristica della matrice* (A) *rimane invariata per ogni trasformazione di variabili.*

Immaginiamo sostituiti ai singoli elementi della matrice (A) i rispettivi valori [formole (3), (5)] espressi in funzione dei coefficienti Y e delle variabili y e determiniamo delle quantità λ tali che

$$\begin{aligned} \frac{\partial y_{j_1}}{\partial x_{i_1}} \dots \frac{\partial y_{j_{r-2}}}{\partial x_{i_{r-2}}} \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1} \lambda_1^{(i_1 \dots i_r)} + \dots + \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \lambda_n^{(i_1 \dots i_r)} \right) &= \begin{pmatrix} j_1 & \dots & j_{r-2} \\ i_1 & \dots & i_r \end{pmatrix}_{y^*}, \\ \dots & \dots \\ \frac{\partial y_{j_1}}{\partial x_{i_1}} \dots \frac{\partial y_{j_{r-2}}}{\partial x_{i_{r-2}}} \left(\frac{\partial y_n}{\partial x_1} \lambda_1^{(i_1 \dots i_r)} + \dots + \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \lambda_n^{(i_1 \dots i_r)} \right) &= \begin{pmatrix} j_1 & \dots & j_{r-2} \\ i_1 & \dots & i_r \end{pmatrix}_{y^*}; \end{aligned}$$

ciò che potremo fare perchè il determinante D è diverso da zero. Se poi alla linea i^{ma} di ogni $[M_{i_1 \dots i_{r-1}}]$ aggiungiamo il doppio della somma delle linee di $\{M_{i_1 \dots i_{r-2}}\}$ moltiplicate ordinatamente per $\lambda_1^{(i_1 \dots i_r)}, \dots, \lambda_n^{(i_1 \dots i_r)}$, poichè

$$\begin{aligned} \sum_{j_1 \dots j_r} Y_{j_1 \dots j_r} \frac{\partial y_{j_1}}{\partial x_{i_1}} \dots \frac{\partial y_{j_{r-2}}}{\partial x_{i_{r-2}}} \frac{\partial y_{j_r}}{\partial x_h} \sum_{i_{r-1}} \frac{\partial y_{j_{r-1}}}{\partial x_{i_{r-1}}} \lambda_{i_{r-1}}^{(i_1 \dots i_r)} = \\ = \sum_{j_1 \dots j_r} Y_{j_1 \dots j_r} \binom{j_1 \dots j_{r-1}}{i_1 \dots i_r}_{yx} \frac{\partial y_{j_r}}{\partial x_h} \end{aligned}$$

e questa operazione non altera il valore della caratteristica della matrice (A) , ne deduciamo ch la matrice (A) ha la stessa caratteristica della matrice

$$(6) \quad \begin{array}{c|c} \text{I}^a \text{ colonna} & (b+1)^{\text{ma}} \text{ colonna} \\ \hline 0 & \sum_{j_1 \dots j_{r-1} k} Y_{j_1 \dots j_{r-1} k} \frac{\partial y_{j_1}}{\partial x_{i_1}} \dots \frac{\partial y_{j_{r-1}}}{\partial x_{i_{r-1}}} \frac{\partial y_k}{\partial x_b} \\ \hline \sum_{j_1 \dots j_r} Y_{j_1 \dots j_r} \frac{\partial y_{j_1}}{\partial x_{i_1}} \dots \frac{\partial y_{j_r}}{\partial x_{i_r}} & \sum_{j_1 \dots j_{r-1} k} \left[\begin{matrix} j_1 \dots j_r \\ k \end{matrix} \right]' \frac{\partial y_{j_1}}{\partial x_{i_1}} \dots \frac{\partial y_{j_r}}{\partial x_{i_r}} \frac{\partial y_k}{\partial x_b} \end{array}$$

Consideriamo ora la matrice quadrata di $n^{r-1}(1+n)$ linee ed altrettante colonne

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{\partial y_i}{\partial x_i} & \dots & \frac{\partial y_i}{\partial x_n} & 0 & \dots & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_i} & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} & 0 & \dots & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & \dots & 0 & \frac{\partial y_i}{\partial x_i} & \dots & \frac{\partial y_i}{\partial x_n} & 0 \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & \dots & 0 & \frac{\partial y_n}{\partial x_i} & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} & 0 \dots \end{array} \equiv (K)$$

ottenuta scrivendo $n^{r-2}(1+n)$ volte in senso diagonale il jacobiano D e ponendo zero in tutti i posti che rimangono vuoti. È chiaro che la matrice (6) può considerarsi il prodotto per colonne della matrice

$$(6') \left\| \begin{array}{c|c} \text{1}^{\text{a}} \text{ colonna} & (h+1)^{\text{ma}} \text{ colonna} \\ \hline 0 & \sum_{j_1 \dots j_{r-1} k} Y_{j_1 \dots j_{r-1} k} \frac{\partial y_{j_2}}{\partial x_{i_2}} \dots \frac{\partial y_{j_{r-1}}}{\partial x_{i_{r-1}}} \frac{\partial y_k}{\partial x_h} \\ \hline \sum_{j_1 \dots j_r} Y_{j_1 \dots j_r} \frac{\partial y_{j_2}}{\partial x_{i_2}} \dots \frac{\partial y_{j_r}}{\partial x_{i_r}} & \sum_{j_1 \dots j_r k} \left[\begin{array}{c} j_1 \dots j_r \\ k \end{array} \right]' \frac{\partial y_{j_2}}{\partial x_{i_2}} \dots \frac{\partial y_{j_r}}{\partial x_{i_r}} \frac{\partial y_k}{\partial x_h} \end{array} \right\|$$

$(j_1 = 1, \dots, n; i_2 \dots i_r = 1, \dots, n)$

colla matrice (K) . La matrice (6') risulta pure il prodotto per colonne della matrice

$$\left\| \begin{array}{c|c} \text{1}^{\text{a}} \text{ colonna} & (h+1)^{\text{ma}} \text{ colonna} \\ \hline 0 & \sum_{j_1 \dots j_{r-1} k} Y_{j_1 \dots j_{r-1} k} \frac{\partial y_{j_3}}{\partial x_{i_3}} \dots \frac{\partial y_{j_{r-1}}}{\partial x_{i_{r-1}}} \frac{\partial y_k}{\partial x_h} \\ \hline \sum_{j_1 \dots j_r} Y_{j_1 \dots j_r} \frac{\partial y_{j_3}}{\partial x_{i_3}} \dots \frac{\partial y_{j_r}}{\partial x_{i_r}} & \sum_{j_1 \dots j_r k} \left[\begin{array}{c} j_1 \dots j_r \\ k \end{array} \right]' \frac{\partial y_{j_3}}{\partial x_{i_3}} \dots \frac{\partial y_{j_r}}{\partial x_{i_r}} \frac{\partial y_k}{\partial x_h} \end{array} \right\|$$

$(j_1, j_2 = 1, \dots, n; i_3, \dots, i_r = 1, \dots, n)$

colla stessa matrice (K) . Così continuando vediamo che, denotando con $(K)_i$ la matrice che si ottiene dalla matrice (K) sostituendovi a ciascuno dei suoi primi n^{r-2} determinanti D , il determinante di ordine n che ha gli elementi principali uguali ad 1 e tutti gli altri nulli, la matrice (6) può ottenersi moltiplicando sempre per colonne la matrice

$$(7) \left\| \begin{array}{c|c} \text{1}^{\text{a}} \text{ colonna} & (h+1)^{\text{ma}} \text{ colonna} \\ \hline 0 & \sum_k Y_{j_1 \dots j_{r-1} k} \frac{\partial y_k}{\partial x_h} \\ \hline Y_{j_1 \dots j_r} & \sum_k \left[\begin{array}{c} j_1 \dots j_r \\ k \end{array} \right]' \frac{\partial y_k}{\partial x_h} \end{array} \right\| \begin{array}{l} (j_1 \dots j_{r-1} = 1, \dots, n) \\ (j_1 \dots j_r = 1, \dots, n) \end{array}$$

per la matrice $(K)_i$, moltiplicando poi il risultato per (K) , dopo avere in modo opportuno permutate fra loro le linee, indi, dopo un'altra permutazione, il nuovo risultato ancora per (K) e così di seguito in modo che le successive moltiplicazioni per la matrice (K) siano $r-1$. La matrice (7) risulta alla sua volta il prodotto per linee della matrice

$$(8) \quad \left\| \begin{array}{c} 0, \quad Y_{j_1 \dots j_{r-1}^1}, \quad \dots \quad Y_{j_1 \dots j_{r-1}^n} \\ Y_{j_1 \dots j_r}, \quad \left[\begin{array}{ccc} j_1 & \dots & j_r \\ & \mathbf{I} & \end{array} \right]^1 \quad \dots \quad \left[\begin{array}{ccc} j_1 & \dots & j_r \\ & & n \end{array} \right] \end{array} \right\| \begin{array}{l} (j_1 \dots j_{r-1} = 1, \dots, n) \\ (j_1 \dots j_r = 1, \dots, n) \end{array}$$

coll'altra

$$\left\| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial x_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{array} \right\|.$$

Ora pel teorema relativo ai minori tratti da una matrice prodotto di altre matrici, le matrici (6), (7), (8) hanno la stessa caratteristica: dunque hanno pure la stessa caratteristica le matrici (A) ed (8). Con ciò il nostro teorema è dimostrato, perchè la matrice (8) è appunto la matrice (A) relativa alla forma trasformata (1') della forma data.

Il metodo tenuto ci può pure portare a dimostrare che *sono anche invarianti per ogni trasformazione di variabili le caratteristiche della matrice* $\sum \{M_{i_1 \dots i_{r-2}}\}$ *e della matrice (A') che si deduce dalla matrice (A) colla soppressione della prima colonna.*

2. È interessante di cercare quali sono le forme di primo ordine e di grado qualunque, che hanno la caratteristica della matrice $\sum \{M_{i_1 \dots i_{r-2}}\}$ uguale ad 1.

Notiamo perciò che, quando la caratteristica della matrice $\sum \{M_{i_1 \dots i_{r-2}}\}$ è 1, si ha

$$\begin{vmatrix} X_{i_1 \dots i_{r-1} i_{r-1}} & X_{i_1 \dots i_{r-1} i_r} \\ X_{i_1 \dots i_{r-2} i_{r-1} i_{r-1}} & X_{i_1 \dots i_{r-2} i_{r-1} i_r} \end{vmatrix} = 0$$

e quindi

$$(9) \quad X_{i_1 \dots i_r}^2 = X_{i_1 \dots i_{r-2} i_{r-1} i_{r-1}} X_{i_1 \dots i_{r-2} i_{r-1} i_r}.$$

Dimostriamo che si ha

$$(10) \quad X_{i_1 \dots i_r} = X_{i_1 \dots i_{r-s} \underbrace{i_{r-s+1} \dots i_{r-1}}_s i_{r-s+1}} X_{i_1 \dots i_{r-s} \underbrace{i_{r-s+2} \dots i_{r-1}}_s i_{r-s+2}} \dots X_{i_1 \dots i_{r-s} \underbrace{i_{r-s+1} \dots i_r}_s i_{r-s+1}}$$

per $s = 2, 3, \dots, r$, denotando con $X_{i_1 \dots i_{r-s} \underbrace{i_{r-s+1} \dots i_{r-1}}_s i_{r-s+1}}$ la X i cui ultimi s indici sono uguali ad i_{r-s+1} .

Supposta vera la (2) per un dato valore di s , essa per

$$i_{r-s} = i_{r-s+1} = \dots = i_{r-s+s} = \dots = i_{r-1}$$

ci dà

$$X_{i_1 \dots i_{r-s-1} i_{r-s} \dots i_{r-s+\tau}}^{i_r} = X_{i_1 \dots i_{r-s-1} i_{r-s} \dots i_{r-s+\tau}}^{i_r-1} X_{i_1 \dots i_{r-s-1} i_{r-s} \dots i_{r-s+\tau}}^{i_r};$$

e scambiando in questa formola i_r ed $i_{r-s+\tau}$ fra loro si ottiene

$$X_{i_1 \dots i_{r-s-1} i_{r-s} \dots i_{r-s+\tau}}^{i_r} = X_{i_1 \dots i_{r-s-1} i_{r-s} \dots i_{r-s+\tau}}^{i_r-1} X_{i_1 \dots i_{r-s-1} i_{r-s} \dots i_{r-s+\tau}}^{i_r-1}.$$

Sicchè eliminando fra le due ultime formole $X_{i_1 \dots i_{r-s-1} i_{r-s} \dots i_{r-s+\tau}}^{i_r}$ abbiamo

$$X_{i_1 \dots i_{r-s-1} i_{r-s} \dots i_{r-s+\tau}}^{i_r+1} = X_{i_1 \dots i_{r-s-1} i_{r-s} \dots i_{r-s+\tau}}^{i_r} X_{i_1 \dots i_{r-s-1} i_{r-s} \dots i_{r-s+\tau}}^{i_r},$$

ossia, scrivendo i_{r-1} in luogo di i_r ,

$$(11) \quad X_{i_1 \dots i_{r-s-1} i_{r-s} \dots i_{r-s+\tau}}^{i_r+1} = X_{i_1 \dots i_{r-s-1} i_{r-s} \dots i_{r-s+\tau}}^{i_r} X_{i_1 \dots i_{r-s-1} i_{r-s} \dots i_{r-s+\tau}}^{i_r},$$

ove $\tau = 1, 2, \dots, s$.

Sostituiamo ora in singoli fattori del secondo membro della (10) elevata alla potenza $(s+1)^{\text{ma}}$ i loro valori dati dalla (11), estraendo poi la radice s^{ma} avremo

$$X_{i_1 \dots i_r}^{s+1} = X_{i_1 \dots i_{r-s-1} i_{r-s} \dots i_{r-s+\tau}}^{i_r} X_{i_1 \dots i_{r-s-1} i_{r-s} \dots i_{r-s+\tau}}^{i_r} \dots X_{i_1 \dots i_{r-s-1} i_{r-s} \dots i_{r-s+\tau}}^{i_r};$$

sicchè la (10) sussiste anche per $s+1$. Ma essa, per la (9), è vera per $s=2$; dunque la (10) ha luogo per ogni valore di s .

In particolare, per $s=r$, la (10) ci dà

$$X_{i_1 \dots i_r}^{i_r} = X_{i_1 \dots i_1}^{i_1} X_{i_2 \dots i_2}^{i_2} \dots X_{i_r \dots i_r}^{i_r}$$

e, se $X_{i_1 \dots i_r}^{i_r} = X_i^{i_r}$, avremo in tal caso

$$(12) \quad X_{i_1 \dots i_r} = X_{i_1} X_{i_2} \dots X_{i_r},$$

e quindi

$$(13) \quad \sum X_{i_1 \dots i_r} dx_{i_1} \dots dx_{i_r} = (\sum X_i dx_i)^r.$$

Viceversa è chiaro che se una forma differenziale di primo ordine e di grado qualunque è la potenza di una ordinaria espressione pfaffiana, i suoi coefficienti soddisferanno alla (12) e la caratteristica della matrice $\sum \{M_{i_1 \dots i_{r-2}}\}$ sarà 1. Dunque: *perchè una forma differenziale di primo ordine e di grado qualunque r sia la potenza r^{ma} di una ordinaria espressione pfaffiana bisogna e basta che la caratteristica della matrice $\sum \{M_{i_1 \dots i_{r-2}}\}$ sia uguale all'unità.*

Rammentando ora i noti teoremi della teoria delle espressioni pfaffiane *) ne deduciamo che: *date due forme differenziali di 1° ordine e*

*) WEBER, Vorlesungen über das PFAFF'sche Problem, pag. 158-163. Leipzig 1900.

dello stesso grado r

$$X^{(r)} = \sum X_{i_1 \dots i_r} dx_{i_1} \dots dx_{i_r}, \quad Y^{(r)} = \sum Y_{i_1 \dots i_r} dy_{i_1} \dots dy_{i_r}$$

aventi ambedue la matrice $\sum \{M_{i_1 \dots i_{r-2}}\}$ colla caratteristica 1, denotando rispettivamente con X_i, Y_i le radici r^{me} dei coefficienti X, Y aventi tutti gli r indici uguali ad i , e ponendo

$$(ih) = \frac{\partial X_i}{\partial x_h} - \frac{\partial X_h}{\partial x_i}, \quad (ih)' = \frac{\partial Y_i}{\partial y_h} - \frac{\partial Y_h}{\partial y_i};$$

la condizione necessaria e sufficiente per l'equivalenza delle forme stesse $X^{(r)}, Y^{(r)}$ è che le matrici

$$\begin{vmatrix} X_1 & X_2 & \dots & X_n \\ 0 & (12) & \dots & (1n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (n1) & (n2) & \dots & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 & \dots & Y_n \\ 0 & (12)' & \dots & (1n)' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (n1)' & (n2)' & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

abbiano la stessa caratteristica. La condizione invece necessaria e sufficiente per l'equivalenza delle due equazioni ai differenziali totali di ordine r

$$X^{(r)} = 0, \quad Y^{(r)} = 0$$

è che le matrici

$$\begin{vmatrix} 0 & X_1 & X_2 & \dots & X_n \\ X_1 & 0 & (12) & \dots & (1n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_n & (n1) & (n2) & \dots & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & Y_1 & Y_2 & \dots & Y_n \\ Y_1 & 0 & (12)' & \dots & (1n)' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Y_n & (n1)' & (n2)' & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

abbiano la stessa caratteristica.

Quando (come qui si è tacitamente supposto) il grado r della forma differenziale è maggiore di 1, anche la caratteristica della matrice (A) sarà maggiore di 1.

Consideriamo il caso in cui la caratteristica della matrice (A) è 2: caso che richiede che la caratteristica della matrice $\sum \{M_{i_1 \dots i_{r-2}}\}$ sia 1.

Se la caratteristica della matrice (A) è 2 si avranno le relazioni (12), (13) e l'altra

$$\begin{vmatrix} 0 & X_{j_1 \dots j_{r-1} j_r} & X_{j_1 \dots j_{r-1} i_r} \\ X_{i_1 \dots i_r} & \begin{bmatrix} i_1 & \dots & i_r \\ & j_r \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} i_1 & \dots & i_r \\ & i_r \end{bmatrix} \\ X_{h_1 \dots h_r} & \begin{bmatrix} h_1 & \dots & h_r \\ & j_r \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} h_1 & \dots & h_r \\ & i_r \end{bmatrix} \end{vmatrix} = 0;$$

prendiamo

$$i_1 = i_2 = \dots = i_r = i; \quad j_1 = j_2 = \dots = j_r = j; \\ h_1 = h_2 = \dots = h_r = h;$$

scegliendo le X_i , X_j , X_h diverse da zero, l'ultima relazione, per la (12), ci dà

$$(14) \quad \begin{cases} X_j X_h' \begin{bmatrix} i_1 & \dots & i_r \\ & & i \end{bmatrix} + X_{i+1}' \begin{bmatrix} h_1 & \dots & h_r \\ & & j \end{bmatrix} = \\ = X_i X_h' \begin{bmatrix} i_1 & \dots & i_r \\ & & j \end{bmatrix} + X_j X_i' \begin{bmatrix} h_1 & \dots & h_r \\ & & i \end{bmatrix}. \end{cases}$$

Ora quando $h_1 = h_2 = \dots = h_r$, se $(ih) = \frac{\partial X_i}{\partial x_h} - \frac{\partial X_h}{\partial x_i}$, si ha

$$(15) \quad \begin{bmatrix} h_1 & \dots & h_r \\ & & i \end{bmatrix} = r X_h^{r-2} \{X_h(bi) - (r-1) X_i \frac{\partial X_h}{\partial x_h}\};$$

perciò la (14) si riduce a

$$X_i(jh) + X_j(bi) + X_h(ij) = 0,$$

cioè $\sum X_i dx_i$ è un'espressione pfaffiana completamente integrabile.

Viceversa, pel teorema dimostrato al § 1, è chiaro che la matrice (A) relativa ad una potenza qualsiasi di una espressione pfaffiana completamente integrabile ha la caratteristica 2. Abbiamo così il teorema: *perchè una forma differenziale di primo ordine e di grado qualunque sia la potenza di una espressione pfaffiana completamente integrabile, bisogna e basta che la caratteristica della matrice (A) sia uguale a 2.*

La matrice (A') [che si deduce dalla (A) colla soppressione della prima colonna] può avere quì le caratteristiche 1 o 2.

Se 1 è la caratteristica della matrice (A') avremo

$$\begin{vmatrix} X_{j_1 \dots j_{r-1} h} & X_{j_1 \dots j_{r-1} k} \\ \begin{bmatrix} i_1 & \dots & i_r \\ & & h \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} i_1 & \dots & i_r \\ & & k \end{bmatrix} \end{vmatrix} = 0,$$

ossia per le (12), (15)

$$X_h(ik) = X_k(ih),$$

cioè la classe dell'espressione pfaffiana $\sum X_i dx_i$ è 1. E concludiamo: *perchè una forma differenziale di primo ordine e di grado qualunque sia la potenza di un differenziale esatto bisogna e basta che la caratteristica della matrice (A') sia l'unità.*

Dunque se la caratteristica della matrice (A') è 2, avremo

$$\sum X_{i_1 \dots i_r} dx_{i_1} \dots dx_{i_r} = (Y dy)',$$

essendo Y , y due funzioni indipendenti delle variabili $x_1 \dots x_n$.

Milano, Maggio del 1903.

LUIGI SINIGALLIA.