SUR L'EXPRESSION DU TERME GÉNÉRAL DES SÉRIES DE TAYLOR REPRÉSENTANT DES COMBINAISONS RATION- NELLES DE LA FONCTION EXPONENTIELLE

Par M. **Michel Petrovitch**, à Belgrade (Serbie).

Adunanza del 13 agosto 1899.

Je me propose ici de chercher la forme générale du coefficient α_n des séries

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots,$$

définissant une combinaison rationnelle d'une fonction exponentielle e^{ax} . On ramène facilement à ce problème celui dans lequel la série représente une combinaison rationnelle de fonctions trigonométriques $\sin ax$ et $\cos ax$.

Soit

$$(1) \quad y = R(u),$$

avec

$$(2) \quad u = e^{ax}$$

une telle fonction, où R est une fonction rationnelle en u . On aura alors

$$(3) \quad \alpha_n = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \left(\frac{d^n y}{d x^n} \right)_{x=0},$$

et d'après une formule connue sur la $n^{\text{ième}}$ dérivée d'une fonction composée (voir, par ex., Bertrand, *Analyse*, t. I, page 140), on aura

$$(4) \quad \frac{d^n y}{d x^n} = A_{1,n} R'(u) + A_{2,n} R''(u) + \dots + A_{n,n} R^{(n)}(u),$$

avec

$$(5) \quad A_{k,n} = \frac{(-1)^{k+1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k} \left[\binom{k}{1} u^{k-1} \frac{d^n u}{d x^n} - \binom{k}{2} u^{k-2} \frac{d^n u^2}{d x^n} \right. \\ \left. + \binom{k}{3} u^{k-3} \frac{d^n u^3}{d x^n} - \dots \pm \frac{d^n u^k}{d x^n} \right].$$

En y posant

$$u = e^{ax},$$

on trouve

$$(6) \quad \frac{d^n u^k}{dx^n} = (k a)^n e^{kax},$$

et par suite

$$(7) \quad A_{k,n} = \frac{(-1)^{k+1} a^n}{1.2.3 \dots k} e^{kax} \left[\binom{k}{1} - \binom{k}{2} 2^n + \binom{k}{3} 3^n - \dots \right].$$

Si l'on pose $x = 0$, on trouve donc

$$(8) \quad \left(\frac{d^n y}{dx^n} \right)_{x=0} = a^n [C_{1,n} R'(1) + C_{2,n} R''(1) + \dots + C_{n,n} R^{(n)}(1)],$$

avec

$$(9) \quad C_{k,n} = \frac{(-1)^{k+1}}{1.2.3 \dots k} \left[\binom{k}{1} - \binom{k}{2} 2^n + \binom{k}{3} 3^n - \dots \right].$$

Pour calculer les valeurs de

$$R'(1), R''(1), R'''(1), \dots$$

choisissons une valeur particulière de x , telle que, ρ_1 étant le pôle de la fonction rationnelle $R(1+u)$, considérée comme fonction de u , ayant le plus petit module, on ait

$$(10) \quad \text{part. réelle de } (ax) < \log(\text{mod } \rho_1).$$

La fonction $R(1+u)$ sera holomorphe à l'intérieur du cercle ayant l'origine comme centre, ρ_1 comme rayon, et contenant le point $u(x)$ dans son intérieur. Par conséquent on aura

$$R(1+u) = R(1) + \frac{R'(1)}{1} u + \frac{R''(1)}{1.2} u^2 + \dots,$$

ou bien

$$(11) \quad R(1+u) = M_0 + M_1 u + M_2 u^2 + \dots,$$

avec

$$(12) \quad R^{(k)}(1) = 1.2.3 \dots k M_k.$$

La série (11), représentant une fonction rationnelle en u , est une série récurrente et par suite, d'après un théorème connu, on aura

$$(13) \quad M_n = P_1(n) r_1^n + P_2(n) r_2^n + \dots + P_\mu(n) r_\mu^n,$$

où: $r_1, r_2, \dots, r_\mu$ désignent les racines de l'équation génératrice

$$G(r) = 0$$

de la fraction rationnelle $R(1+u)$; $P_1, P_2, \dots, P_\mu$ désignent certains polynômes en n tels que P_k est de degré λ_{k-1} , λ_k étant le degré de multiplicité de la racine r_k . De plus, l'équation algébrique

$$G(r) = 0$$

n'est autre que celle obtenue en égalant à zéro le dénominateur de la

fonction $R(1+u)$, après y avoir remplacé u par $\frac{1}{r}$ et chassé le dénominateur, qui sera une certaine puissance de r .

Le polynôme $P_i(k)$, correspondant à la racine r_i , sera de la forme

$$(14) \quad P_i(k) = b_{i,0} + b_{i,1}k + \dots + b_{i,\lambda_i-1}k^{\lambda_i-1} = \sum_0^{\lambda_i-1} b_{i,p} k^p,$$

où les $b_{i,p}$ sont des quantités finies et fixes en grandeur et en nombre, indépendantes de l'indice n et que l'on calculera aisément pour tout cas particulier donné.

En remplaçant le polynôme $P_i(k)$ par son expression (14) dans l'équation (13) et (12), on trouve

$$(15) \quad R^{(k)}(1) = 1.2.3 \dots k \sum_i^{\mu} \sum_p^{\lambda_i-1} b_{i,p} k^p r_i^k;$$

et en tenant compte de ce que l'équation (9) peut s'écrire sous la forme

$$(16) \quad C_{k,n} = \frac{1}{1.2.3 \dots k} \sum_j^k (-1)^{k+j} \binom{k}{j} j^n,$$

l'équation (8) devient :

$$(17) \quad \left(\frac{d^n y}{d x^n} \right)_0 = a^n \sum_i^{\mu} \sum_p^{q_i} \sum_k^n \sum_j^k (-1)^{k+j} \binom{k}{j} j^n b_{i,p} k^p r_i^k.$$

On en déduit le résultat suivant :

Le coefficient α_n du terme général de la série de Taylor

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \dots,$$

représentant une combinaison rationnelle d'une fonction exponentielle e^{ax} est de la forme

$$(18) \quad \alpha_n = \frac{a^n}{1.2.3 \dots n} \sum_i^{\mu} \sum_p^{q_i} \sum_k^n \sum_j^k (-1)^{k+j} \binom{k}{j} j^n b_{i,p} k^p r_i^k,$$

où les quantités

$$r_i, \quad b_{i,p} \quad \begin{cases} i = 1, 2, 3, \dots, \mu \\ p = 0, 1, 2, \dots, q_i \end{cases}$$

et les entiers positifs μ, q_i sont finis et fixes, indépendants de l'indice n ayant les significations suivantes :

1° les r_i sont les inverses des pôles ρ_i de la fonction $R(1+u)$, considérée comme fonction de u ;

2° les $b_{i,p}$ sont des constantes ne dépendant que des coefficients de la fonction R et dont nous montrerons le calcul plus loin;

3° μ est le nombre de pôles ρ_i distincts;

4° q_i est égal à l'ordre λ_i , diminué d'une unité, du pôle ρ_i .

Le coefficient α_n est donc égal à la somme de

$$\frac{n(n+1)}{2}(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_\mu)$$

termes de la forme

$$\frac{(-1)^{k+j} \binom{k}{j} (aj)^n b_{ik} k^p r_i^k}{1.2.3 \dots n},$$

où i, j, k, p sont des entiers positifs, et a, b_{ik}, r_i des constantes indépendantes de n , définies précédemment.

Le calcul des constantes b_{ik} peut s'effectuer de diverses manières. On peut le faire par ex. en décomposant la fraction rationnelle $R(1+u)$ en fractions simples et en développant celles-ci en séries ordonnées suivant les puissances de u . La fonction $R(1+u)$ ayant comme pôles ρ_i ($i = 1, 2, \dots, \mu$) d'ordres respectifs λ_i , peut s'écrire

$$R(1+u) = \sum_i^{\lambda_i} \frac{B_i}{(u - \rho_i)^{\lambda_i}} + \dots + \sum_i^{\lambda_\mu} \frac{G_i}{(u - \rho_\mu)^{\lambda_\mu}}.$$

En tenant compte de ce qu'on a identiquement

$$\frac{i(i+1) \dots (i+n-1)}{1.2.3 \dots n} = \frac{(n+1)(n+2) \dots (n+i-1)}{1.2.3 \dots (i-1)},$$

le coefficient de $\left(\frac{u}{\rho_i}\right)^n$ dans le développement de la fraction

$$\sum_i^{\lambda_i} \frac{B_i}{(u - \rho_i)^{\lambda_i}}$$

sera

$$-\frac{B_i}{\rho_i} + \binom{n+1}{1} \frac{B_i}{\rho_i^2} - \binom{n+1}{2} \frac{B_i}{\rho_i^3} + \dots \pm \binom{n+1}{\lambda_i-1} \frac{B_i}{\rho_i^{\lambda_i}}.$$

En l'ordonnant suivant les puissances de n , de sorte que cette expression devient

$$g_0 + g_1 n + g_2 n^2 + \dots + g_{\lambda_i-1} n^{\lambda_i-1},$$

comme l'on a

$$\frac{1}{\rho_i} = r_i,$$

d'après la définition des constantes b_{ip} on aura

$$b_{i1} = g_0, \quad b_{i2} = g_1, \quad \dots, \quad b_{i\lambda_i} = g_{\lambda_i-1}.$$

De la même manière, en développant l'expression

$$\sum_i^{\lambda_i} \frac{C_i}{(u - \rho_i)^{\lambda_i}}$$

en série ordonnée suivant les puissances de u , on calculera les constantes

$$b_{21}, b_{22}, \dots b_{2, \lambda_2-1} \text{ etc.}$$

On peut aussi calculer directement les polynômes

$$P_i(n) = b_{i0} + b_{i1}n + b_{i2}n^2 + \dots + b_{i, \lambda_i-1}n^{\lambda_i-1}$$

par la méthode suivante, due à Lagrange (*Œuvres*, t. V, pag. 640).

Soit

$$(19) \quad G(r) = A + Br + Cr^2 + Dr^3 + Er^4 + \dots$$

le premier membre de l'équation algébrique

$$G(r) = 0,$$

et posons pour abréger

$$(20) \quad \begin{cases} Q_0(r) = B + Cr + Dr^2 + Er^3 + \dots \\ Q_1(r) = C + Dr + Er^2 + Fr^3 + \dots \\ Q_2(r) = D + Er + Fr^2 + \dots \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

Soient

$$A_0, A_1, A_2, \dots, A_m$$

les coefficients de m premiers termes de la série de Taylor, ordonnée suivant les puissances de u et représentant la fonction $R(1+u)$ (m étant le degré de l'équation génératrice), et faisons

$$(21) \quad [A_0 Q_0(r) + A_1 Q_1(r) + \dots + A_m Q_m(r)]r^n = F(r).$$

Le polynôme $P_i(n)$, correspondant à la racine r_i , sera égal au terme indépendant de ϖ dans le développement de l'expression

$$(22) \quad \frac{F(r_i) + \varpi \frac{dF}{dr_i} + \frac{\varpi^2}{1.2} \frac{d^2 F}{dr_i^2} + \dots}{\frac{dG}{dr_i} + \frac{\varpi}{1.2} \frac{d^2 G}{dr_i^2} + \frac{\varpi^2}{1.2.3} \frac{d^3 G}{dr_i^3} + \dots}$$

après avoir développé cette expression en série ordonnée suivant les puissances ascendante de ϖ et après y avoir supprimé les dérivées de G qui sont nulles en tenant compte du degré de multiplicité de la racine considérée r_i ; enfin, l'expression ainsi obtenue doit être divisée par r_i^n .

Enfin, remarquons qu'une série de la forme (18) étant donnée, la période de la fonction simplement périodique, qu'elle représente, est

$$\frac{2\pi i}{a};$$

les pôles élémentaires γ_i de cette fonction sont donnés par la formule

$$\gamma_i = \frac{1}{a} \log \left(1 + \frac{1}{r_i} \right)$$

et l'ordre du pôle γ_i est égal à l'entier q_i , augmenté d'une unité.

Ceci résulte de ce que, si

$$\rho_1, \rho_2, \rho_3, \dots$$

sont les pôles de $R(1+u)$, on a

$$\frac{1}{r_i} = \rho_i,$$

et par suite, en désignant par

$$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots,$$

les pôles de $R(u)$ en u , on aura

$$e^{ar_i} = \beta_i = 1 + \rho_i = 1 + \frac{1}{r_i}$$

Belgrade, 23 juillet 1899.

MICHEL PETROVITCH.