12.

Allgemeine Berechnung der fünf regulären Körper.

(Von Herrn F. Schultze, Privatlehrer zu Berlin.)

Bezeichnet man den Inhalt des Körpers mit K , den Inhalt jeder seiner Seitenflächen mit F , deren Anzahl mit n und das Maafs des Halbmessers der in den Körper beschriebenen Kugel mit ϱ : so ist

$$1. \quad K = \frac{1}{3} n F \varrho.$$

Bezeichnet man ferner die Anzahl der Seiten jeder Seitenfläche mit n' und das Maafs jeder Kante mit s , so ist

$$2. \quad F = n' \cdot \left(\frac{1}{2}s\right)^2 \cdot \cot \frac{180^\circ}{n'}.$$

Bezeichnet man nun das Maafs des Halbmessers der um den Körper beschriebenen Kugel mit r und das Maafs des Halbmessers des um jede Seitenfläche beschriebenen Kreises mit r : so ist

$$3. \quad r^2 = \varrho^2 + r^2.$$

Bezeichnet man alsdann das Maafs des Winkels, welchen zwei aus den Endpunkten einer Kante gezogene Halbmesser mit einander bilden, mit μ , so ist

$$4. \quad r = \frac{1}{2}s \operatorname{cosec} \frac{1}{2}\mu.$$

Stellt man sich nun auf der Oberfläche der um den Körper beschriebenen Kugel die Ecken des Körpers durch Meridianbogen verbunden, die ganze Kugel-Oberfläche also hierdurch in ein Netz von n regulären sphärischen n' ecken zerlegt vor; alsdann den Pol (P) eines derselben (es möge dasselbe ein reguläres Fünfeck $ABCDE$ sein) mit seinen Ecken gleichfalls durch Meridianbogen (PA, PB, PC, PD, PE) verbunden und in einem der auf diese Weise entstehenden sphärischen Dreiecke (etwa in APE) vom Pol (P) aus senkrecht auf die gegenüberliegende Seite (AE) einen Meridianbogen (PF') gezogen, und bezeichnet das Maafs jedes Winkels der sphärischen n' ecke mit A , das Maafs jedes der n' um den Pol (P) liegenden sphärischen Winkel aber mit M : so ist (in dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck AFP oder EPF)

$$5. \quad \cos \frac{1}{2}M = \cos \frac{1}{2}\mu \sin \frac{1}{2}A.$$

Nun ist

$$n'.M = 360^{\circ},$$

folglich

$$6. \quad M = \frac{360^{\circ}}{n'},$$

und ferner, wenn *die Anzahl der Kanten jeder Ecke des Körpers* mit n'' bezeichnet wird,

$$n''.A = 360^{\circ},$$

also

$$7. \quad A = \frac{360^{\circ}}{n''};$$

folglich ist aus (5. 6. und 7.)

$$\cos \frac{180^{\circ}}{n'} = \cos \frac{1}{2}\mu \sin \frac{180^{\circ}}{n''}$$

und hieraus

$$8. \quad \cos \frac{1}{2}\mu = \frac{\cos \frac{180^{\circ}}{n'}}{\sin \frac{180^{\circ}}{n''}}.$$

Es ist aber

$$\operatorname{cosec} \frac{1}{2}\mu = \frac{1}{\sqrt{1 - (\cos \frac{1}{2}\mu)^2}}$$

und, wenn hierin für $\cos \frac{1}{2}\mu$ aus (8.) sein Werth substituirt wird,

$$\operatorname{cosec} \frac{1}{2}\mu = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\cos \frac{180^{\circ}}{n'}}{\sin \frac{180^{\circ}}{n''}} \right)^2}}$$

oder

$$9. \quad \operatorname{cosec} \frac{1}{2}\mu = \frac{\sin \frac{180^{\circ}}{n''}}{\sqrt{\left(\left(\sin \frac{180^{\circ}}{n''} \right)^2 - \left(\cos \frac{180^{\circ}}{n'} \right)^2 \right)}};$$

desgleichen ist alsdann aus (4. und 9.)

$$10. \quad r = \frac{1}{2}s \cdot \frac{\sin \frac{180^{\circ}}{n''}}{\sqrt{\left(\left(\sin \frac{180^{\circ}}{n''} \right)^2 - \left(\cos \frac{180^{\circ}}{n'} \right)^2 \right)}}.$$

Es ist ferner

$$11. \quad r = \frac{1}{2}s \operatorname{cosec} \frac{180^{\circ}}{n'},$$

folglich aus (3. 10. und 11.)

$$\left(\frac{1}{2} s \cdot \frac{\sin \frac{180^\circ}{n''}}{\sqrt{\left(\left(\sin \frac{180^\circ}{n''} \right)^2 - \left(\cos \frac{180^\circ}{n'} \right)^2 \right)}} \right)^2 = \varrho^2 + \left(\frac{1}{2} s \cdot \operatorname{cosec} \frac{180^\circ}{n'} \right)^2$$

und hieraus

$$12. \quad \varrho = \frac{1}{2} s \cdot \frac{\cot \frac{180^\circ}{n'} \cos \frac{180^\circ}{n''}}{\sqrt{\left(\left(\sin \frac{180^\circ}{n''} \right)^2 - \left(\cos \frac{180^\circ}{n'} \right)^2 \right)}};$$

endlich ist aus (1. 2. und 12.)

$$(I.) \quad K = \frac{1}{3} n n' \cdot \left(\frac{1}{2} s \right)^3 \cdot \frac{\left(\cot \frac{180^\circ}{n'} \right)^2 \cos \frac{180^\circ}{n''}}{\sqrt{\left(\left(\sin \frac{180^\circ}{n''} \right)^2 - \left(\cos \frac{180^\circ}{n'} \right)^2 \right)}}.$$

Eliminirt man aus dieser Gleichung s mit Hülfe der Gleichungen (10. und 12.), so erhält man noch

$$(II.) \quad K = \frac{1}{3} n n' \cdot r^3 \cdot \left(\left(\sin \frac{180^\circ}{n''} \right)^2 - \left(\cos \frac{180^\circ}{n'} \right)^2 \right) \left(\cot \frac{180^\circ}{n'} \right)^2 \cot \frac{180^\circ}{n''} \left(\operatorname{cosec} \frac{180^\circ}{n''} \right)^2$$

und

$$(III.) \quad K = \frac{1}{3} n n' \cdot \varrho^3 \cdot \left(\left(\sin \frac{180^\circ}{n''} \right)^2 - \left(\cos \frac{180^\circ}{n'} \right)^2 \right) \tan^2 \frac{180^\circ}{n'} \left(\sec \frac{180^\circ}{n''} \right)^2.$$