Astronomische Nachrichten.

Expedition auf der Königlichen Sternwarte bei Kiel.

Herausgeber: Prof. Dr. C. A. F. Peters.

Band 89.

Nr. 2128

16.

Zur Bestimmung des Gewichts von Beobachtungen, deren mittleres Fehlerquadrat sich aus mehreren Theilen zusammensetzt.

Von Professor *Helmert*. (Schluss.)

In bekannter Weise folgert man nun, dass für die wahrscheinlichsten Werthe von $\mu'^2 \mu''^2$ der Ausdruck (28) oder statt dessen

$$\begin{aligned} & [\log h_i] - [h_i^2 \epsilon_i^2] \\ & \text{ein Maximum werden müsse. Dies tritt ein für} \\ & \left[\frac{1 - 2 h_i^2 \epsilon_i^2}{h_i} \frac{dh_i}{d\mu'^2} \right] = 0 \\ & \left[\frac{1 - 2 h_i^2 \epsilon_i^2}{h_i} \frac{dh_i}{d\mu''^2} \right] = 0. \end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \frac{2}{h_i} \frac{dh_i}{d\mu'^2} &= - \frac{u_i^2}{u_i^2 \mu'^2 + v_i^2 \mu''^2} \\ \frac{2}{h_i} \frac{dh_i}{d\mu''^2} &= - \frac{v_i^2}{u_i^2 \mu'^2 + v_i^2 \mu''^2}; \end{aligned}$$

setzt man dies in die vorigen Gleichungen ein, berücksichtigt auch die Formel (29), so kommt man sogleich auf die (21).

Wir geben nunmehr als Beispiel die Berechnung einer Formel für das mittlere Fehlerquadrat der Schweizer Nivellements am Gotthard; vergl. „Nivellement de Précision de la Suisse“ 4. Lief.

Genf 1873. S. 272 u. f. Die Verfasser Hirsch und Plantamour stellen hier für 28 doppelt nivellierte Strecken die halben Differenzen der Unterschiede der Einzelresultate zusammen. Diese halben Differenzen, welche zugleich in erster Näherung den mittlern Fehler des arithmetischen Mittels repräsentiren) sind ausser von den gewöhnlichen Nivellementsfehlern noch von dem eingangs erwähnten Lattenfehler beeinflusst, da die Einzel-Resultate zu verschiedenen Zeiten erhalten wurden.

Bezeichnen nun in folgender Tabelle:

- * den halben Schlussfehler der Doppel-Nivellements,
- k die Länge der Strecke, also auch der Einzel-Nivellements, in Kilometern,
- h den Höhenunterschied zwischen zwei Höhenmarken 2. Classe, für welchen, da er meistens in $\frac{1}{2}$ Tag absolvirt wurde, die Lattenlänge im Durchschnitt gerade noch als constant angesehen werden konnte; und endlich

$[h^2]$ die Quadratsumme dieser h für eine Strecke, so kann man setzen (entsprechend Gl. (3)):

ϵ^2	k	$[h^2]$	ϵ^2	k	$[h^2]$
1.8	12.55	1860	4.0	2.39	368
3.8	1.77	1319	858.5	9.74	43576
2.4	7.00	1654	0.0	0.73	291
16.0	2.81	3614	179.6	12.67	62541
118.8	6.48	8622	70.6	4.95	9018
2.9	4.82	3981	132.3	6.07	1549
12.6	4.98	4117	11.9	1.06	255
14.8	11.84	10093	25.0	4.59	15844
10.6	3.06	558	119.9	6.89	6483
64.8	7.58	2430	17.6	4.46	10155
29.7	6.35	2190	9.0	9.16	1895
44.9	11.19	23108	128.8	17.18	6505
25.5	5.18	11401	20.3	4.23	364
1.4	6.07	26183	573.6	18.84	5774

$$(30) \quad \epsilon^2 = k \mu'^2 + [h^2] \mu''^2.$$

Nach den Rechnungen der Herren Verf. würde man erhalten:

$$(31) \quad \begin{cases} \mu'^2 = (3.033)^2 = 9.199 \\ \mu''^2 = (0.067)^2 = 0.0045 \end{cases}$$

Hiervon ausgehend legten wir den Gleichungen (30) Gewichte bei, wie folgt

$$(31)^* \quad g = \frac{1}{9.2 k + 0.0045 [h^2]}$$

und prüften zunächst, in wie weit den Gleichungen (21) und (21*) durch die Annahme (31) genügt wird. Diese Gleichungen schreiben sich mit der Abkürzung (31)* in nachstehender Form

$$(32) \quad \begin{cases} [k g] = [\epsilon^2 k g] \\ [[h^2] g] = [\epsilon^2 [hh] g] \\ [\epsilon^2 g] = n \end{cases}$$

oder numerisch in gleicher Reihenfolge:

$$\begin{cases} 2.15 = 1.34 \\ 1868 = 1247 \\ 17.86 = 28. \end{cases}$$

Es besteht also noch erhebliche Disharmonie. Die Normalgleichungen wurden nun wie folgt erhalten:

$$\begin{aligned} 0.180 \mu'^2 + 113 \mu''^2 &= 1.34 \\ 113 \mu'^2 + 188000 \mu''^2 &= 1250. \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$(33) \quad \begin{cases} 0.112 \mu'^2 = 0.59 \\ \mu'^2 = 5.3 \pm \sqrt{\frac{2}{0.112}} \\ 117000 \mu''^2 = 410 \\ \mu''^2 = 0.0035 \pm \sqrt{\frac{2}{117000}} \end{cases}$$

Jetzt wurden den Gleichungen (30) die Gewichte

$$(33)^* \quad g = \frac{1}{5.3 k + 0.0035 [hh]}$$

beigelegt und die Erfüllung der (32) geprüft. Es fand sich bezw.

$$\begin{cases} 3.44 = 3.455 \\ 2796 = 2732 \\ 27.88 = 28. \end{cases}$$

Der Widerspruch ist viel geringer, sodass man sich bei den (33) beruhigen kann. Da indessen die mittleren Fehler in der Auflösung (33) noch stark von der irrigen Gewichtshypothese (31)* beeinflusst sind, bildeten wir mittelst der (33)* nochmals Normalgleichungen. Diese wurden:

$$\begin{aligned} 0.4729 \mu'^2 + 266.0 \mu''^2 &= 3.455 \\ 266.0 \mu'^2 + 396800 \mu''^2 &= 2731.9.. \end{aligned}$$

Hieraus resultiren nun

$$(34) \quad \begin{cases} 0.2947 \mu'^2 = 1.624 \\ \mu'^2 = 5.50 \pm \sqrt{\frac{2}{0.2947}} \text{ d. i. } 2.60 \\ 247400 \mu''^2 = 7910 \\ \mu''^2 = 0.00320 \pm \sqrt{\frac{2}{247400}} \text{ d. i. } 0.00090. \end{cases}$$

Diese Werthe (ausgenommen die mittl. F.) unterscheiden sich von den (33) so wenig, dass man bei ihnen als Endresultaten stehen bleiben kann. Die Gleichungen (32) werden voraussichtlich durch die (34) noch besser als von den (33) erfüllt sein. Wir haben nur $[\epsilon^2 g]$ gerechnet und fanden mit den Gewichten

$$(35) \quad g = \frac{1}{5.50 k + 0.00320 [hh]}$$

für die 3. Gleichung (32)

$$28.07 = 28,$$

wobei man sich beruhigen kann.

Zur Anwendung der Formel (27) wurden weiter unter Annahme von (35) berechnet die Werthe

$$\left(\frac{w_1}{k \mu'^2 + [hh] \mu''^2} \right)^2 \text{ oder } \left(\frac{\epsilon^2}{g} - 1 \right)^2.$$

Damit fand sich als mittlerer Fehler der Gewichtseinheit, anstatt $\sqrt{2} = 1.41$, der Werth

$$\sqrt{\frac{45.2}{28-2}} \text{ d. i. } 1.32.$$

Auch diese Uebereinstimmung ist völlig ausreichend.

Vergleichen wir noch die Formel für das mittlere Fehlerquadrat eines Doppel-Niv. am Gotthard mit dem Niv. de Préc.

$$(31) \quad 9.2 k + 0.0045 [hh]$$

und die oben gefundene

$$(36) \quad (5.50 \pm 2.60) k + (0.00320 \pm 0.00090) [hh]$$

mit den anderweiten Untersuchungen der Verfasser (a. a. O. S. 271 u. 275), wonach in der Ebene aus 25 Schlüssen als m. F.-Quadrat folgte

$$3.2 k$$

und ferner der Coefficient von [hh] gleich

$$0.0024$$

zu setzen wäre, so ist nicht zu verkennen, dass die geringe Mühe der strengen Rechnung sich durch Erzielung besserer Uebereinstimmung der auf verschiedene Art erhaltenen Resultate reichlich belohnt.

Die Formel (36) gilt für ein Doppelnivellement, dessen Einzelresultate zu verschiedenen Zeiten abgeleitet sind. Für's Einzelnivellement würde sich insbesondere der Coefficient von [hh] auf 0.0064 erhöhen, was nach den Annahmen einer ca. halbtägigen Lattenveränderlichkeit von 0.08mm pro 1m entspricht. Wenn

diese Annahmen einigermaßen haltbar sein sollen, muss sich dies dadurch zeigen, dass die Werthe $\epsilon/\sqrt{g}$, also die auf gleiches Gewicht reducirten Nivellementsfehler, eine dem Gauss'schen Fehlergesetz entsprechende Vertheilung besitzen. Folgende Tafel giebt die Vertheilung;

Es liegen Fehler zwischen	Für die Werthe		Gauss' Gesetz *)
	$\frac{\epsilon}{\sqrt{k}}$	$\frac{\epsilon}{\sqrt{5.3 k + 0.0032 [hh]}}$	
Null und 0.2 m. F.	3	3	3.5
0.2 " 0.4 " "	3	4	4.2
0.4 " 0.6 " "	3	6	3.2
0.6 " 0.8 " "	4	3	3.6
0.8 " 1.0 " "	5	3	2.9
1.0 " 1.5 " "	5	6	5.1
1.5 " 2.0 " "	3	1	2.5
2.0 " 2.5 " "	1	2	1.1
2.5 " 4.0 " "	1	.	.
Die 2 grössten Fehler geben	2.2m F.	2.1 m. F.	.
	3.7 "	2.1 "	.

Die Vertheilung spricht zu Gunsten der gemachten Annahmen; es besteht namentlich für die grossen Fehler eine genügende Ueberstimmung. Noch entschiedener tritt das hervor, wenn man aus den $\epsilon/\sqrt{g}$ die Fehlercurve graphisch ableitet, sowie mir in der Zeitschrift f. Verm. Wesen 1876 Heft 1 es angegeben haben.

Wenn vorstehendes Beispiel in den zur Auflösung der Gleichungen (21) nothwendigen Annäherungen eine überaus starke Convergenz zeigte, könnte man dies für einen Zufall halten. In dieser Beziehung bemerken

zur Vergleichung ist auch diejenige Vertheilung mit angesetzt, welche die Fehler $\epsilon/\sqrt{g}$ zeigen, die man erhält, wenn man die Gewichte wie in der Ebene umgekehrt proportional den Längen k setzt. Man erhält:

wir, dass der Rechnungsgang auch bei einem anderen Beispiele gleich rasch zum Ziele führte, obgleich da nur 10 Fehler ϵ gegeben waren. Als erste Näherung diene bei denselben die Annahme $g = 1$.

Zum Schlusse ist noch mit einem Worte darauf hinzuweisen, dass die gegebenen Formeln ohne Mühe auf Formeln mit 3 und mehr Gliedern übertragen werden können.

Aachen, Febr. 1877.

Helmert.

Neue Sternwarte in Ungarn.

Se. Excellenz der Erzbischof Dr. Ludwig von Haynald hat sich entschlossen in seinem Wohnsitze Kalocsa in Ungarn ($L = \text{etwa } 36^\circ 32' \varphi = 46^\circ 31'$) an dem Jesuiten - Gymnasium - Gebäude eine Sternwarte auf seine eigenen Kosten zu erbauen. Die Sternwarte hat zur Aufgabe, dass die Patres Professores des Ordens Jesu, die für Mathematik und Astronomie sich heranbildeten, ihre Studien dort mit nützlichem Erfolge fortsetzen zu können in den Stand gesetzt werden; ferner dass bei den Studenten, welche etwa zur Astronomie Lust zeigen, das Sehen der Sternwarte die Lust weiter erregen soll.

Die Sternwarte wird aus 2 Drehthürmen, einem Meridian - Locale und einigen kleineren Gemächern

bestehen, die zur Aufbewahrung kleinerer seltener gebrauchten Instrumente, Arbeits-Zimmer, und Bibliothek dienen werden.

Vorläufig sind bestellt: ein Reflector von $10\frac{1}{4}''$ Oeffnung mit Uhrwerk und verschiedenen Micrometern bei John Browning in London. Ein Universal-Spectroscop mit 5 eventuell 10 Prismen von demselben Künstler.

Vorhanden ist ein schöner Refractor von $4''$ Oeffnung von G. & S. Merz in München, parallactisch montirt, mit verstellbarer Polhöhe.

Bestellt sind ferner ein Passagen-Instrument mit $27''$ Oeffnung bei T. Cooke & Sohn in York (England), ferner eine Pendeluhr von demselben Künstler, so auch

* Vergl. Verf.'s Ausgleichungsrechn. S. 268.