Eine Ableitung der Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern vom Standpunkte der Elektronentheorie.

Aus dem Nachlaß von

HERMANN MINKOWSKI

bearbeitet von MAX BORN in Göttingen.

Inhaltsübersicht.

	Seite
Einleitung	527
§ 1. Bezeichnungen	530
§ 2. Die Zerlegung der elektrischen Strömung	531
§ 3. Die Darstellung der variierten Strömung	532
§ 4. Die Reihenentwicklung der variierten Strömung	536
§ 5. Formale Herstellung der in der bewegten Materie gültigen Differentialgleichungen	538
§ 6. Ruhende Körper	539
§ 7. Der Leitungsstrom in bewegten Körpern	542
§ 8. Die dielektrische Polarisierung in bewegten Körpern	543
§ 9. Die Magnetisierung bewegter Körper	545
§ 10. Die allgemeine Beziehung zwischen den Vektoren Feldstärke und Erregung	547

Kurze Zeit vor seinem Tode hat mir Hermann Minkowski gesprächsweise den Grundgedanken der vorliegenden Arbeit mitgeteilt. Es handelt sich dabei um eine Ableitung der Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern, die sich nahe an den von H. A. Lorentz eingeschlagenen Weg*) anschließt; es sollen nämlich aus den im freien Äther geltenden Grundgleichungen die Gesetze für bewegte Körper dadurch hergeleitet werden, daß die Bewegungen der in der Materie eingebetteten Elektrizität (Elektronen) verfolgt werden. Minkowski behauptete damals, daß der von Lorentz eingeschlagene Weg, die Mittelwerte der von den Elektronen herrührenden Effekte zu bestimmen, mathematisch äquivalent sei einer Reihenentwicklung nach einem Parameter,

*) Vgl. H. A. Lorentz, Enzykl. der math. Wissensch. Bd. V 2, Art. 14, Abschnitt IV, Elektromagnetische Vorgänge in ponderablen Körpern, S. 200.

M. Abraham, Elektromagnetische Theorie der Strahlung, Leipzig 1908, 2. Aufl., 2. Abschnitt, Elektromagnetische Vorgänge in wägbaren Körpern, § 28, S. 238.

der die mittlere Verschiebung der Elektronen aus ihren Ruhelagen im Inneren der Materie mißt. Einige Tage später teilte er mir mit, daß das Glied 1. Ordnung in dieser Reihe in der Tat als dielektrische Polarisierung gedeutet werden könne; seiner Überzeugung nach müsse das Glied 2. Ordnung die Magnetisierung darstellen. Aus der Beschäftigung mit diesen Gedankengängen hat ihn der Tod herausgerissen.*)

Als mir von Herrn Hilbert die auf die Elektrodynamik bezüglichen Papiere Minkowskis anvertraut wurden, habe ich sogleich gesucht, ob darin auf den genannten Gegenstand bezügliche Aufzeichnungen vorhanden seien. Ich konnte aber nur wenige Anhaltspunkte finden; denn diese über hundert eng mit Formeln bedeckten Blätter enthalten kein einziges Wort des Textes oder der Erklärung der gebrauchten Zeichen. Erst als es mir gelungen war, die Minkowskischen Ideen gemäß seinen mündlichen Mitteilungen zu rekonstruieren, habe ich in seinen Aufzeichnungen Stellen gefunden, die mit den von mir gewonnenen Formeln identisch zu sein scheinen.

Aus diesen Gründen übergebe ich diese Arbeit unter Minkowskis Namen der Öffentlichkeit. In der Ausdrucksweise und den Bezeichnungen werde ich mich nach Möglichkeit Minkowskis Gebrauche anschließen, und ich verweise dieserhalb auf seine Abhandlung: *Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern.***)

Einleitung.

In der zitierten Abhandlung hat Minkowski die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern mit Hilfe der in § 8, S. 489, formulierten Axiome aufgestellt. Dabei werden die in der Tat wohl nicht mehr angefochtenen Grundgleichungen für ruhende Körper (§ 7, Gleichungen (I) bis (V), S. 488) als bekannt vorausgesetzt.

Dieser Standpunkt entspricht nicht den Absichten von H. A. Lorentz, der die Vorgänge in materiellen Körpern durch geeignete Hypothesen über Verschiebungen und Bewegungen der in die Materie eingelagerten Elektronen zu erklären sucht. Hierbei werden nicht die aus der Erfahrung

*) In seinem auf der 80. Naturforscher-Versammlung zu Köln gehaltenen Vortrage „Raum und Zeit“ (Phys. Zeitschrift 10, S. 104, 1909, und Jahresber. d. deutschen Math.-Ver. 18, S. 75; auch als Sonderabdruck erschienen, Leipzig, B. G. Teubner 1909) hat Minkowski auf die Möglichkeit einer solchen elektronentheoretischen Ableitung der Grundgleichungen hingewiesen und eine Veröffentlichung darüber in Aussicht gestellt.

**) Vorstehend abgedruckt aus den Nachr. der K. Gesellsch. der Wissensch. zu Göttingen, Math. phys. Kl. S. 52, 1908. (Im folgenden zitiert als „Grundgleichungen“; die Seitenzahlen der Zitate beziehen sich auf vorstehenden Abdruck.)

induktiv gewonnenen Maxwell-Hertzschen Grundgleichungen für ruhende materielle Körper, sondern die für den reinen Äther von Lorentz hypothetisch angenommenen Gesetze, die eine Art Idealisierung der Maxwell'schen Gleichungen sind, als Ausgangspunkt gewählt. Diese Gesetze verknüpfen die Vektoren *elektrische Feldstärke* $\mathfrak{E}$ und *magnetische Erregung des reinen Äthers* $\mathfrak{M}^*$) mit dem Konvektionsstrom der Elektrizität; ist $\tilde{\varrho}$ die *Raumdicke* und $\tilde{\mathfrak{w}}$ der Raumvektor *Geschwindigkeit der Elektrizität* (der Elektronen), so lauten die Grundgleichungen für den Äther:

$$(I) \quad \text{curl } \mathfrak{M} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \frac{1}{c} \tilde{\varrho} \tilde{\mathfrak{w}},$$

$$(II) \quad \text{div } \mathfrak{E} = \tilde{\varrho},$$

$$(III) \quad \text{curl } \mathfrak{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} = 0,$$

$$(IV) \quad \text{div } \mathfrak{M} = 0.$$

Dabei ist irgendein Bezugssystem rechtwinkliger Koordinaten x, y, z und der Zeit t angenommen; die Lichtgeschwindigkeit im leeren Raume ist mit c bezeichnet.**)

Lorentz teilt nun die Elektronen, deren Ladungen und Bewegungen in den rechten Seiten der Gleichungen (I), (II) auftreten, in mehrere Gruppen ein. Die erste Gruppe bilden die *Leitungselektronen*, die sich wesentlich unabhängig von der Materie durch diese hindurch bewegen; sie konstituieren den „Leitungsstrom“ und ihre Ladungen bilden die „wahre Elektrizität“. Die zweite Gruppe bilden die *Polarisationselektronen*, die Gleichgewichtslagen im Inneren der materiellen Moleküle besitzen, aus denen sie durch die Einwirkung des elektromagnetischen Feldes verschoben werden können; die dadurch abgeänderte Dichte der Elektrizität wird als die der „freien Elektrizität“ bezeichnet. Die dritte Gruppe sind die *Magnetisierungselektronen*, die Umlaufbewegungen um Zentra innerhalb der Materie ausführen und, analog den Ampèreschen molekularen Kreisströmen, zu den Erscheinungen der Magnetisierung Anlaß geben. Indem nun Lorentz die Mittelwerte der Anteile des Konvektionsstromes, die von den drei Arten der Elektronen herrühren, in geeigneter Weise umformt, gelangt er zu seinen Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vor-

*) In Übereinstimmung mit H. A. Lorentz haben wir die den Zustand des Äthers charakterisierenden Vektoren in dieser Weise zu bezeichnen, um sie nachher in den Grundgleichungen für materielle Körper richtig deuten zu können; daraus entspringt die Abweichung der hier gebrauchten Bezeichnung von der Minkowskis in § 2 der zitierten Arbeit.

**) Um den Vergleich mit der Lorentz'schen Theorie zu erleichtern, habe ich es vermieden, $c=1$ zu setzen; durch den Gebrauch der Minkowskischen Indizesbezeichnung wird die Rechnung durch das Mitführen von c nicht belastet.

gänge in den materiellen Körpern. Wie Minkowski*) gezeigt hat, sind diese Gleichungen für bewegte Körper nicht mit dem Relativitätspostulat vereinbar; und die Gleichungen, die Lorentz speziell für nichtmagnetisierte Körper angibt, sind es nur approximativ, was aber seinerseits nur durch zwei sich kompensierende Widersprüche gegen das Relativitätsprinzip zustande kommt**).

Indem wir uns die Aufgabe stellen, die Grundgleichungen für bewegte Körper allgemein auch unter Zulassung der Magnetisierung aus den Grundgleichungen im Äther abzuleiten***), bemerken wir zuerst, daß von der charakteristischen Hypothese der Elektronentheorie, der atomistischen Struktur der Elektrizität, bei der Lorentzschen Ableitung nur ein sehr beschränkter Gebrauch gemacht wird; denn durch die Mittelwertbildung über „physikalisch unendlich kleine“ Bereiche wird diese Struktur vollständig verwischt, und die Mittelwerte, auf die es allein ankommt, werden als stetige Funktionen des Ortes und der Zeit angesehen.

Wir verzichten daher überhaupt darauf, auf die feinere Struktur der Elektrizität einzugehen. Von den Lorentzschen Vorstellungen benutzen wir nur soviel, daß wir annehmen, die *Elektrizität sei ein Kontinuum, das die Materie überall durchdringt, zum Teil sich frei innerhalb derselben bewegen kann, zum Teil aber an diese gefesselt ist und nur sehr kleine Bewegungen relativ zu ihr ausführen kann.*

Will man näheren Anschluß an Lorentz erreichen, so kann man alle im folgenden vorkommenden Größen als jene Lorentzschen Mittelwerte ansehen; es ist dann aber hier nicht nötig, sie als solche durch besondere Zeichen von den auf die einzelnen Elektronen bezogenen Größen zu unterscheiden, weil wir von den letzteren nirgends Gebrauch machen.

Um von vornherein sicher zu sein, daß alle Formeln mit dem Relativitätspostulate in Übereinstimmung sind, genügt es, bei der mathematischen

*) Grundgleichungen, Einleitung, S. 474. Vgl. auch S. 549 vorliegender Arbeit.

**) Letzteren Mangel hat Herr Ph. Frank (Ann. d. Phys. (4), 27, 1908, S. 1059) beseitigt, indem er, dem Lorentzschen Gedankengange sonst im wesentlichen folgend, die dem Relativitätspostulate äquivalente Kontraktionshypothese an einer früheren Stelle einführt, als es bei Lorentz geschieht.

***) Herr M. Abraham weist in der zweiten Auflage seines Buches „Elektromagnetische Theorie der Strahlung“ in § 50, S. 396, auf die Möglichkeit hin, daß in der Elektrodynamik bewegter ponderabler Körper das Relativitätsprinzip gelte, während es in der Dynamik der freien Elektronen (Kathoden, Becquerelstrahlen) nicht zuträfe. Diese Ansicht wird wohl durch die neuesten Versuchsergebnisse nicht gestützt. Vorliegende Ableitung der Grundgleichungen für bewegte Körper aus den für freie Elektronen geltenden Gesetzen setzt, ganz im Sinne Minkowskis, die allgemeine Gültigkeit des Prinzips auch für die letzteren voraus.

Fomulierung der soeben ausgesprochenen Grundannahme die von Minkowski eingeführte vierdimensionale Vektorrechnung und die von ihm statuierten Symmetrien, vor allem die der Raumkoordinaten x, y, z und der mit ci multiplizierten Zeit t , in den Vordergrund zu rücken. Dadurch wird die Kovarianz der Formeln gegenüber Lorentz-Transformationen in Evidenz gesetzt.

Ferner setzen wir voraus, daß alle vorkommenden Geschwindigkeiten kleiner als die Lichtgeschwindigkeit sind.

§ 1.

Bezeichnungen.

Nach Minkowski ersetzen wir:

$$x, y, z, ict$$

durch

$$x_1, x_2, x_3, x_4.$$

Mit w bezeichnen wir den Raumvektor *Geschwindigkeit der Materie* mit den Komponenten

$$w_x, w_y, w_z.$$

Aus diesen bilden wir den Raum-Zeit-Vektor I. Art w mit den Komponenten:

$$w_1 = \frac{w_x}{c\sqrt{1 - \frac{|w|^2}{c^2}}}, \quad w_2 = \frac{w_y}{c\sqrt{1 - \frac{|w|^2}{c^2}}}, \quad w_3 = \frac{w_z}{c\sqrt{1 - \frac{|w|^2}{c^2}}}, \quad w_4 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{|w|^2}{c^2}}},$$

wobei $|w| = \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2}$ den Betrag der Geschwindigkeit bedeutet. Die Größen w_α erfüllen die Relation:

$$w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + w_4^2 = -1.$$

Die *Geschwindigkeit der Elektrizität* haben wir in (I) bis (IV) mit $\tilde{w}$ bezeichnet; zu diesem Raumvektor ordnen wir in analoger Weise einen Raum-Zeit-Vektor I. Art $\tilde{w}$ zu.

Aus der Dichte $\tilde{\rho}$ der Elektrizität bilden wir die gegenüber Lorentz-Transformationen invariante *Ruh-Dichte*:

$$\tilde{\rho}_0 = \tilde{\rho} \sqrt{1 - \frac{|\tilde{w}|^2}{c^2}}.$$

Die Raumvektoren magnetische Erregung $\mathfrak{M}$ und elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}$ fassen wir zu dem Raum-Zeit-Vektor II. Art F zusammen, indem wir

$$\mathfrak{M}_x, \mathfrak{M}_y, \mathfrak{M}_z, -i\mathfrak{E}_x, -i\mathfrak{E}_y, -i\mathfrak{E}_z$$

durch

$$F_{23}, F_{31}, F_{12}, F_{14}, F_{24}, F_{34}$$

ersetzen.

Mit Hilfe des Minkowskischen Differentialoperators lor , der als der Raum-Zeit-Vektor I. Art

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial x_4} \right|$$

definiert ist, können wir dann die Grundgleichungen (I) bis (IV) in folgende symbolische Gleichungen zusammenfassen:

$$(A) \quad \text{lor } F = -\tilde{\varrho}_0 \tilde{w},$$

$$(B) \quad \text{lor } F^* = 0.$$

§ 2.

Die Zerlegung der elektrischen Strömung.

Die Strömung der Elektrizität, die durch den Raum-Zeit-Vektor $\tilde{w}$ und die Ruh-Dichte $\tilde{\varrho}_0$ charakterisiert ist, denken wir uns aus zwei sich superponierenden Teilen zusammengesetzt.

Der 1. Teil, der aus den Lorentzschen „Leitungselektronen“ gebildet zu denken ist, habe die Ruh-Dichte $\varrho_0^{(l)}$ und der zugehörige Raum-Zeit-Vektor Geschwindigkeit sei mit $w^{(l)}$ bezeichnet. Überhaupt werden alle auf diesen Stromanteil bezüglichen Größen durch den oberen Index l gekennzeichnet. Dieser Teil des Konvektionsstromes bewege sich unabhängig von der Bewegung der Materie innerhalb derselben. Er wird zur Entstehung des Leitungsstroms Veranlassung geben.

Der 2. Teil der Strömung, der von den Lorentzschen Polarisations- und Magnetisierungselektronen gebildet ist, soll im wesentlichen der Bahn der Materie folgen und nur wenig von ihr abweichen, und zwar soll folgendes statthaben:

Von den in den materiellen neutralen Punkten vereinigten und sich dort kompensierenden Elektrizitätsmengen sei ein Quantum aus dieser Ruhelage verschoben und führe sowohl Bewegungen relativ zur Materie aus, als auch werde es von dieser mitgeführt.

Um diese Annahme zu formulieren, denken wir uns vorläufig (indem wir die das Relativitätsprinzip berücksichtigende nähere Bestimmung dieser Verschiebung für § 3 vorbehalten) sowohl die Ruh-Dichte, als auch die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors dieses Stromanteils außer von x, y, z, t noch abhängig von einem Parameter ϑ derart, daß für $\vartheta = 0$ die Ruh-Dichte verschwindet und die Geschwindigkeitskomponenten in die entsprechenden der Materie übergehen. Wegen der vorausgesetzten Kleinheit der Abweichungen werden wir nach Potenzen von ϑ entwickeln können; bezeichnen wir die Differentiation nach ϑ bei festen x, y, z, t mit δ , so wird man für diesen zweiten Teil des Konvektionsstromes

$$\vartheta \cdot \delta(\varrho_0 w) + \frac{\vartheta^2}{2} \delta\delta(\varrho_0 w) + \dots$$

schreiben können. Die gesamte Strömung der Elektrizität ist demnach:

$$(1) \quad \tilde{\rho}_0 \tilde{w} = \rho_0^{(1)} w^{(1)} + \vartheta \delta(\rho_0 w) + \frac{\vartheta^2}{2} \delta \delta(\rho_0 w) + \dots$$

Die Glieder dieser Reihe werden wir einzeln betrachten und zeigen, daß das erste Glied, das von ϑ frei ist, den von Minkowski mit s bezeichneten Stromvektor bildet, der den Leitungsstrom und den an der Materie haftenden Konvektionsstrom der Elektrizität darstellt, daß das zweite Glied mit dem Faktor ϑ als der Hauptteil der dielektrischen Polarisation der Materie zu deuten ist und das dritte Glied mit ϑ^2 einerseits zu dieser Polarisation noch einen Beitrag liefert, andererseits als Magnetisierung der Materie aufgefaßt werden muß.

Die Frage nach der Bedeutung der höheren Glieder der Reihe (1) fällt aus dem Rahmen der vorliegenden Untersuchung heraus. Bedenkt man, daß bereits die Magnetisierbarkeit bei den meisten Substanzen äußerst gering ist, derart, daß schon das in ϑ quadratische Glied der Reihe (1) einen kleinen numerischen Wert bekommt, so wird man annehmen können, daß der Einfluß der höheren Glieder auf die Beobachtungen bei den meisten Substanzen unmerklich ist, sofern ihnen überhaupt eine physikalische Bedeutung zukommt. Die Eigenschaften der stark magnetisierbaren (ferromagnetischen) Körper sind aber überhaupt noch zu wenig aufgeklärt, als daß man von ihnen aus für eine so weitgehende Theorie experimentelle Stützen erwarten dürfte.

§ 3.

Die Darstellung der variierten Strömung.

Den im vorigen Paragraphen betrachteten zweiten Teil der Strömung kann man analytisch als eine „Variation“ der Strömung der Materie ansehen.*) Um diese näher zu charakterisieren, stellen wir diesen Anteil des Konvektionsstroms analog der nach Lagrange bezeichneten Weise dadurch dar, daß wir x, y, z und t als Funktionen dreier Parameter, ξ, η, ζ , welche die einzelnen materiellen Teilchen individualisieren, und der Eigenzeit τ ansehen; außerdem mögen diese vier Funktionen noch von einem Parameter ϑ derart abhängen, daß sie für $\vartheta = 0$ die Bewegung der Materie darstellen; wir schreiben also

$$(2) \quad \begin{aligned} x &= x(\xi, \eta, \zeta, \tau; \vartheta), \\ y &= y(\xi, \eta, \zeta, \tau; \vartheta), \\ z &= z(\xi, \eta, \zeta, \tau; \vartheta), \\ t &= t(\xi, \eta, \zeta, \tau; \vartheta), \end{aligned}$$

*) Diese Variation ist nicht unähnlich der virtuellen Verschiebung, die Minkowski im Anhang der zitierten Arbeit zur Ableitung der Grundgleichungen der Mechanik benutzt.

wobei identisch in allen 5 Argumenten die Bedingung

$$(3) \quad \left(\frac{\partial x}{\partial \tau}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \tau}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \tau}\right)^2 - c^2 \left(\frac{\partial t}{\partial \tau}\right)^2 = -c^2$$

erfüllt sein möge. Die Geschwindigkeitskomponenten der Materie sind

$$w_1 = \frac{1}{c} \left(\frac{\partial x}{\partial \tau}\right)_{\vartheta=0}, \quad w_2 = \frac{1}{c} \left(\frac{\partial y}{\partial \tau}\right)_{\vartheta=0}, \\ w_3 = \frac{1}{c} \left(\frac{\partial z}{\partial \tau}\right)_{\vartheta=0}, \quad w_4 = i \left(\frac{\partial t}{\partial \tau}\right)_{\vartheta=0}.$$

Ersetzen wir

$$\xi, \eta, \zeta, i c \tau$$

durch

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4,$$

so können wir kurz schreiben:

$$(2') \quad x_\alpha = x_\alpha(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4; \vartheta), \quad (\alpha = 1, 2, 3, 4),$$

$$(3') \quad \sum_{\alpha=1}^4 \left(\frac{\partial x_\alpha}{\partial \xi_4}\right)^2 = -1.$$

Wir wollen für die häufig vorkommenden Differentiationsprozesse folgende Abkürzungen gebrauchen. Eine Funktion φ von $x_1, x_2, x_3, x_4, \vartheta$ kann man vermöge der Transformation (2') auch als Funktion von $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \vartheta$ ansehen. Wir bezeichnen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_4} \text{ bei festgehaltenen } \xi_1, \xi_2, \xi_3, \vartheta \text{ mit } \varphi',$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \quad " \quad " \quad \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 \text{ mit } \dot{\varphi},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \quad " \quad " \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \text{ mit } \delta \varphi.$$

Die Operationen $\varphi', \dot{\varphi}$ sind also vertauschbar; die Operation $\delta \varphi$ ist aber mit keiner der beiden ersten vertauschbar.

Die Ruh-Dichte ϱ_0 der Elektrizität wird ebenfalls eine Funktion der ξ_α und ϑ sein:

$$\varrho_0 = \varrho_0(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4; \vartheta).$$

Da wir voraussetzen, daß die Materie vor der Verrückung, d. h. für $\vartheta = 0$, elektrisch neutral sei, müssen wir annehmen, daß

$$\varrho_0(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4; 0) = 0$$

sei.

Dagegen setzen wir voraus, daß die Größen

$$\varrho_0 \dot{x}_1, \varrho_0 \dot{x}_2, \varrho_0 \dot{x}_3, \varrho_0 \dot{x}_4$$

sowie ihre Ableitungen nach ϑ bei festgehaltenen x_1, x_2, x_3, x_4 für $\vartheta = 0$ endliche, nicht identisch verschwindende Grenzwerte besitzen.

Daß dies mit den über die x_α und ϱ_0 gemachten Annahmen verträglich ist, zeigt z. B. der Ansatz

$$x_\alpha = f_\alpha(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) + \vartheta^{\frac{1}{2}} \varphi_\alpha(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4),$$

$$\varrho_0 = \vartheta^{\frac{1}{2}} \psi(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4);$$

hier stellt

$$x_\alpha = f_\alpha(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$$

die Strömung der Materie dar, ϱ_0 verschwindet für $\vartheta = 0$; es bleibt aber

$$\varrho_0 \dot{x}_\alpha = \frac{1}{2} \varphi_\alpha \cdot \psi$$

endlich und von Null verschieden.

Der Sinn dieser Forderung ist der:

Es soll durch die Verschiebung der Ladungen aus ihrer Ruhelage jedes neutrale Teilchen der Materie in ein geladenes System (im einfachsten Falle in einen Dipol) verwandelt werden; im Sinne der Elektronentheorie werden die Größen $\varrho_0 \dot{x}_\alpha$ die „elektrischen Momente“ der Teilchen bestimmen; in der Tat werden wir diesen Umstand im folgenden klar erkennen. Daher müssen wir diesen Produkten für $\vartheta = 0$ einen endlichen Grenzwert zuschreiben. Man kann das auch so ausdrücken, daß unsere Variation der Strömung eine Art „räumlicher Doppelbelegung“ der Materie ist. Die Funktionen x_α sind infolge dieses Umstandes bei $\vartheta = 0$ nicht in Potenzreihen entwickelbar; wohl ist dieses aber, wie wir sehen werden, mit den Komponenten des Konvektionsstroms $i\varphi_0 \dot{x}'_\alpha$ der Fall, auf die es allein ankommt; hier bedeuten die vier Größen $i\dot{x}'_\alpha$ die Komponenten des Raum-Zeit-Vektors Geschwindigkeit; sie gehen für $\vartheta = 0$ in die Komponenten w_α der Geschwindigkeit der Materie über.

Der Unzerstörbarkeit der Elektrizität tragen wir dadurch Rechnung, daß wir die „Kontinuitätsbedingung“

$$(4) \quad \frac{\partial \varrho_0 x'}{\partial x} + \frac{\partial \varrho_0 y'}{\partial y} + \frac{\partial \varrho_0 z'}{\partial z} + \frac{\partial \varrho_0 t'}{\partial t} = 0$$

oder kurz

$$(4') \quad \sum_{\alpha=1}^4 \frac{\partial \varrho_0 x'_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0$$

identisch in den x_α und ϑ erfüllt annehmen.

Wir müssen noch eine weitere Voraussetzung über die Größen $\dot{x}_\alpha$ machen, die die Verschiebung des elektrischen Teilchens aus seiner Ruhelage bestimmen. Wir nehmen an, daß die Verschiebung jedes elektrischen Teilchens in einem Bezugssysteme, in dem das zu denselben Werten ξ, η, ζ gehörige materielle Teilchen ruht, durch einen Raumvektor (d. h. einen

Raum-Zeit-Vektor I. Art mit verschwindender Zeitkomponente) *dargestellt wird*.

Das läuft darauf heraus, daß die Raum-Zeit-Vektoren I. Art $\dot{x}$ und w normal sind (vgl. Minkowski, „Grundgleichungen“, § 11, 6°, S. 499):

$$(5) \quad \sum_{\alpha=1}^4 w_{\alpha} \dot{x}_{\alpha} = 0.$$

Demnach hat die Variation der Zeit $\dot{t}$ die Bedeutung des folgenden skalaren Produkts

$$(5') \quad \dot{t} = \frac{1}{c^2} (w_x \dot{x} + w_y \dot{y} + w_z \dot{z}).$$

Aus (5) ergibt sich speziell durch Multiplikation mit ϱ_0 und Differentiation nach ϑ bei festgehaltenen x, y, z, t :

$$(6) \quad \sum_{\alpha=1}^4 w_{\alpha} \delta(\varrho_0 \dot{x}_{\alpha}) = 0$$

oder

$$(6') \quad \delta(\varrho_0 \dot{t}) = \frac{1}{c^2} (w_x \delta(\varrho_0 \dot{x}) + w_y \delta(\varrho_0 \dot{y}) + w_z \delta(\varrho_0 \dot{z})).$$

Eine weitere Normalitätsbedingung erhält man, wenn man die Identität (3) bzw. (3') nach ϑ bei festen x, y, z, t differenziert:

$$(7) \quad \sum_{\alpha=1}^4 x'_{\alpha} \delta x'_{\alpha} = 0.$$

Geht man hier zur Grenze $\vartheta = 0$ über, so kommt:

$$(7') \quad \sum_{\alpha=1}^4 w_{\alpha} \delta w_{\alpha} = 0.$$

Dabei haben die δw_{α} die folgende Bedeutung:

$$(8) \quad \begin{aligned} \delta w_1 &= \delta \left(\frac{w_x}{c \sqrt{1 - \frac{|w|^2}{c^2}}} \right) = i [\delta x_1]_{\vartheta=0}, \text{ usf.} \\ \delta w_4 &= \delta \left(\frac{i}{\sqrt{1 - \frac{|w|^2}{c^2}}} \right) = i [\delta x_4']_{\vartheta=0}. \end{aligned}$$

Endlich betrachten wir die *Variation der Ruh-Dichte* ϱ_0 . Diese soll nicht unabhängig variieren, sondern so, daß ihre Ableitung nach ϑ an einer Stelle x, y, z, t mit dem elektrischen Momente $\varrho_0 \dot{x}$ an dieser Stelle durch die Identität in den x_{α} und ϑ

$$(9) \quad \frac{\partial \varrho_0 \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \varrho_0 \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \varrho_0 \dot{z}}{\partial z} + \frac{\partial \varrho_0 \dot{t}}{\partial t} = - \delta \varrho_0$$

oder

$$(9') \quad \sum_{\alpha=1}^4 \frac{\partial \varrho_0 \dot{x}_\alpha}{\partial x_\alpha} = - \delta \varrho_0$$

verbunden ist.

Die Bedeutung dieser Gleichung ist die folgende: Wir nahmen an, daß das verschobene Quantum Elektrizität vor der Verschiebung durch die gleiche Menge entgegengesetzter Elektrizität kompensiert wurde; daher ist die linke Seite von Gleichung (9) nicht Null, was bedeuten würde, daß die Abnahme der in einem Volumen befindlichen Elektrizitätsmenge bei der Verschiebung gleich der durch die Begrenzung des Volumens tretenden Menge ist; vielmehr tritt bei der Verschiebung jene vorher kompensierte Ladung des entgegengesetzten Vorzeichens zutage, und das ist eben in erster Näherung die bei festgehaltenen x, y, z, t genommene Ableitung $-\delta \varrho_0$. Die spezielle Form obigen Ansatzes wird durch die vom Relativitätsprinzip geforderte Symmetrie gerechtfertigt.

§ 4.

Die Reihenentwicklung der variierten Strömung.

Unsere Aufgabe ist es, die Größen $\varrho_0 x'_\alpha$ in jedem Raum-Zeitpunkte, d. h. bei festgehaltenen x_α , in eine Potenzreihe nach ϑ zu entwickeln; gemäß der Bedeutung des Symbols δ haben wir also:

$$(10) \quad \varrho_0 x'_\alpha = \vartheta \delta(\varrho_0 x'_\alpha)_0 + \frac{\vartheta^2}{2} \delta^2(\varrho_0 x'_\alpha)_0 + \dots,$$

wo in den Koeffizienten $\vartheta = 0$ zu setzen ist.

Es ist

$$\delta(\varrho_0 x'_\alpha) = \varrho_0 \delta x'_\alpha + x'_\alpha \delta \varrho_0.$$

Wir wollen die Operation δ durch den mit dem Punkte bezeichneten „substantiellen“ Differentialquotienten ersetzen. Dazu sehen wir x'_α als Funktion der x_α und ϑ an, wobei die x_α ihrerseits Funktionen der ξ_α und ϑ sind:

$$x'_\alpha = x'_\alpha(x_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4; \vartheta), \dots, x_4(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4; \vartheta); \vartheta).$$

Dann ergibt sich durch Differentiation nach ϑ bei festen ξ_α :

$$(\alpha) \quad \dot{x}'_\alpha = \sum_{\beta=1}^4 \frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\beta} \dot{x}_\beta + \delta x'_\alpha.$$

Andererseits bilden wir dieselbe Größe $\dot{x}'_\alpha$, indem wir zuerst die mit dem Punkte, dann die mit dem Striche bezeichnete Operation vornehmen; sehen wir also $\dot{x}_\alpha$ als Funktion der x_α und ϑ an und die x_α ihrerseits als Funktionen der ξ_α und ϑ :

$$\dot{x}_\alpha = \dot{x}_\alpha(x_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4; \vartheta), \dots, x_4(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4; \vartheta); \vartheta),$$

so folgt durch Differentiation nach ξ_4 bei festen $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \vartheta$:

$$(\beta) \quad \dot{x}'_\alpha = \sum_{\beta=1}^4 \frac{\partial \dot{x}_\alpha}{\partial x_\beta} x'_\beta.$$

Aus den Gleichungen (α), (β) finden wir:

$$(\gamma) \quad \delta x'_\alpha = \sum_{\beta=1}^4 \left(\frac{\partial \dot{x}_\alpha}{\partial x_\beta} x'_\beta - \frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\beta} \dot{x}_\beta \right).$$

Um $\delta(\varrho_0 x'_\alpha)$ zu erhalten, haben wir dies mit ϱ_0 zu multiplizieren und die mit x'_α multiplizierte Gleichung (9') hinzuzufügen; wir addieren außerdem noch die mit $\dot{x}_\alpha$ multiplizierte Kontinuitätsgleichung (4'), so daß wir schließlich erhalten:

$$\delta(\varrho_0 x'_\alpha) = \sum_{\beta=1}^4 \left(\frac{\partial \dot{x}_\alpha}{\partial x_\beta} \varrho_0 x'_\beta - \frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\beta} \varrho_0 \dot{x}_\beta - \frac{\partial \varrho_0 \dot{x}_\beta}{\partial x_\beta} x'_\alpha + \frac{\partial \varrho_0 x'_\beta}{\partial x_\beta} \dot{x}_\alpha \right)$$

oder

$$(11) \quad \delta(\varrho_0 x'_\alpha) = \sum_{\beta=1}^4 \frac{\partial}{\partial x_\beta} (\varrho_0 \dot{x}_\alpha \cdot x'_\beta - \varrho_0 \dot{x}_\beta \cdot x'_\alpha).$$

Diese Gleichung gilt identisch in den x_α und ϑ . Wenn wir sie nochmals nach ϑ bei festen x_α differenzieren, können wir diese Operation unter den in der Summe vorkommenden Differentiationszeichen nach x_β ausführen. Daher wird:

$$(12) \quad \delta \delta(\varrho_0 x'_\alpha) = \sum_{\beta=1}^4 \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left\{ [\delta(\varrho_0 \dot{x}_\alpha) \cdot x'_\beta - \delta(\varrho_0 \dot{x}_\beta) \cdot x'_\alpha] + [\varrho_0 \dot{x}_\alpha \delta x'_\beta - \varrho_0 \dot{x}_\beta \delta x'_\alpha] \right\}.$$

Jetzt können wir die Reihe (10) in folgende Gestalt setzen:

$$(13) \quad \varrho_0 x'_\alpha = \sum_{\beta=1}^4 \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left\{ \left[\vartheta \varrho_0 \dot{x}_\alpha + \frac{\vartheta^2}{2} \delta(\varrho_0 \dot{x}_\alpha) \right] x'_\beta - \left[\vartheta \varrho_0 \dot{x}_\beta + \frac{\vartheta^2}{2} \delta(\varrho_0 \dot{x}_\beta) \right] x'_\alpha \right\} \\ + \sum_{\beta=1}^4 \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left\{ \frac{\vartheta^3}{2} \varrho_0 \dot{x}_\alpha \delta x'_\beta - \frac{\vartheta^3}{2} \varrho_0 \dot{x}_\beta \delta x'_\alpha \right\} + \dots,$$

wobei in den Faktoren von $\vartheta, \vartheta^2, \dots$ überall $\vartheta = 0$ zu setzen ist; dabei haben die Größen $\varrho_0 \dot{x}_\alpha, \delta(\varrho_0 \dot{x}_\alpha)$ endliche, nicht identisch verschwindende Grenzwerte. Gemäß Verabredung brechen wir die Reihe mit den hingeschriebenen Gliedern ab.

§ 5.

Formale Herstellung der in der bewegten Materie gültigen Differentialgleichungen.

Wir setzen zur Abkürzung:

$$(14) \quad \vartheta(\varrho_0 \dot{x}_\alpha)_{\vartheta=0} + \frac{\vartheta^2}{2} \delta(\varrho_0 \dot{x}_\alpha)_{\vartheta=0} = p_\alpha,$$

ferner, indem wir uns erinnern, daß

$$i(x'_\alpha)_{\vartheta=0} = w_\alpha, \quad i(\delta x'_\alpha)_{\vartheta=0} = \delta w_\alpha$$

ist:

$$(15) \quad w_\alpha p_\beta - w_\beta p_\alpha = P_{\alpha\beta},$$

$$(16) \quad \frac{\vartheta^2}{2} \{ \delta w_\alpha (\varrho_0 \dot{x}_\beta)_0 - \delta w_\beta (\varrho_0 \dot{x}_\alpha)_0 \} = Q_{\alpha\beta}.$$

Diese Größen sind die Komponenten der aus den Vektoren erster Art w, p bzw. $\delta w, \frac{\vartheta^2}{2} (\varrho_0 \dot{x})_0$ durch „vektorielle“ Multiplikation gebildeten Raum-Zeit-Vektoren II. Art:

$$(15') \quad [w, p] = P,$$

$$(16') \quad \frac{\vartheta^2}{2} [\delta w, (\varrho_0 \dot{x})_0] = Q.$$

Jetzt fügen wir den Ausdruck (10) zu $\varrho_0^{(i)} w^{(i)}$ hinzu und können, wenn wir noch

$$(17) \quad \varrho_0^{(i)} w_\alpha^{(i)} = s_\alpha$$

setzen, die Komponenten des gesamten Konvektionsstromes (1) in folgender Weise schreiben:

$$(18) \quad \tilde{\varrho}_0 \tilde{w}_\alpha = s_\alpha - \sum_{\beta=1}^4 \frac{\partial}{\partial x_\beta} (P_{\alpha\beta} + Q_{\alpha\beta}),$$

oder in der Minkowskischen Symbolik:

$$(18') \quad \tilde{\varrho}_0 \tilde{w} = s + \text{lor}(P + Q).$$

Setzen wir das in die Grundgleichung (A) ein, so geht diese über in

$$(19) \quad \text{lor}(F + P + Q) = -s.$$

Führen wir den Raum-Zeit-Vektor II. Art

$$(20) \quad f = F + P + Q$$

ein, so können wir den Grundgleichungen die Gestalt geben:

$$\{A\} \quad \text{lor } f = -s,$$

$$\{B\} \quad \text{lor } F^* = 0.$$

Damit haben wir formal die in der bewegten Materie geltenden Differentialgleichungen gewonnen (siehe Minkowski, Grundgleichungen, § 12, Formeln {A}, {B}, Seite 505).

Ersetzen wir

$$\text{durch} \quad f_{23}, f_{31}, f_{12}, f_{14}, f_{24}, f_{34}$$

$$\text{und} \quad m_x, m_y, m_z, -ie_x, -ie_y, -ie_z,$$

$$\text{durch} \quad s_1, s_2, s_3, s_4$$

$$\frac{1}{c} \mathfrak{s}_x, \frac{1}{c} \mathfrak{s}_y, \frac{1}{c} \mathfrak{s}_z, i\varrho$$

und fassen die hier vorkommenden Größen bzw. zu den Raumvektoren $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{s}$ zusammen, so können wir den Gleichungen {A}, {B} die reelle Gestalt geben:

$$(I') \quad \text{curl } \mathfrak{m} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{e}}{\partial t} = \frac{1}{c} \mathfrak{s},$$

$$(II') \quad \text{div } \mathfrak{e} = \varrho,$$

$$(III') \quad \text{curl } \mathfrak{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} = 0,$$

$$(IV') \quad \text{div } \mathfrak{M} = 0.$$

Das sind die in ruhenden oder bewegten Körpern geltenden Differentialgleichungen, wenn die Vektoren $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{s}$ bzw. als die magnetische Feldstärke, die dielektrische Erregung, der Strom und die Größe ϱ als die Dichte der Elektrizität gedeutet werden dürfen. Es wird unsere Aufgabe sein, aus den Definitionsgleichungen (15), (16), (17), (20) diese Bedeutung herauszulesen; die letzteren Gleichungen müssen ferner die Beziehungen enthalten, welche die beiden Vektoren „Erregung“ mit den beiden Vektoren „Feldstärke“ verbinden und in welche die Materialeigenschaften eingehen. Allerdings werden wir sehen, daß, genau wie bei Lorentz, diese Beziehungen hier viel allgemeiner sind als die von Minkowski behandelten, der sich auf isotrope, dispersionsfreie Körper beschränkte; unsere Gleichungen können durch geeignete Zusatzhypothesen den mannigfaltigen Eigenschaften der Substanzen angepaßt werden, und die einfachste Annahme führt auf die von Minkowski erhaltenen Formeln. Um diese Sachlage zu überblicken, behandeln wir zunächst den einfachen Fall ruhender Körper.

§ 6.

Ruhende Körper.

Ruht die Materie, ist also $\mathfrak{w} = 0$, so hat nach § 1 der Raum-Zeit-Vektor w die Komponenten

$$(21) \quad w_1 = 0, \quad w_2 = 0, \quad w_3 = 0, \quad w_4 = i.$$

Der Vektor $\mathfrak{s}$ hat hier ohne weiteres die Bedeutung der *Stromstärke* des frei durch die Materie fließenden *Leitungsstroms*; die von diesem transportierte Elektrizitätsmenge $q = q^{(1)}$ heißt gewöhnlich „wahre Elektrizität“, während sie von Minkowski kurzweg *elektrische Ladung* genannt wird.

Aus den Orthogonalitätsbedingungen (5), (5') und (6), (6') folgt, daß für $w = 0$

$$(22) \quad p_4 = 0$$

ist. Die Bedeutung der drei ersten Komponenten von p ,

$$p_1 = p_x, \quad p_2 = p_y, \quad p_3 = p_z,$$

ist leicht zu erkennen. So ist z. B. das erste Glied $\mathfrak{s}(\varrho_0 \dot{x}_a)_{\mathfrak{s}=0}$ von p_a in erster Annäherung das elektrische Moment eines Teilchens der Materie, und das zweite Glied von p_a liefert die für jeden Raum-Zeitpunkt x, y, z, t dazu tretende Korrektur, wenn man die Annäherung einen Schritt weiter treibt. Demnach sind die Größen p_x, p_y, p_z als die Komponenten des Vektors p , *dielektrische Polarisation*, aufzufassen.

Die Komponenten des Raum-Zeit-Vektors II. Art P reduzieren sich für $w = 0$ wegen (21) und (22) auf:

$$(23) \quad P_{23} = 0, \quad P_{31} = 0, \quad P_{12} = 0, \quad P_{14} = -ip_x, \quad P_{24} = -ip_y, \quad P_{34} = -ip_z.$$

Infolge der Normalitätsbedingungen (5) und (7) sind für $w = 0$

$$(24) \quad (\varrho_0 \dot{x}_a)_{\mathfrak{s}=0} = 0, \quad \delta w_4 = 0.$$

Daher werden die Komponenten des Raum-Zeit-Vektors II. Art Q :

$$(25) \quad \begin{aligned} Q_{23} &= \frac{1}{c} \frac{\mathfrak{s}^2}{2} (\delta w_y (\varrho_0 \dot{z})_0 - \delta w_z (\varrho_0 \dot{y})_0), & Q_{14} &= 0, \\ Q_{31} &= \frac{1}{c} \frac{\mathfrak{s}^2}{2} (\delta w_z (\varrho_0 \dot{x})_0 - \delta w_x (\varrho_0 \dot{z})_0), & Q_{24} &= 0, \\ Q_{12} &= \frac{1}{c} \frac{\mathfrak{s}^2}{2} (\delta w_x (\varrho_0 \dot{y})_0 - \delta w_y (\varrho_0 \dot{x})_0), & Q_{34} &= 0. \end{aligned}$$

Die ersten drei dieser Größen sind das mit $\frac{1}{c}$ multiplizierte Vektorprodukt der Relativgeschwindigkeit der Ladung gegen die Materie in das elektrische Moment; bezeichnet man den letzteren Vektor, dessen Komponenten $\mathfrak{s}(\varrho_0 \dot{x})_0, \mathfrak{s}(\varrho_0 \dot{y})_0, \mathfrak{s}(\varrho_0 \dot{z})_0$ sind, mit $q\dot{r}$ und setzt man

$$(26) \quad q = \frac{1}{2c} [q\dot{r}, \delta w],$$

so wird dieser Vektor als *magnetisches Moment**) oder *Magnetisierung* zu bezeichnen sein, und man hat:

$$(25') \quad Q_{23} = -q_x, \quad Q_{31} = -q_y, \quad Q_{12} = -q_z.$$

*) Vgl. z. B. M. Abraham, Elektromagnetische Theorie der Strahlung, 2. Aufl. 1908, § 28, Formel (185), Seite 243.

Jetzt können wir die Gleichung (20) in folgende zwei Vektorgleichungen zerlegen:

$$(27) \quad \begin{aligned} m &= \mathfrak{M} - q, \\ e &= \mathfrak{E} + p. \end{aligned}$$

Das ist der von Lorentz aufgestellte Zusammenhang zwischen den Vektoren m , e einerseits und $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{E}$ andererseits*); die Polarisierung p und die Magnetisierung q sind dabei als Vektoren anzusehen, die den durch das elektro-magnetische Feld hervorgebrachten Zustand der Materie charakterisieren und demnach von der Art dieser Materie abhängen. Dadurch, daß man die Freiheit hat, diese Abhängigkeit näher zu bestimmen, sei es durch elektronentheoretische Betrachtungen, sei es durch hypothetische Ansätze, kann man die mannigfachen Eigenschaften der Materie dem System der Elektrodynamik einordnen.

Wir wollen uns auf die einfachsten *Zusatzhypothesen* beschränken, die zur Beschreibung *isotroper, nichtdispargierender Körper* dienen:

1. Die Geschwindigkeit des frei beweglichen Teils des Konvektionsstromes, $w^{(0)}$, ist in jedem Raum-Zeitpunkte proportional der elektrischen Feldstärke; daraus folgt sofort das Ohmsche Gesetz:

$$(28) \quad \mathfrak{s} = \sigma \mathfrak{E},$$

wo σ die Leitfähigkeit bedeutet.

2. Die Verschiebung der an der Materie haftenden Ladungen aus ihrer Ruhelage ist proportional der elektrischen Feldstärke; daraus ergibt sich

$$(29) \quad p = (\varepsilon - 1)\mathfrak{E}, \quad e = \varepsilon \mathfrak{E},$$

wo ε die Dielektrizitätskonstante ist.

3. Das Drehmoment der an der Materie haftenden Ladungen um ihre Ruhelage ist proportional der magnetischen Feldstärke m ; demnach ist

$$(30) \quad q = (\mu - 1)m, \quad \mathfrak{M} = \mu m,$$

wo μ die magnetische Permeabilität bedeutet.

σ , ε und μ können Funktionen von x , y , z , t sein.

Während die Hypothesen 1 und 2 eine elektronentheoretische Deutung erlauben, ist das bei der dritten Hypothese noch nicht einwandfrei durchgeführt worden. Verallgemeinert man die Hypothese 2 derart, daß man den Elektronen Trägheit zuschreibt, so gelangt man zur Dispersionstheorie.

*) Vgl. H. A. Lorentz, Enzykl. der math. Wiss. Bd. V 2, Art. 14, Formeln XXX, XXV und XXI, S. 208, 209.

§ 7.

Der Leitungsstrom in bewegten Körpern.

Bewegt sich die Materie, so wird man den Vektor $\mathfrak{s}$ nicht mit dem Leitungsstrom identifizieren; vielmehr wird es nur auf die Relativbewegung der Elektrizität gegen die Materie ankommen, so daß der Vektor

$$(31) \quad \mathfrak{S} = \mathfrak{s} - \varrho w = \varrho^{(l)}(w^{(l)} - w)$$

als *Leitungsstrom* zu bezeichnen ist.

Will man jetzt durch eine Zusatzhypothese den Leitungsstrom mit der wirkenden elektrischen Feldstärke in Verbindung setzen, so entspricht es nicht dem Relativitätsprinzip, die im ruhenden Koordinatensystem gemessene elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}$ in Zusammenhang zu bringen zu der im ruhenden Koordinatensystem gemessenen Relativgeschwindigkeit $w^{(l)} - w$. Vielmehr wirkt auf die bewegte Ladung die *elektrische Ruh-Kraft*

$$\Phi = -wF$$

(vgl. Minkowski, Grundgleichungen, § 11, Formeln (47), (48), Seite 501); ihre ersten drei Komponenten sind die x -, y -, z -Komponenten des Raumvektors

$$\frac{\mathfrak{E} + \frac{1}{c} [w \mathfrak{M}]}{\sqrt{1 - \frac{|w|^2}{c^2}}},$$

dessen Zähler auch nach Lorentz die im Äther auf *bewegte* Ladungen wirkende Kraft darstellt, ihre vierte Komponente ist

$$\Phi_4 = \frac{i(w\mathfrak{E})}{\sqrt{1 - \frac{|w|^2}{c^2}}},$$

und der Vektor Φ ist normal zu w :

$$w\bar{\Phi} = w_1\Phi_1 + w_2\Phi_2 + w_3\Phi_3 + w_4\Phi_4 = 0.$$

Andererseits werden wir als „Relativgeschwindigkeit“ im Sinne des Relativitätsprinzips den zu dem Vektor w *normalen* Raum-Zeit-Vektor I. Art

$$v = w^{(l)} + (w\bar{w}^{(l)})w$$

bezeichnen.

Sehen wir v_1, v_2, v_3 als Komponenten des Raumvektors

$$\frac{v}{c\sqrt{1 - \frac{|w^{(l)}|^2}{c^2}}}$$

an, so findet man leicht die Komponenten des Raumvektors $\mathfrak{v}$ in der Richtung von $\mathfrak{w}$ und in einer zu $\mathfrak{w}$ senkrechten Richtung $\bar{\mathfrak{w}}$:

$$v_{\mathfrak{w}} = \frac{w_{\mathfrak{w}}^{(i)} - |\mathfrak{w}|}{1 - \frac{|\mathfrak{w}|^2}{c^2}},$$

$$v_{\bar{\mathfrak{w}}} = w_{\bar{\mathfrak{w}}}^{(i)}.$$

Daher hängt der Vektor $\mathfrak{v}$ mit dem Leitungsstrom $\mathfrak{S}$ folgendermaßen zusammen:

$$\varrho^{(i)} v_{\mathfrak{w}} = \frac{\mathfrak{S}_{\mathfrak{w}}}{1 - \frac{|\mathfrak{w}|^2}{c^2}},$$

$$\varrho^{(i)} v_{\bar{\mathfrak{w}}} = \mathfrak{S}_{\bar{\mathfrak{w}}}.$$

Dann gelangen wir zu dem Ohmschen Gesetze für bewegte Körper durch die *Zusatzhypothese*:

Die Relativgeschwindigkeit des frei beweglichen Konvektionsstromes ist proportional der elektrischen Ruh-Kraft; daraus folgt:

$$\varrho^{(i)} v = - \frac{\sigma}{c} w F,$$

oder

$$\{E\} \quad s + (w\bar{s})w = - \frac{\sigma}{c} w F.$$

Das ist die von Minkowski aufgestellte Relation $\{E\}$, § 12, Seite 506; sie ist äquivalent mit den Vektorgleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{s_{\mathfrak{w}} - |\mathfrak{w}| \varrho}{\sqrt{1 - \frac{|\mathfrak{w}|^2}{c^2}}} &= \sigma \left(\mathfrak{E} + \frac{1}{c} [\mathfrak{w} \mathfrak{M}] \right)_{\mathfrak{w}}, \\ (E) \quad s_{\bar{\mathfrak{w}}} &= - \frac{\sigma \left(\mathfrak{E} + \frac{1}{c} [\mathfrak{w} \mathfrak{M}] \right)_{\bar{\mathfrak{w}}}}{\sqrt{1 - \frac{|\mathfrak{w}|^2}{c^2}}}. \end{aligned}$$

§ 8.

Die dielektrische Polarisation in bewegten Körpern.

Aus der Gleichung (15')

$$P = [w, p]$$

folgt:

$$w P = w[w, p] = - (w \bar{p})w + (w \bar{w})p.$$

Nun erkennt man, daß infolge der Gleichungen (5) und (6) der durch (14) definierte Vektor p normal zu w ist, d. h. daß

$$(32) \quad w \bar{p} = 0$$

ist; da außerdem

$$w \bar{w} = -1$$

ist, bekommt man:

$$(33) \quad w P = -p.$$

Der Vektor I. Art p steht also zu dem Vektor II. Art P in genau derselben Beziehung wie die elektrische Ruh-Kraft Φ zu dem Feldvektor II. Art F . Wir werden daher p gemäß seiner Definition durch die Gleichungen (14) als „*dielektrische Ruh-Polarisation*“ und P als „*dielektrische Polarisation*“ bezeichnen; letztere ist also ein Vektor II. Art im Gegensatz zu der gewöhnlichen Auffassung.

Setzen wir wie im vorigen Paragraphen

$$p_1 = p_x, \quad p_2 = p_y, \quad p_3 = p_z,$$

so wird infolge von (32):

$$(32') \quad p_4 = \frac{i}{c} (w_x p_x + w_y p_y + w_z p_z) = \frac{i}{c} (w p).$$

Dann sind die Komponenten von P :

$$(34) \quad \begin{aligned} P_{23} &= \frac{w_y p_z - w_z p_y}{c \sqrt{1 - \frac{|w|^2}{c^2}}}, \quad P_{31} = \frac{w_z p_x - w_x p_z}{c \sqrt{1 - \frac{|w|^2}{c^2}}}, \quad P_{12} = \frac{w_x p_y - w_y p_x}{c \sqrt{1 - \frac{|w|^2}{c^2}}}, \\ P_{14} &= -i \frac{p_x - \frac{w_x}{c^2} (w p)}{\sqrt{1 - \frac{|w|^2}{c^2}}}, \quad P_{24} = -i \frac{p_y - \frac{w_y}{c^2} (w p)}{\sqrt{1 - \frac{|w|^2}{c^2}}}, \quad P_{34} = -i \frac{p_z - \frac{w_z}{c^2} (w p)}{\sqrt{1 - \frac{|w|^2}{c^2}}}. \end{aligned}$$

Sie setzen sich also aus den Komponenten der Raumvektoren

$$(34') \quad \mathfrak{R} = \frac{[w p]}{c \sqrt{1 - \frac{|w|^2}{c^2}}}, \quad \mathfrak{B} = \frac{p - \frac{w}{c^2} (w p)}{\sqrt{1 - \frac{|w|^2}{c^2}}}$$

in genau derselben Weise zusammen wie die Komponenten von F aus denen von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{E}$. Hier können wir $\mathfrak{R}$ als *Röntgen-Vektor* bezeichnen; denn er gibt Anlaß zur Entstehung des sog. Röntgenstroms. In der Tat stimmt, wie wir in § 10 sehen werden, der Vektor $\mathfrak{R}$ bis auf Glieder zweiter Ordnung in $\frac{w}{c}$ überein mit demjenigen Vektor, den auch Lorentz zur Erklärung der von Röntgen entdeckten magnetischen Wirkung polarisierter, bewegter Dielektrika erhält. Der Vektor $\mathfrak{B}$, den man *Raumvektor*

Polarisation nennen könnte, unterscheidet sich von der Ruh-Polarisation p nur durch Größen 2. Ordnung. Die Komponenten von $\mathfrak{P}$ in der Richtung w und einer auf w senkrechten Richtung $\bar{w}$ hängen mit den entsprechenden Komponenten von p so zusammen:

$$\mathfrak{P}_w = p_w \cdot \sqrt{1 - \frac{|w|^2}{c^2}}, \quad \mathfrak{P}_{\bar{w}} = \frac{p_{\bar{w}}}{\sqrt{1 - \frac{|w|^2}{c^2}}}.$$

Die für isotrope, nichtdispargierende Körper gültige *Zusatzhypothese* ist hier so zu formulieren:

Der Raum-Zeit-Vektor I. Art Ruh-Polarisation p ist proportional der elektrischen Ruh-Kraft Φ :

$$(35) \quad p = (\varepsilon - 1)\Phi.$$

ε ist die Dielektrizitätskonstante.

Hieraus wird sich nachher die Minkowskische Relation {C}, § 12, Seite 506, ergeben.

§ 9.

Die Magnetisierung bewegter Körper.

Wie der Vektor II. Art P die Polarisation, so wird Q die *Magnetisierung* bedeuten. Tatsächlich haben wir in § 6 gesehen, daß Q sich bei ruhenden Körpern auf einen Raumvektor reduziert, der als „magnetisches Moment“ zu deuten ist. Auch bei bewegten Körpern haben diese drei Komponenten von Q dieselbe Form; es sind das die Komponenten des Moments in den Koordinatenebenen yz , zx , xy ; dazu treten aber noch drei Größen, welche die Form von Momentkomponenten in den Ebenen xt , yt , zt haben. Der Vektor Q haftet also am Koordinatensystem und kann keine Eigenschaft der bewegten Materie ausdrücken. Vielmehr muß man dazu den zugehörigen Vektor

$$(36) \quad q = iw Q^* = iw \frac{\partial^2}{2} [\delta w, (\varrho_0 \dot{x})_0]^*$$

heranziehen, den wir *Ruh-Magnetisierung* nennen und der zu Q in demselben Verhältnis steht wie die *magnetische Ruh-Kraft*

$$\Psi = iw f^*$$

zu dem Feldvektor f . Die Komponenten von q sind

$$q_1 = -i \frac{\partial^2}{2} \begin{vmatrix} w_2 & w_3 & w_4 \\ \delta w_2 & \delta w_3 & \delta w_4 \\ (\varrho_0 \dot{x}_1)_0 & (\varrho_0 \dot{x}_2)_0 & (\varrho_0 \dot{x}_3)_0 \end{vmatrix}, \text{ usf.}$$

Offenbar ist q normal zu w :

$$(37) \quad w\bar{q} = 0.$$

Da die zu q_1, q_2, q_3 gehörigen Determinanten je eine Vertikalreihe mit dem Index 4, d. h. mit rein imaginären Elementen haben, während die zu q_4 gehörige Determinante nur reelle Elemente hat, so sind q_1, q_2, q_3 reell, q_4 rein imaginär. Setzen wir also

$$q_1 = -q_x, \quad q_2 = -q_y, \quad q_3 = -q_z,$$

so sind das die Komponenten eines reellen Raumvektors q , und wegen (37) wird:

$$(37') \quad q_4 = -\frac{i}{c}(w_x q_x + w_y q_y + w_z q_z) = -\frac{i}{c}(wq).$$

Auch den Raumvektor q nennen wir *Ruh-Magnetisierung*; offenbar wird er für $w = 0$ mit dem in § 6 mit demselben Buchstaben bezeichneten Vektor (26) identisch.

Man kann die Gleichung (36) so deuten, daß sie die Transformation des Drehmomentes auf ein mit der Materie mitgeführtes Koordinatenkreuz ausdrückt; dabei fallen dann die Komponenten des Momentes in den Ebenen xt, yt, zt fort. q ist also ein an der Materie haftender Vektor, der ihren Zustand charakterisiert.

Der Vektor I. Art

$$\begin{aligned} wQ &= w \frac{\partial^2}{2} [\delta w, (\rho_0 \dot{x})_0] \\ &= \frac{\partial^2}{2} \{ -(w, (\rho_0 \dot{x})_0) \delta w + (w, \delta w) (\rho_0 \dot{x})_0 \} \end{aligned}$$

verschwindet identisch, weil nach (5) und (7) die Vektoren $(\rho_0 \dot{x})_0$ und δw auf w normal stehen. Wenden wir jetzt die Minkowskische Identität (§ 11, Formel (45), Seite 500)

$$[w, wQ] + [w, wQ^*]^* = (w\bar{w})Q$$

an, so finden wir wegen (36):

$$(38) \quad [w, q]^* = -iQ.$$

Demnach drücken sich die Komponenten von Q durch die Ruh-Magnetisierung q folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned} Q_{23} &= -\frac{q_x - \frac{w_x}{c^2}(wq)}{\sqrt{1 - \frac{|w|^2}{c^2}}}, & Q_{31} &= -\frac{q_y - \frac{w_y}{c^2}(wq)}{\sqrt{1 - \frac{|w|^2}{c^2}}}, & Q_{12} &= -\frac{q_z - \frac{w_z}{c^2}(wq)}{\sqrt{1 - \frac{|w|^2}{c^2}}}, \\ Q_{14} &= -i \frac{w_y q_z - w_z q_y}{c \sqrt{1 - \frac{|w|^2}{c^2}}}, & Q_{24} &= -i \frac{w_z q_x - w_x q_z}{c \sqrt{1 - \frac{|w|^2}{c^2}}}, & Q_{34} &= -i \frac{w_x q_y - w_y q_x}{c \sqrt{1 - \frac{|w|^2}{c^2}}}. \end{aligned}$$

Sie setzen sich also aus den Komponenten der Raumvektoren

$$(39') \quad -\mathfrak{Q} = -\frac{q - \frac{w}{c^2}(wq)}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}}, \quad \mathfrak{S} = \frac{[wq]}{c\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}}$$

ebenso zusammen wie die Komponenten von F aus denen von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{E}$.

Der *Raumvektor Magnetisierung* $\mathfrak{Q}$ unterscheidet sich von der Ruh-Magnetisierung q nur durch Größen 2. Ordnung in $\frac{w}{c}$. Die Komponenten von $\mathfrak{Q}$ in der Richtung w und einer zu w senkrechten Richtung w hängen mit den entsprechenden Komponenten von q so zusammen:

$$\mathfrak{Q}_w = q_w \sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}, \quad \mathfrak{Q}_{\bar{w}} = \frac{q_{\bar{w}}}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}}.$$

Der Vektor $\mathfrak{S}$ gibt, wie wir sehen werden, Anlaß zu elektrostatischen Wirkungen magnetisierter bewegter Medien; er ist das genaue Analogon zu dem „Röntgen-Vektor“

Die für isotrope Körper gültige *Zusatzhypothese* lautet hier:

Der Raum-Zeit-Vektor 1. Art Ruh-Magnetisierung q ist proportional der magnetischen Ruh-Kraft Ψ :

$$(40) \quad -q = (\mu - 1)\Psi.$$

μ ist die magnetische Permeabilität.

Hieraus wird sich nachher die Minkowskische Relation $\{D\}$, § 12, Seite 506, ergeben. Über die elektronentheoretische Deutung der Hypothesen $\{E\}$, (35), (40) gilt dasselbe, was in § 6 (S. 541) für ruhende Körper gesagt worden ist. An die Gleichung (35) hat die Theorie der Dispersion bewegter Körper anzuknüpfen.

§ 10.

Die allgemeine Beziehung zwischen den Vektoren Feldstärke und Erregung.

Die Gleichung (20), die den Raum-Zeit-Vektor f definierte, kann man jetzt nach (15') und (38) so schreiben:

$$(41) \quad \begin{aligned} f &= F' + P + Q \\ &= F' + [w, p] + i[w, q]^*. \end{aligned}$$

Geht man zu den reellen Raumvektoren über, so ergibt sich nach (34) und (39):

$$(42) \quad \begin{aligned} m &= \mathfrak{M} + \mathfrak{R} - \mathfrak{Q}, \\ e &= \mathfrak{E} + \mathfrak{P} + \mathfrak{S}, \end{aligned}$$

oder, ausführlich geschrieben:

$$(V') \quad m = \mathfrak{M} - \frac{q - \frac{1}{c}[\mathfrak{w}p] - \frac{\mathfrak{w}}{c^2}(\mathfrak{w}q)}{\sqrt{1 - \frac{|\mathfrak{w}|^2}{c^2}}},$$

$$(VI') \quad e = \mathfrak{E} + \frac{p + \frac{1}{c}[\mathfrak{w}q] - \frac{\mathfrak{w}}{c^2}(\mathfrak{w}p)}{\sqrt{1 - \frac{|\mathfrak{w}|^2}{c^2}}}.$$

Diese Formeln zusammen mit den Differentialgleichungen (I') bis (IV') und der Relation (E) stellen, genau im Sinne von H. A. Lorentz, die elektrodynamischen Vorgänge in bewegten, dielektrisch polarisierten und magnetisierten Körpern dar. Sie sind aber noch durch die Angabe des Zusammenhangs zwischen den Vektoren Ruh-Polarisation p und Ruh-Magnetisierung q einerseits und den wirkenden Feldstärken andererseits zu ergänzen. Ohne auf diese ergänzenden Beziehungen, die wir für isotrope Körper als „Zusatzhypothesen“ formuliert haben, einzugehen, können wir die Formeln (I') bis (VI'), (E) diskutieren und sie mit den Lorentzschen Formeln vergleichen.

Wir setzen letztere in einer zu unserem Gleichungssystem analogen Formulierung an (Enzykl. der math. Wiss. Bd. V 2, Art. 14, Seite 208, 209); die Differentialgleichungen lauten:

$$(III'') \text{ u. (XXVIII)} \quad \text{curl } \mathfrak{S} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} = \frac{1}{c} (\mathfrak{s} + \text{curl } [\mathfrak{P} \mathfrak{w}]),$$

$$(I'') \quad \text{div } \mathfrak{D} = \varrho,$$

$$(IV'') \quad \text{curl } \mathfrak{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} = 0,$$

$$(V'') \quad \text{div } \mathfrak{B} = 0.$$

Dazu kommen die unseren Gleichungen (V'), (VI') entsprechenden Relationen:

$$(XXX) \quad \mathfrak{S} = \mathfrak{B} - \mathfrak{Q},$$

$$(XXV) \text{ u. (XXI)} \quad \mathfrak{D} = \mathfrak{E} + \mathfrak{P}.$$

Dabei haben wir im allgemeinen die Lorentzschen Bezeichnungen beibehalten; nur ist die Magnetisierung mit $\mathfrak{Q}$ (statt mit $\mathfrak{M}$) bezeichnet und es sind Leitungsstrom $\mathfrak{J}$ und Konvektionsstrom $\mathfrak{K}$ zu dem Stromvektor $\mathfrak{s}$ zusammengefaßt.

Offenbar gehen die Lorentzschen Differentialgleichungen in die unseren über, wenn wir die Lorentzschen Vektoren $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{S} - \frac{1}{c}[\mathfrak{P} \mathfrak{w}]^*$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{B}$ bzw. mit

* Minkowski identifiziert in § 9 der „Grundgleichungen“ $\mathfrak{S}$ mit $\mathfrak{m}$; daraus entspringt es, daß er die Übereinstimmung der Lorentzschen Formeln für nichtmagne-

$\mathfrak{E}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{M}$ identifizieren. Die beiden weiteren Gleichungen lassen sich für beliebige Körper nicht zur Übereinstimmung bringen.

Bei nichtmagnetisierten Körpern ($\mathfrak{q} = 0$, $\mathfrak{Q} = 0$) läßt sich aber Übereinstimmung erreichen, wenn man in (V'), (VI') alle in $\frac{w}{c}$ quadratischen Glieder vernachlässigt; dann bleibt nämlich (wegen (34') und (39')):

$$(42') \quad \begin{aligned} \mathfrak{m} &= \mathfrak{M} - \mathfrak{Q} + \frac{1}{c} [w\mathfrak{P}], \\ \mathfrak{e} &= \mathfrak{E} + \mathfrak{P} + \frac{1}{c} [w\mathfrak{Q}], \end{aligned}$$

und die Formeln gehen für $\mathfrak{Q} = 0$ bei der oben angegebenen Zuordnung der Lorentzschen Vektoren zu den unseren in die Lorentzschen Relationen über.

Hieraus erhellt, daß unsere Bezeichnung des Vektors $\mathfrak{P}$, der bis auf Glieder 2. Ordnung durch $\frac{1}{c} [w\mathfrak{P}]$ gegeben ist, als „Röntgen-Vektor“ gerechtfertigt ist. Denn er gibt wie bei Lorentz zur Entstehung des Röntgenstroms Anlaß, und zwar in einer mit Eichenwalds Versuchen übereinstimmenden Weise (Enzykl., Bd. V 2, Art. 14, S. 210). Die Formeln (V'), (VI') sowohl, als auch die Näherungsformeln (42') unterscheiden sich von den Lorentzschen durch die volle Symmetrie*) zwischen den elektrischen und den magnetischen Größen. Sie beruht vor allem auf dem Vorhandensein des Vektors $\mathfrak{E}$, der bis auf Glieder 2. Ordnung durch $\frac{1}{c} [w\mathfrak{Q}]$ gegeben ist; dieser entspricht genau dem Röntgen-Vektor und zeigt elektrostatische Wirkungen bewegter, magnetisierter Körper an. *Erscheinungen, die durch diesen Vektor $\mathfrak{E}$ zu erklären sind, sind meines Wissens bislang experimentell noch nicht festgestellt worden*; es lassen sich aber unschwer Versuchsanordnungen angeben, die eine experimentelle Untersuchung über das Vorhandensein dieser Wirkung, die in $\frac{w}{c}$ von erster Ordnung ist, gestatten würden. Dieselbe ist nicht zu verwechseln mit der Erscheinung, daß ein Leiter, der sich im magneti-

tisierte Körper mit dem Relativitätsprinzip dem Umstande zuschreiben muß, daß Lorentz die Bedingung des Nichtmagnetisiertseins in einer dem Prinzip widersprechenden Weise ansetzt. Unsere Betrachtungsweise führt von selbst auf obige Zuordnung der Vektoren, wobei die schließliche Übereinstimmung nicht auf die Kompensation zweier Widersprüche zurückgeführt zu werden braucht.

*) Die Hertzschen Grundgleichungen der Elektrodynamik bewegter Körper zeigen eine analoge Symmetrie, widersprechen aber bekanntlich dem Experiment und sind mit dem Relativitätsprinzip unvereinbar.

Ein Vergleich unserer Formeln mit den Grundgleichungen von H. Cohn erbringt sich, da demselben der § 10 der Minkowskischen „Grundgleichungen“ gewidmet ist.

schen Felde bewegt, in ruhenden Strombahnen Leitungsströme hervorruft (z. B. im Falle der sog. unipolaren Induktion); diese letztere Erscheinung ist eine Konsequenz der Formeln (E), S. 543, und man sieht leicht, daß sie bis auf Glieder 2. Ordnung ebenso wie in den Theorien von Hertz und Lorentz durch den Vektor $\frac{1}{c}[\mathfrak{w}\mathfrak{M}]$ bestimmt ist*), dessen Betrag leicht wesentlich größer gemacht werden kann als der des Vektors $\frac{1}{c}[\mathfrak{w}\mathfrak{Q}]$, weil $\mathfrak{Q}$ bei den meisten Körpern nur wenig von Null verschieden ist.

Was die Glieder 2. Ordnung in $\frac{w}{c}$ anbetrifft, so scheint wenig Aussicht vorhanden zu sein, sie bei irdischen Experimenten aufzufinden.

Wir wollen nun noch zeigen, daß bei isotropen, nichtdispargierenden Körpern unsere Zusatzhypthesen (35) und (40) auf die Minkowskischen Formeln {C}, {D} zurückführen.

Nach § 8, (33) ist $wP = -p$ und nach § 9, S. 546, ist identisch $wQ = 0$. Daher folgt aus (20)

$$wf = wF - p.$$

Da nun $\Phi = -wF$ ist, so ergibt sich aus (35):

$$\{C\} \quad wf = \varepsilon wF$$

oder

$$(C) \quad e + \frac{1}{c}[\mathfrak{w}\mathfrak{m}] = \varepsilon \left(\mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{w}\mathfrak{M}] \right).$$

Für die zu f, F, P, Q dualen Vektoren f^*, F^*, P^*, Q^* gilt nach (20) die Gleichung:

$$f^* = F^* + P^* + Q^*.$$

Nun ist offenbar

$$wP^* = w[w, p]^* = 0,$$

und nach § 9 (36) ist

$$wQ^* = -iq.$$

Daher wird

$$wf^* = wF^* - iq.$$

Da nun $\Psi = iw f^*$ ist, so folgt aus (40):

$$\{D\} \quad wF^* = \mu w f^*$$

oder

$$(D) \quad \mathfrak{M} - \frac{1}{c}[\mathfrak{w}\mathfrak{E}] = \mu \left(\mathfrak{m} - \frac{1}{c}[\mathfrak{w}\mathfrak{e}] \right).$$

Damit sind wir zu dem vollständigen Formelsystem Minkowskis gelangt.

Wie schon hervorgehoben, gibt die größere Allgemeinheit unserer Formeln (42) die Möglichkeit an die Hand, komplizierteren Eigenschaften

*) Vgl. Lorentz, Enzykl. Bd. V 1, Art. 13, S. 100 u. S. 238, 239. M. Abraham, Theorie der Elektrizität, Bd. I, § 86, 87, S. 398–409, und Bd. II (Elektromagnetische Theorie der Strahlung), 2. Aufl. 1908, § 86, S. 300–302.

der Substanzen durch die Theorie gerecht zu werden; dazu sind nur die „Zusatzhypothesen“ (35), (40) durch andere zu ersetzen. Die Dispersion in bewegten Medien wird man z. B. erhalten, wenn man die Gleichung (35) durch geeignete Glieder so erweitert, daß der Vektor p Schwingungen träger Massen darzustellen fähig ist. Vorstehende Theorie, die eine Mittelstellung einnimmt zwischen der ursprünglichen rein phänomenologischen Methode Minkowskis und dem bis ins Detail der Elektronenbewegung eindringenden Verfahren von Lorentz, scheint also einerseits schmiegsam genug zu sein, die mannigfaltigen Eigenarten der Substanzen zum Ausdruck zu bringen, andererseits besitzt sie ein anschauliches Fundament, das ihrer bequemen Handhabung förderlich ist.