XVIII. Ueber die Rationalität einer dreizähligen Symmetrieaxe.

Von

Vic. de Souza-Brandão in Lissabon.

Nachdem in dieser Zeitschr. 17, 617 ein Referat von Herrn G. Wulff über einen strengen Beweis für die Rationalität dreizähliger Symmetrie-axen, welcher von Herrn Fedorow in den Verhandlungen der russischen mineralogischen Gesellschaft veröffentlicht wurde, erschienen ist, wurde seitens des Herrn Hecht (Neues Jahrbuch für Mineralogie 1893, 2, 173) eine Berichtigung jenes Beweises und später wieder (Ebenda, 1894, 1, 199) von Fedorow eine Vertheidigung seines Beweises bekannt gemacht. Da keiner von diesen Gelehrten uns sagt, worin der Fehler seines Gegners liegt, so ist aus den erwähnten Aufsätzen nicht ohne Weiteres zu ersehen, welcher von Beiden Recht hat. Ich erlaube mir deshalb meine eigene Ansicht mitzutheilen, in der Hoffnung, Anderen vielleicht die Bemühungen zu ersparen, die ich selbst hatte.

Drei unter einander gleichgeneigte Kanten sind überhaupt krystallographisch möglich. Betrachtet man sie als Fundamentalkanten, so werden dadurch nur drei Elemente — die Fundamentalkanten — bestimmt, und es bleiben die Axenverhältnisse noch durch eine hinzuzuziehende Fläche oder Kante zu berechnen. Werden aber die drei unter einander gleichgeneigten Kanten, welche wir mit x_1 , x_2 , x_3 bezeichnen wollen, als mit Bezug auf eine dreizählige Axe α symmetrisch vorausgesetzt, d. h. sind x_2 und x_3 als aus x_1 durch Drehungen von 120° und 240° um eine Gerade α erzeugt anzusehen, so fragt sich, ob dadurch der Complex vollständig bestimmt ist oder nicht, d. h. ob damit die Axenverhältnisse, ohne Benutzung irgend einer neuen Fläche oder Kante, keiner Unbestimmtheit mehr unterliegen.

Bei der Entscheidung dieser Frage haben die Krystallographen zwei Richtungen befolgt, die man vielleicht die physikalische und die rein mathematische nennen könnte. Der ersten Auffassung nach, welche

in dem vortrefflichen Werke von Liebisch (Physikalische Krystallographie, 1894, S. 44) und schon in seiner etwas älteren geometrischen Krystallographie (1884, S. 495, 496) vertreten ist, wird die Eigenschaft rationaler Axenverhältnisse als eine dem Grundgesetze der physikalischen Krystallographie unterworfen angesehen, woraus für unseren Fall folgt, dass, wenn zwei von drei unter einander gleichgeneigten Kanten durch die dritte und die Operationen einer dreizähligen Symmetrieaxe erzeugt worden sind, jede Ebene eine mögliche Fläche des von jenen drei Kanten bestimmten Complexes ist, welche auf letzteren Abschnitte bildet, deren Verhältnisse rational sind, und jede Richtung eine mögliche Kante, deren axoparallele Coordinaten mit Bezug auf die drei jene Kanten verbindenden Ebenen rationale Verhältnisse haben. Da nun für die dreizählige Axe alle drei Coordinaten gleich sind, ebenso wie die Kantenabschnitte für die zu ihr normale Ebene (die Basis), so ist ohne Weiteres festgestellt, dass dreizählige Axe und dazu normale Ebene mögliche Kante und mögliche Fläche sind.

Diese Auffassung scheint mir die richtige zu sein, da die Gleichwerthigkeit von Richtungen und Ebenen, auf Grund der Erfahrung und physikalischer Betrachtung gefunden, nicht deshalb aufhört für eine besondere Eigenschaft (welche nichts anderes als eine physikalische sein kann) zu gelten, weil ein allgemeineres Grundgesetz — das sogenannte Grundgesetz der geometrischen Krystallographie — nicht eine solche Anforderung von vornherein an gleichwerthige Richtungen stellt. Wenn ein Symmetrieelement als ein solches, durch dessen Operation ein Complex in sich selbst übergeht, definirt wird, so ist nicht begreiflich, wie man die Rationalität der Axenverhältnisse auf gleichwerthigen Kanten, identisch mit der Gleichheit der krystallographischen Einheiten dieser Kanten, von der Eigenschaft, jenes Symmetrieelement zu besitzen, trennen kann.

Aus dem Gesagten folgt auch schon, dass, soll die dreizählige Axe eine mögliche Kante sein, die Axenverhältnisse, wenn als Fundamentalkanten drei gleichwerthige Kanten angenommen werden, rational sein müssen.

Die rein mathematische Richtung, von Fedorow und Hecht verfolgt, verwirft für die Entscheidung dieser Frage die Gültigkeit des Grundgesetzes der physikalischen Krystallographie und lässt nur das Gesetz der rationalen Indices gelten.

Für die Anwendung des letzteren ist die Hinzuziehung weiterer zwei Kanten nothwendig, welche natürlich mit der dreizähligen Axe nicht zusammenfallen dürfen. Durch die Annahme einer dreizähligen Symmetrieaxe werden aber zu einer Kante o noch zwei andere q und r bedingt, welche unter sich und mit o einerseits, und alle drei mit der Axe andererseits gleiche Winkel bilden. Da aber die vier Kanten x_1 , x_2 , x_3 , o den Complex vollständig bestimmen, so fragt sich, ob und in welchen Fällen q und r mögliche Kanten sind.

Wir nehmen an, dass die Drehungen um die dreizählige Axe, welche o in q und q in r auf dem kleinsten Wege überführen, dem Sinne nach mit denjenigen übereinstimmen, welche x_1 in x_2 und x_2 in x_3 ebenfalls auf dem kleinsten Wege zur Coincidenz bringen. Dann genügt es, die Möglichkeit von r zu untersuchen, da die Winkel unter den fünf Kanten x_2, x_3, x_1, o, r entsprechend gleich sind denjenigen, welche von x_1, x_2, x_3, r, q gebildet werden, und in Folge dessen, wenn die Indices von r mit Bezug auf x_2, x_3, x_1, o rational sind, auch diejenigen von q mit Bezug auf x_1, x_2, x_3, r .

Ist nun in der That r eine mögliche Kante, so ist der eine dreizählige Symmetrieaxe besitzende Complex rational; ist dagegen r keine mögliche Kante, so ist der dreizählig axosymmetrische Complex kein rationaler, oder mit anderen Worten: der rationale Complex, welcher durch die vier Kanten x_1, x_2, x_3, o , von welchen die drei ersten unter einander gleichgeneigt sind, bestimmt ist, wird keine dreizählige Symmetrieaxe besitzen.

Um nach der Rationalitätsbedingung von r zu suchen, benutzen Fedorow und Hecht den Fundamentalsatz der goniometrischen Krystallographie, welcher in der Rationalität des dreifachen Verhältnisses von fünf Flächen oder Kanten eines Complexes besteht. Werden mit r_1, r_2, r_3 die Indices von r , bezogen auf x_1, x_2, x_3 als Fundamentalkanten und o als Einheitskante, und mit X_1, X_2, X_3 die Normalen der Axenebenen $x_2 x_3, x_3 x_1, x_1 x_2$ bezeichnet, so gelangt Fedorow zu der Formel:

$$\cos(rX_1) : \cos(rX_2) : \cos(rX_3) = \sqrt[3]{\frac{r_1}{r_2}} : \sqrt[3]{\frac{r_2}{r_3}} : \sqrt[3]{\frac{r_3}{r_1}}, \quad (1)$$

woraus er schliesst, dass die dreizählige Axe eine mögliche Kante ist, da die Gleichung für $(rX_1) = (rX_2) = (rX_3)$, die Form:

$$\sqrt[3]{\frac{r_1}{r_2}} : \sqrt[3]{\frac{r_2}{r_3}} : \sqrt[3]{\frac{r_3}{r_1}} = 1 : 1 : 1$$

— annehmend, durch rationale Werthe der Verhältnisse $\frac{r_1}{r_2}, \frac{r_2}{r_3}, \frac{r_3}{r_1}$ befriedigt wird.

Hecht wendet ein, dass der vorhergehende Beweis, zur Hälfte geführt, nichts beweise, und den erwähnten Fundamentalsatz auf die Kanten x_1, x_2, x_3, r und o' (zunächst beliebig) weiter anwendend, kommt er schliesslich zu den Gleichungen:

$$\cos(o'X_1) : \cos(o'X_2) : \cos(o'X_3) = r_1' \sqrt[3]{\frac{r_1}{r_2}} : r_2' \sqrt[3]{\frac{r_2}{r_3}} : r_3' \sqrt[3]{\frac{r_3}{r_1}}, \quad (2)$$

wo r_1', r_2', r_3' ganze rationale Zahlen sind. Indem er nun die beliebige Kante o' mit der dreizähligen Axe identificirt, findet er:

$$(r_1')^3 : (r_2')^3 : (r_3')^3 = \frac{r_2}{r_1} : \frac{r_3}{r_2} : \frac{r_1}{r_3}; \quad (3)$$

d. h. es müssen die Verhältnisse der Indices der Kante r , von einem Proportionalitätsfactor abgesehen, gleich den dritten Potenzen dreier ganzer rationaler Zahlen sein.

Hecht betrachtet die Gleichungen (4) für sich allein, als die Bedingung dafür, dass ein Complex eine dreizählige Symmetrieaxe besitze, was (4) auch jedenfalls beweist; als Beweis für die Zugehörigkeit der Axe zum Complex aber sieht er nur Formel (2) an. Mir scheint es auch, dass (4), der Bedeutung von r_1, r_2, r_3 wegen, nur bezüglich einer mit der Einheitskante gegen die dreizählige Axe symmetrischen Kante Gültigkeit behält, über die Abhängigkeit zu verschiedenen einfachen Formen gehörender Kanten von einander jedoch nichts aussagt. Jedenfalls ist nicht gestattet, (4) auf die Axe selbst anzuwenden, da dann r und o (Einheitskante) coincidiren werden, und es natürlich nichts Merkwürdiges hat, dass man von einer als möglich angenommenen Kante o findet, dass sie, wenn auch mit einer anderen Bezeichnung (r), möglich ist. Der Satz von Fedorow beweist also nicht genug. Wir werden sehen, dass derjenige von Hecht zu viel beweist. Ich möchte an diesem Platze aber schon erwähnen, dass Fedorow zu einem Resultate gelangt ist, welches nach gegenwärtiger Untersuchung richtig ist, trotzdem es, wie oben gezeigt, nicht als eine zwingende Folge seiner Erörterungen betrachtet werden kann, nämlich, dass für einen bestimmten Winkel $(x_2 x_3) = (x_3 x_1) = (x_1 x_2)$ ein und nur ein rationaler Complex existirt, und dass diesem einzigen rationalen Complex auch die dreizählige Axe als Kante angehört. Dem weiter unten zu discutirenden Beweise von Hecht nach soll es aber unendlich viele rationale Complexe geben und darunter nur einen, welcher die dreizählige Axe als Kante enthält.

Wir wollen nun auf analytischem Wege einen für unseren Gegenstand wichtigen und sogar entscheidenden Satz ableiten, den wir oben physikalisch begründet haben. Aus den Verhältnissen (Liebisch, Geometr. Krystallogr. S. 75)

$$a_1 \eta_1 : a_2 \eta_2 : a_3 \eta_3 \\ = \sin(\pi_2 \pi_3) \cos(\eta p_1) : \sin(\pi_3 \pi_1) \cos(\eta p_2) : \sin(\pi_1 \pi_2) \cos(\eta p_3),$$

worin a_1, a_2, a_3 die Axeneinheiten, η_1, η_2, η_3 die Indices einer beliebigen Kante η , π_1, π_2, π_3 die Fundamentalkantenrichtungen und p_1, p_2, p_3 die Normalenrichtungen der Axenebenen bedeuten, folgt für die dreizählige Axe, für welche

$$\cos(\eta p_1) : \cos(\eta p_2) : \cos(\eta p_3) = 1 : 1 : 1,$$

wenn man zu Fundamentalkanten die unter einander gleichgeneigten Kanten x_1, x_2, x_3 nimmt:

$$a_1 \eta_1 : a_2 \eta_2 : a_3 \eta_3 = 1 : 1 : 1 ,$$

woraus :

$$\eta_i = \frac{1}{a_i} \quad [i = 1, 2, 3, \dots] ;$$

d. h. die dreizählige Axe ist rational und nur dann, wenn die Axenverhältnisse es auch sind. Und da dann jede durch rationale Axenschnittsverhältnisse charakterisirte Ebene oder durch rationale Coordinatenverhältnisse charakterisirte Richtung eine mögliche Fläche resp. Kante ist, so folgt hieraus, dass für einen bestimmten Winkel $(x_n x_{n+1})$ $[n = 1, 2, 3, \dots]$ der gleichwerthigen Fundamentalkanten es einen und nur einen rationalen Complex giebt, welcher zugleich die dreizählige Axe enthält; er wird durch rationale Verhältnisse der Axenabschnitte jeder seiner Flächen und der axoparallelen Coordinaten jeder seiner Kanten gekennzeichnet.

Um unsere obige Behauptung vollständig zu begründen, bleibt noch übrig zu beweisen, dass, soll ein Complex überhaupt dreizählig axosymmetrisch sein, auch diese Bedingung der Rationalität der Axenabschnitts- und Coordinatenverhältnisse erfüllt sein muss, d. h. dass die, sonst möglicherweise verschiedenen, rationalen Complexe mit einander und mit jenem identisch sind. Dies werden wir bei der nun folgenden Kritik des Hechtschen Beweises zeigen. Aus (4) und (3) folgt:

$$\cos (r X_1) : \cos (r X_2) : \cos (r X_3) = \frac{1}{r_1'} : \frac{1}{r_2'} : \frac{1}{r_3'} ;$$

und da :

$$(r X_1) = (o X_2), \quad (r X_2) = (o X_3), \quad (r X_3) = (o X_1),$$

so erhält man, indem die linke Seite mit $\sin (x_3 x_1) = \sin (x_1 x_2) = \sin (x_2 x_3)$ multiplicirt wird:

$$\begin{aligned} \sin (x_3 x_1) \cos (o X_2) : \sin (x_1 x_2) \cos (o X_3) : \sin (x_2 x_3) \cos (o X_1) \\ = \frac{1}{r_1'} : \frac{1}{r_2'} : \frac{1}{r_3'} . \end{aligned}$$

Die Ausdrücke links sind nichts Anderes, als die homogenen Coordinaten der Kante o , bezogen auf die Fundamentalkanten x_2, x_3, x_1 und die Einheitskante o selbst, also mit dem Symbol [444]. Wir müssen deshalb in dem Ausdrucke der homogenen Coordinaten (Liebisch, Geometr. Krystallogr. S. 74) setzen:

$$\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 ,$$

so dass:

$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = a_1 : a_2 : a_3$$

und schliesslich :

$$a_1 : a_2 : a_3 = \frac{1}{r_1'} : \frac{1}{r_2'} : \frac{1}{r_3'} .$$

Die Gleichung (3) führt also direct zu dem Schlusse, dass, damit die dreizählige Axe rational sei, die Axenverhältnisse des Complexes rational sein müssen, welches auch die Einheitskante sein möge, was mit unserem

obigen Satze übereinstimmt; und insofern ist der Beweis von Hecht richtig. Dieser Forscher behauptet aber, dass die von Fedorow aufgestellte Gleichung (4) nicht dasselbe beweise, wie (3), sondern einfach die Bedingung für die Rationalität eines durch die Kanten x_1, x_2, x_3, o bestimmten Complexes darstelle, deren es mehrere giebt, die im Allgemeinen aber die dreizählige Axe nicht enthalten.

Wir wollen nun zeigen, dass diese Behauptung falsch ist, und dass (4) auch weiter nichts bedeutet, als die Rationalität jener Axenverhältnisse, also die Coincidenz aller rationalen Complexes in einem einzigen, welchem, wie mehrfach gezeigt, die dreizählige Axe angehört. In der That sind, wenn mit $a_1 : a_2 : a_3$ die von der Kante o als Einheitskante auf x_1, x_2, x_3 bestimmten Axenverhältnisse bezeichnet werden, resp. durch

$$a_1, a_2, a_3 \quad \text{und} \quad a_1 r_1, a_2 r_2, a_3 r_3$$

die homogenen Coordinaten von o [444] und r [$r_1 r_2 r_3$] auszudrücken. Der Stellung von o und r gegen x_1, x_2, x_3 halber ist aber:

$$a_1 r_1 = a_2, \quad a_2 r_2 = a_3, \quad a_3 r_3 = a_1 \quad \text{und} \quad r_1 r_2 r_3 = 1. \quad (4)$$

Hieraus folgt weiter:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{(a_2)^2}{a_3 a_1}, \quad \frac{r_2}{r_3} = \frac{(a_3)^2}{a_1 a_2}, \quad \frac{r_3}{r_1} = \frac{(a_1)^2}{a_2 a_3}$$

und:

$$(a_1)^3 : (a_2)^3 : (a_3)^3 = \frac{r_3}{r_1} : \frac{r_1}{r_2} : \frac{r_2}{r_3}$$

oder

$$a_1 : a_2 : a_3 = \sqrt[3]{\frac{r_3}{r_1}} : \sqrt[3]{\frac{r_1}{r_2}} : \sqrt[3]{\frac{r_2}{r_3}}.$$

Multipliziert man die rechte Seite mit:

$$r_2 \sqrt[3]{(r_3)^2 r_1} = \sqrt[3]{\frac{r_2}{r_1}} = \sqrt[3]{(r_2)^2 r_3},$$

was leicht aus (4) hervorgeht, so erhält man schliesslich

$$a_1 : a_2 : a_3 = r_2 r_3 : 1 : r_2,$$

ohne Benutzung der Hecht'schen Zahlen r_1', r_2', r_3' .

Dies lässt sich auch direct aus (4) ableiten, da:

$$\frac{a_2}{a_3} = \frac{1}{r_2}, \quad \frac{a_1}{a_3} = \frac{r_3}{1} = \frac{r_2 r_3}{r_2}$$

und schliesslich:

$$a_1 : a_2 : a_3 = r_2 r_3 : 1 : r_2.$$

Damit ist der zweite wichtige Satz bewiesen; welcher mit dem ersten unsere obige Behauptung ausmacht.

Der Satz von Fedorow ist richtig; Letzterer ist aber nicht weit genug

mit seinem Beweise gegangen, und da er nicht nach den Axeneinheiten suchte, so hat er nichts bewiesen. Dagegen ist Hecht, ohne sich bei denselben aufzuhalten, zu weit gegangen, und konnte deshalb nicht die wahre Lösung finden.

Das trigonale System ist also in dieser Beziehung, wie in allen, welche von der Geradzähligkeit der Hauptaxe unabhängig sind, den anderen durch eine Hauptaxe ausgezeichneten Systemen analog, d. h. es werden durch zwei nach der Hauptaxe gleichwerthige Elemente — Flächen oder Kanten — die geometrischen Constanten vollständig bestimmt, und unter den möglichen Kanten und Flächen befinden sich stets die Hauptaxe und die zu ihr normale Ebene.

Erst nach Uebergabe obigen Aufsatzes an die Redaction dieser Zeitschrift hatte ich das Vergnügen, eine Abhandlung von Herrn Fedorow: Das Grundgesetz der Krystallographie (diese Zeitschr. **23**, 99), zu lesen, welche, trotzdem sie uns nichts Neues bezüglich des Beweises der Rationalität trigonaler Axen auf Grund des geometrischen Gesetzes bringt, mich bewogen hat, einige Bemerkungen über die darin angeführten Ideen meinem Aufsatz hinzuzufügen.

Herr Fedorow stellt die Structurtheorien oder, wenn man will, ihren grundlegenden Gedanken an die Spitze unserer Wissenschaft und leitet daraus die beiden Hauptgesetze der Krystallographie — das Zonen- und Symmetriegesetz — deductiv ab. Jener grundlegende Gedanke der Structurtheorien — die regelmässige Vertheilung der Massenpunkte eines krystallisirten Körpers — wird von Fedorow als das Grundgesetz der physikalischen Krystallographie angesehen und schliesslich zum Hauptgesetze der Krystallographie überhaupt erhoben.

Dies dürfte aber nicht berechtigt sein. Das Zonen- oder Rationalitätsgesetz ist ein durch die Forschung vollkommen bestätigtes Erfahrungsgesetz, und wenn Fedorow glaubt, besonders wegen der Unsicherheit höherer indicirter Flächen, dass jemand daran zweifeln dürfte, so wäre die atomistische Theorie in der Chemie, mit der weit grösseren Unsicherheit der Verbindungsgewichte der Elemente, als eine auf falsche Erfahrung basirte Theorie zu bezeichnen. Diese Analogie ist aber nicht ganz treffend und die weitere Vergleichung nicht zu Gunsten der Structurtheorien. Die atomistische Vorstellung, auf jenen Erfahrungsgesetzen begründet, hat sich bald durch die einfache Erklärung mancher Thatsachen zu einer Theorie ausgebildet, welche, sich dann durch successive Aenderungen den hinzukommenden Erfahrungen anpassend, auf die weitere Forschung leitend wirkte und noch fortwirkt. Aus dem längst ausser Zweifel gesetzten Rationalitätsgesetze und der Gleichheit des physikalischen Verhaltens nach parallelen Richtungen im Krystalle ist inductiv die den Structurtheorien

zu Grunde liegende Vorstellung der regelmässigen Massenpunktvertheilung entstanden, welche aber bis zur Gegenwart das Stadium einer Hypothese nicht überschritten hat.

Das Rationalitätsgesetz war der Entstehung der sogenannten Structurtheorien nicht fremd, wie man vielleicht im Sinne der in Rede stehenden Abhandlung glauben möchte, da die den beiden consequent durchgeführten — der Bravais-Mallard'schen und der Sohncke-Schönflies'schen — Theorien vorangehende und dieselben fördernde Hauy'sche Decrescenztheorie wesentlich darauf gegründet war, ohne besondere Rücksicht auf andere physikalische Eigenschaften. Wäre es aber nicht so, und wäre das Rationalitätsgesetz als eine deductive Prüfung der jenen Theorien zu Grunde liegenden Vorstellung zu betrachten, so würde man doch nicht zugeben können, dass diesem Gesetze sein ursprünglicher Charakter eines Erfahrungserwerbnisses entzogen werde.

Ich kenne sonst keine einzige, allgemein anerkannte, unbestreitbare, deductive Prüfung irgend einer der beiden Structurtheorien und betrachte diese als nichts Materielles darbietende, rein mathematische Schöpfungen, welche dem Geiste ihrer Erfinder und Mitarbeiter die grösste Ehre machen, denen aber, wenigstens für die nächste Zeit, die krystallographische Forschung wenig Hilfe (was von einer Theorie in erster Linie zu fordern ist) zu verdanken haben wird. Auch Fedorow ist der Meinung, dass diese sogenannten Theorien einen solchen Namen nicht verdienen, wie man sich beim Lesen seiner werthvollen Abhandlung in dieser Zeitschr. **21**, 287 ff. überzeugen kann.

Bezüglich der verschiedenen Arten der Fassung des allgemeinen geometrischen Gesetzes möchte ich noch erwähnen, dass der Ausdruck durch die Doppelverhältnisse nicht mit dem sogenannten Rationalitäts- und Zonengesetze gleichbedeutend ist, wie schon daraus hervorgeht, dass ein sich auf die Elemente eines geometrischen Gebildes erster Art — des Ebenenbüschels resp. des ebenen Strahlenbüschels — beziehender Satz nicht mit einem anderen gleich extensiv und allgemein sein kann, welcher sich auf ein Gebilde zweiter Art, wie es das Bündel der Flächen und Kanten des Complexes ist, bezieht. Dem arithmetischen und dem geometrischen Ausdruck des geometrischen Grundgesetzes ist die goniometrische Fassung der Rationalität des dreifachen Verhältnisses von fünf Krystallflächen oder Kanten, wovon das Gesetz des Doppelverhältnisses einen speciellen Fall bildet, an die Seite zu stellen. Dem goniometrischen Gesetze nach verhalten sich die drei Verhältnisse der Sinus der Ecken, welche zwei Flächen (Kanten) mit je zwei von drei anderen, unter sich nicht tautozonalen Flächen bilden, wie drei rationale ganze Zahlen (Hecht, Neues Jahrb. f. Min. etc. 1888, **1**, 75).

Nun gehe ich zum Symmetriegesetze über. Wenn ich die Abhandlung

von Fedorow gut interpretirt habe, so ist sein Gedankengang folgender: Zunächst wird für die innere Structur der Krystalle die Hypothese der regelmässigen Vertheilung der Massenpunkte aufgestellt, darauf die möglichen Symmetriearten eines solchen Gitters oder Haufens untersucht, und da sie jene Symmetriearten in der That aufweisen können, so sei dadurch erst streng bewiesen, dass solche Symmetriearten für Krystalle wirklich möglich sind. Mir scheint, es wird hier aus einer reinen Hypothese, welche noch nicht einmal eine Theorie geliefert hat, wieder ein Gesetz deductiv abgeleitet und deshalb als strenger bewiesen angesehen, als durch die allein auf die Erfahrung begründete, von irgend welcher Hypothese freie geometrische Betrachtung.

Nach dem Gesetze der Symmetrie zerfallen die Krystalle in verschiedene Gruppen, welche durch die Anzahl und Vertheilung der verschiedenen Richtungen, nach welchen die physikalischen Eigenschaften qualitativ und quantitativ gleich sind, charakterisirt werden. Unter diesen Eigenschaften ist diejenige der Krystallform als Ausdruck der Gesetzmässigkeit des Wachsthum's die wenigst symmetrische und deshalb für die Natur des betreffenden Körpers die bezeichnendste; woraus hervorgeht, dass auch das physikalische Gesetz der Symmetrie nach den an der Krystallform gemachten Erfahrungen formulirt werden muss und formulirt worden ist. Das Hauptkriterium des Symmetriegesetzes ist bekanntlich die einfache Form, welche trotz aller der gesetzmässigen Aeusserung dieses Kennzeichens entgegenwirkenden Nebenumständen doch zur Aufstellung der krystallographischen Symmetriellehre am meisten beigetragen hat.

Nach Fedorow's Meinung sei auch die Hypothese der regelmässigen Massenpunkt-Vertheilung nothwendig und ausreichend, nicht nur um zu beweisen, dass andere als die 32 bekannten Symmetriegruppen unmöglich sind, sondern auch, dass diese in der That möglich sind, weil sie mit obiger Hypothese vereinbar sind. Die geometrische Untersuchung der rationalen Krystallcomplexe hatte gezeigt, dass andere als jene 32 Gruppen unmöglich, diese also implicite möglich sind, indem sie mit dem die Erscheinung der einzelnen Fläche erfahrungsmässig allein beherrschenden Gesetze in Einklang stehen. Dies scheint mir mehr zu beweisen, als die Uebereinstimmung mit oder die Ableitung aus einer, wenn auch berechtigten Hypothese.

Die Structurtheorien können unmöglich das Symmetriegesetz in seiner Allseitigkeit in sich enthalten. Wählt man unter anderen Eigenschaften die Wachsthum'serscheinungen, so sagt uns das erfahrungsmässige Symmetriegesetz in seiner Fassung als Grenzgesetz, welche eine lang studirte und wohlberechtigte Abstraction aus den thatsächlichen Verhältnissen darstellt, dass zum Vorhandensein einer Fläche das Vorhandensein anderer (der einfachen Form) nicht nur möglich, sondern nothwendig ist. Die genannten

Theorien erfordern die Möglichkeit, bedingen aber nicht die actuelle Verwirklichung des Phänomens.

Das geometrische Gesetz ist gewiss auch ein physikalisches, da die Krystallform keine andere als eine physikalische Eigenschaft sein kann. Es wird aber unter jenem Namen ausgeschieden als sich nur auf eine Eigenschaft beziehend, welche durch Abstraction als eine geometrische betrachtet werden kann. Gewiss sind beide Gesetze, das geometrische wie das physikalische, als welches wir das Symmetriegesetz bezeichnen, partielle Ausdrücke des inneren Wesens des krystallisirten Stoffes, können daher zur deductiven Prüfung für Hypothesen und Theorien dienen und diesen grosse Wahrscheinlichkeit verleihen, aber auf keinen Fall von solchen abgeleitet werden.

Um der Forschung eine sichere Grundlage zu liefern, muss man den Naturgesetzen ihren experimentellen Charakter lassen. Alsdann können auf dieselben immer neue fruchttragendere Hypothesen aufgebaut werden, die in unserem Falle vielleicht besser als die actuellen Structurvorstellungen zur Entwicklung der wissenschaftlichen Krystallographie beitragen werden.

Es ist sehr bedenklich, wenn in elementaren Lehrbüchern, welche besonders den Anfängern gewidmet sind, Beweise von thatsächlichen Verhältnissen, von Erfahrungsgesetzen, wie z. B. das Zonengesetz, die auch mittelst einer wohlausgebildeten Theorie verwerflich wären, auf Grund jener Structurvorstellungen gegeben werden. Solche Lehrbücher, welche von diesen Vorstellungen als unanfechtbaren Errungenschaften ausgehen und darauf die Darstellung der Krystallographie basiren, sind recht unzweckmässig; ich sehe als mustergiltige Methode diejenige an, die Prof. Liebisch in seinen zwei bekannten Werken der Krystallographie mit voller Strenge befolgt hat, und möchte, von veralteten Stellen abgesehen, diese Lehrbücher Allen empfehlen, welche ein gesundes Studium durchzuführen suchen.