Ueber eine Gattung von bestimmten Integralen.

Von

L. POCHHAMMER in Kiel.

§ 1.

Im Folgenden sollen gewisse Integrale betrachtet werden, in denen x als Parameter vorkommt, während gleichzeitig die Grenzen von x abhängen. Es werde in der Ebene, welche die complexen Werthe darstellt, eine Gerade $\mathfrak{G}$ durch die Punkte 0 und x gelegt und ein Kreis $\mathfrak{K}$ mit dem Radius γ um den Nullpunkt beschrieben. Bezeichnet man durch ϵ eine unendlich kleine positive reelle Constante, so wird die Grösse $-\epsilon x$ durch einen Punkt γ der Geraden $\mathfrak{G}$ abgebildet, welcher dem Nullpunkte benachbart und durch letzteren vom Punkte x getrennt ist. Die Durchschnittspunkte des Kreises $\mathfrak{K}$ mit der Geraden $\mathfrak{G}$ mögen d und δ heissen, und zwar werde der in der Richtung Ox liegende δ genannt. Es sei nun S das Integral

$$(1) \quad S = \int_{-\epsilon x}^{\gamma(0)} e^{\frac{x}{u}} u^{p-1} \varphi(u) du,$$

in welchem die Variable u zunächst die geradlinige Strecke vom Punkte γ bis zum Punkte δ , hierauf den Kreis $\mathfrak{K}$ in positiver Drehungsrichtung und zum zweiten Mal das genannte Stück der Geraden $\mathfrak{G}$ vom Punkte δ bis zum Punkte γ durchläuft*). Man setzt voraus, dass das Integral S einen bestimmten Sinn hat, und dass die (von u allein abhängige) Function $\varphi(u)$ innerhalb des Kreises $\mathfrak{K}$ eindeutig ist; p bedeutet eine beliebige Constante.

Das Integral S nimmt den Factor $e^{2\pi ip}$ auf, wenn die Grösse x einen positiven Umlauf um den Nullpunkt ausführt. Es sei x' der beliebige Anfangswerth von x , und $\gamma' = -\epsilon x'$. Die durch die Punkte x' , 0 , γ' gehende Gerade, welche $\mathfrak{G}'$ heissen möge, schneide den

*) Für das obige Integral ist die abgekürzte, auf S. 472 des 35^{ten} Bandes dieser Annalen angegebene Bezeichnung angewendet worden.

bei einem Umlauf der Grösse x um den Nullpunkt den Factor $e^{2\pi i(p+q+r)}$ auf. Analoges gilt von den auf dieselbe Art gebildeten n -fachen Integralen.

Die obige Betrachtung lässt sich auf die Integrale

$$(5) \quad \mathfrak{S} = \int_{-\epsilon x}^{\bar{(0)}} e^{\frac{x}{u}} (u - x)^{k-1} u^{p-1} \varphi(u) du,$$

$$(6) \quad \mathfrak{I} = \int_{-\epsilon x}^{\bar{(0)}} e^{\frac{x}{v}} (v - x)^{l-1} v^{q-1} \psi(v) dv \int_{-\epsilon v}^{\bar{(0)}} e^{\frac{v}{u}} (u - v)^{k-1} u^{p-1} \varphi(u) du$$

ausdehnen, bei denen dieselben Integrationswege wie bei (1), bzw. (2) zur Anwendung kommen sollen (positiver Umlauf um den Nullpunkt von $-\epsilon x$ aus, bzw. von $-\epsilon v$ aus). Unter $\varphi(u)$ und $\psi(v)$ werden wieder Functionen verstanden, die in der Umgebung des Nullpunktes eindeutig sind, während k, l, p, q beliebige Constante bedeuten. Man lässt x die Curve $x'abx'$ durchlaufen (Fig. 1) und bezeichnet die anfänglichen, zu $x=x'$ gehörigen Werthe von $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{I}$ durch $\mathfrak{S}'$ und $\mathfrak{I}'$. In $\mathfrak{S}'$ werden für den Ausgangspunkt $u=-\epsilon x'=r'$ des Integrationsweges bestimmte Werthe der Potenzen $(u-x')^{k-1}$ und u^{p-1} fixirt, welche man $[(r'-x')^{k-1}]$ und $[r'^{p-1}]$ nennt. Die x -Curve möge den Integrationsweg vollständig umschliessen, was keine Beschränkung ist, da in Fig. 1 der Kreis $\mathfrak{K}$ beliebig klein genommen werden kann. Dann wird (wie bei S) der Integrationsweg des Integrals $\mathfrak{S}$ beim Variiren von x nur insofern ein anderer, als die Gerade $\mathfrak{G}$ sich dreht. Der zur unteren Integralgrenze $u=-\epsilon x=r$ (des Integrals $\mathfrak{S}$) gehörige Werth der Potenz $(u-x)^{k-1}$ nimmt, wenn x den Weg $x'abx'$ zurücklegt, den Factor $e^{2\pi ik}$ auf. Denn der genannte Werth $(r-x)^{k-1}$ ist vom Werthe $(r'-x)^{k-1}$, mit dem er für $x=x'$ übereinstimmt, stets nur unendlich wenig verschieden, da r und r' verschwindend kleine Grössen sind. Zur Potenz $(r'-x)^{k-1}$ tritt aber durch den Weg $x'abx'$ der Variable x , welcher den (festen) Punkt r' umkreist, der Factor $e^{2\pi ik}$ hinzu. Hinsichtlich der Potenz u^{p-1} gilt für (5) dasselbe wie für (1). Die an der unteren Integralgrenze erfolgende Aenderung des Werthes der zu integrirenden Function überträgt sich, der vorausgesetzten Stetigkeit halber, auch auf alle folgenden Integralelemente. Also hat das Integral (5) die Eigenschaft, den Factor $e^{2\pi i(k+p)}$ aufzunehmen, wenn x die Curve $x'abx'$ durchläuft.

Für das Integral (6) ist zu berücksichtigen, dass, gemäss dem soeben erhaltenen Resultat, das Product

$$v^{q-1} \psi(v) \int_{-\epsilon v}^{\bar{(0)}} e^{\frac{v}{u}} (u - v)^{k-1} u^{p-1} \varphi(u) du$$

gleich einem Ausdruck $v^{k+p+q} F(v)$ gesetzt werden kann, wo unter $F(v)$ eine in der Umgebung des Nullpunktes eindeutige Function von v

verstanden wird. Die auf $\mathfrak{S}$ bezüglichen Schlussfolgerungen sind also auch auf $\mathfrak{Z}$ anwendbar, wenn statt u, k, p, φ die Grössen $v, l, k + p + q, F$ eingeführt werden. Demnach nimmt das Integral $\mathfrak{Z}$ den Factor $e^{2\pi i(k+l+p+q)}$ auf, wenn x den Nullpunkt im positiven Sinne durchläuft. Man erkennt leicht, dass ein entsprechender Satz für die mehrfachen Integrale von der obigen Form besteht.

§ 2.

Man setze nunmehr voraus, dass die Function $\varphi(u)$ in der Umgebung des Punktes $u = 0$ nicht nur eindeutig, sondern auch stetig sei, so dass sie in eine convergente Reihe

$$(7) \quad \varphi(u) = c_0 + c_1 u + c_2 u^2 + \dots + c_v u^v + \dots$$

entwickelt werden kann. Dann ergibt sich für das Integral (1) die Reihe

$$(8) \quad S = c_0 G_0 + c_1 G_1 + c_2 G_2 + \dots + c_v G_v + \dots,$$

in der G_v (für $v = 0, 1, 2, \dots$) das Integral

$$G_v = \int_{-\epsilon x}^{\bar{(0)}} e^{\frac{x}{u}} u^{p+v-1} du$$

bedeutet. Wird hierin

$$u = xu, \quad du = x du$$

substituirt, so ist bei der Integration nach u die untere Grenze gleich dem constanten Werthe $-\epsilon$. Die Variable u durchläuft, von $-\epsilon$ ausgehend, ein Stück der negativen reellen Axe, umkreist den Nullpunkt im positiven Sinne und kehrt längs der negativen reellen Axe zum Punkte $-\epsilon$ zurück. Man findet auf diese Weise die Gleichung

$$G_v = x^{p+v} \int_{-\epsilon}^{\bar{(0)}} e^{\frac{1}{u}} u^{p+v-1} du.$$

Der Radius des Kreises $\mathfrak{K}$, der in (1) einen Theil des Weges von u ausmacht, wurde durch γ bezeichnet. Der Weg von u in der letzteren Gleichung für G_v enthält also einen Kreis um den Nullpunkt mit dem Radius $\frac{\gamma}{x}$. Jedoch kann statt desselben ein Kreis mit einem beliebigen constanten Radius γ' genommen werden, da die Grösse des Kreisradius keinen Einfluss auf den Werth des obigen Integrals hat. Indem man die Gleichung (5) des vorstehenden Aufsatzes „Bemerkungen über das Integral $\bar{\Gamma}(\alpha)$ “*) anwendet (unter der Voraussetzung, dass der Zweig der Potenz u^{p+v-1} in derselben Art, wie dort angegeben ist, bestimmt wird), erhält man, nach Berücksichtigung der Reductionsformel**)

*) Seite 158 dieses Bandes.

**) Seite 515 des 35^{ten} Bandes dieser Annalen.

$$(9) \quad \bar{\Gamma}(a - \nu) = \frac{(-1)^\nu \bar{\Gamma}(a)}{(a-1)(a-2)\dots(a-\nu)},$$

für G_ν den Ausdruck

$$G_\nu = x^{p+\nu} \bar{\Gamma}(-p-\nu) = \frac{x^{p+\nu} \bar{\Gamma}(-p)}{(p+1)(p+2)\dots(p+\nu)}.$$

Demnach entsteht aus (8) die Gleichung

$$(10) \quad \int_{-ex}^{(0)} e^{\frac{x}{u}} u^{p-1} \{c_0 + c_1 u + c_2 u^2 + \dots + c_\nu u^\nu + \dots\} du \\ = x^p \bar{\Gamma}(-p) \left\{ c_0 + \frac{c_1 x}{p+1} + \frac{c_2 x^2}{(p+1)(p+2)} + \dots + \frac{c_\nu x^\nu}{[p+1]_\nu^+} + \dots \right\},$$

in welcher $[p+1]_\nu^+$ die Factorielle

$$(11) \quad [p+1]_\nu^+ = (p+1)(p+2)\dots(p+\nu)$$

bezeichnet.

Als Beispiel möge einerseits

$$\varphi(u) = e^u = 1 + \frac{u}{1} + \frac{u^2}{1 \cdot 2} + \dots,$$

andererseits

$$\varphi(u) = (1-u)^{e-\alpha-1} = 1 + \frac{\alpha-e+1}{1} u + \frac{(\alpha-e+1)(\alpha-e+2)}{1 \cdot 2} u^2 + \dots$$

genommen werden. Dann ergeben sich aus (10), wo gleichzeitig $p = 1 - e$ gesetzt wird, die Gleichungen

$$(12) \quad \int_{-ex}^{(0)} e^{\frac{x}{u}+u} u^{-e} du \\ = x^{1-e} \bar{\Gamma}(e-1) \left\{ 1 + \frac{x}{1 \cdot (2-e)} + \frac{x^2}{1 \cdot 2 \cdot (2-e)(3-e)} + \dots \right\}$$

und

$$(13) \quad \int_{-ex}^{(0)} e^{\frac{x}{u}} u^{-e} (1-u)^{e-\alpha-1} du \\ = x^{1-e} \bar{\Gamma}(e-1) \left\{ 1 + \frac{\alpha-e+1}{1 \cdot (2-e)} x + \frac{(\alpha-e+1)(\alpha-e+2)}{1 \cdot 2 \cdot (2-e)(3-e)} x^2 + \dots \right\}.$$

Ersetzt man in dem Doppelintegral (2) die Constante q durch $q - p$ und substituirt für $\varphi(u)$ die Reihe (7), so erhält man die Gleichung

$$(14) \quad \int_{-ex}^{(0)} e^{\frac{x}{v}} v^{q-p-1} dv \int_{-ev}^{(0)} e^{\frac{v}{u}} u^{p-1} \varphi(u) du \\ = c_0 H_0 + c_1 H_1 + c_2 H_2 + \dots + c_\nu H_\nu + \dots,$$

in der H_ν das Doppelintegral

$$H_\nu = \int_{-ex}^{(0)} e^{\frac{x}{v}} v^{q-p-1} dv \int_{-ev}^{(0)} e^{\frac{v}{u}} u^{p+\nu-1} du$$

bedeutet. Die Substitution

$$u = vu = vxu, \quad v = xv \\ du = vx du, \quad dv = x dv,$$

lässt H , in das Product

$$x^{q+v} \int_{-e}^{\bar{e}^{(0)}} e^{\frac{1}{v}} v^{q+v-1} dv \int_{-e}^{\bar{e}^{(0)}} e^{\frac{1}{u}} u^{p+v-1} du, \\ = x^{q+v} \bar{\Gamma}(-p-v) \bar{\Gamma}(-q-v),$$

übergehen, wofür (nach (9) und (11))

$$\frac{x^{q+v} \bar{\Gamma}(-p) \bar{\Gamma}(-q)}{[p+1]_v^+ [q+1]_v^+}$$

geschrieben werden darf. Also folgt aus (14) die Formel

$$(15) \int_{-ex}^{\bar{e}^{(0)}} e^{\frac{x}{v}} v^{q-p-1} dv \int_{-ev}^{\bar{e}^{(0)}} e^{\frac{v}{u}} u^{p-1} (1 + c_1 u + \dots + c_r u^r + \dots) du \\ = x^q \bar{\Gamma}(-p) \bar{\Gamma}(-q) \left\{ c_0 + \frac{c_1 x}{(p+1)(q+1)} + \dots + \frac{c_r x^r}{[p+1]_v^+ [q+1]_v^+} + \dots \right\}.$$

Auch diese Betrachtung lässt sich leicht auf die analog gebildeten vielfachen Integrale ausdehnen.

Es ist zu erwähnen, dass in der obigen Gleichung (10) die linke Seite in der Art modificirt werden kann, dass die Formel (16) des vorstehenden Aufsatzes — statt der Formel (5) desselben — Anwendung findet. Man bezeichne durch κ_1 und κ_2 zwei reelle, zwischen $\frac{\pi}{2}$ und π liegende Constante und durch e_1, e_2 die Grössen

$$(16) \quad e_1 = e e^{-i\kappa_1}, \quad e_2 = e e^{i\kappa_2},$$

in denen e wiederum eine unendlich kleine positive reelle Zahl bedeutet. Die Producte $e_1 x$ und $e_2 x$ nenne man kurz x_1 und x_2 . Dann

Fig. 2.

bilden die Geraden $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2$, welche vom Nullpunkte aus durch den Punkt x_1 , resp. durch den Punkt x_2 gelegt werden, die (stumpfen) Winkel κ_1, κ_2 mit der Geraden $\mathcal{G}$, die den Nullpunkt mit x verbindet (Fig. 2). Der um den Nullpunkt beschriebene Kreis $\mathcal{R}$ werde von der Geraden $\mathcal{N}_1$ im Punkte n_1 , von der Geraden $\mathcal{N}_2$ im Punkte n_2 und von der Geraden $\mathcal{G}$ im Punkte d getroffen. Wählt man nun für das Integral

$$(17) \quad \int_{e_1 x}^{e_2 x} e^{\frac{x}{u}} u^{p-1} \{c_0 + c_1 u + \dots + c_r u^r + \dots\} du$$

den Integrationsweg (Fig. 2)

$$x_1 n_1 d n_2 x_2$$

(dessen mittlerer Theil in positiver Drehungsrichtung von n_1 zu n_2 längs des Kreises $\mathfrak{K}$ übergeht), so führt die Substitution $u = xu$ zu der Gleichung

$$\int_{e_1 x}^{e_2 x} e^{\frac{x}{u}} u^{p+v-1} du = x^{p+v} \int_{e_1}^{e_2} e^{\frac{1}{u}} u^{p+v-1} du.$$

Die rechte Seite derselben ist mit dem Ausdruck

$$x^{p+v} \bar{\Gamma}(-p-v), = \frac{x^{p+v} \bar{\Gamma}(-p)}{(p+1)(p+2)\dots(p+v)},$$

identisch. Denn die Variable u durchläuft den nämlichen Weg, der in der Formel (16) der vorstehenden Abhandlung als Weg der Variable t vorausgesetzt ist. Also besteht für das obige Integral (17) die Gleichung

$$(18) \quad \int_{e_1 x}^{e_2 x} e^{\frac{x}{u}} u^{p-1} \{c_0 + c_1 u + c_2 u^2 + \dots + c_v u^v + \dots\} du \\ = x^p \bar{\Gamma}(-p) \left\{ c_0 + \frac{c_1 x}{p+1} + \frac{c_2 x^2}{(p+1)(p+2)} + \dots + \frac{c_v x^v}{[p+1]_v} + \dots \right\}.$$

Man kann ferner, wenn der reelle Theil der Constante p positiv ist, als Grenzen des Integrals (17) — nach Formel (24) des vorstehenden Aufsatzes — auch die Grössen $-cx_i$ und $+cx_i$ wählen, ohne hierdurch den Werth des Integrals zu ändern. In diesem Falle, welcher aus dem soeben behandelten für die Werthe $x_1 = x_2 = \frac{\pi}{2}$ entsteht, enthält der Integrationsweg die Hälfte des Kreises $\mathfrak{K}$ (Fig. 2), die wiederum in positiver Drehungsrichtung durchlaufen wird.

Kiel, im Mai 1891.