Ueber die gegen das Weber'sche Gesetz erhobenen Einwände.

Von

C. NEUMANN in Leipzig.

Gegen das Weber'sche Gesetz sind im Ganzen *drei* Einwände erhoben worden, einer von Tait und Thomson, zwei andere von Helmholtz. Zur bequemerem Unterscheidung sind letztere von Helmholtz selber mit (A.) und (B.) bezeichnet worden. Ich beabsichtige diese Einwände im Folgenden der Reihe nach zu besprechen, und darzuthun, dass denselben, wenigstens vorläufig, ein entscheidendes Gewicht *nicht* beizumessen ist.

§ 1.

Der Tait-Thomson'sche Einwand gegen das Weber'sche Gesetz.

Zum ersten Male scheint dieser Einwand von Tait ausgesprochen zu sein in seinem *Sketch of Thermodynamics* (1868, pag. 57 und 76). Sodann findet man denselben Einwand in etwas grösserer Ausführlichkeit in *Thomson and Tait's Natural Philosophy*, und in der von Helmholtz und Wertheim veranstalteten deutschen Uebersetzung dieses Werkes (Braunschweig, 1871). Am letzteren Ort (S. 350) heisst es:

Weber nimmt an, dass ein elektrischer Strom aus der Bewegung von Theilchen zweier Elektrizitätsarten besteht, die den Leitungsdraht in entgegengesetzten Richtungen durchlaufen, und dass diese Theilchen, wenn sie in relativer Bewegung sind, auf andere solche Elektrizitätstheilchen Kräfte ausüben, die von denjenigen verschieden sind, welche sie im Zustande relativer Ruhe ausüben würden. Diese Annahme ist bei dem jetzigen Stande der Wissenschaft auf keine Weise zu rechtfertigen, da wir uns die Hypothese, es existirten zwei elektrische Fluida, unmöglich als richtig denken können, und da die Schlüsse ausserdem *im Widerspruch mit der „Erhaltung der Energie“ stehen*, die wir aus unzähligen experimentellen Gründen als ein allgemeines Naturprincip ansehen. Solche Theorien sind um so gefährlicher, wenn sie zufällig weitere Erscheinungen erklären, wie Weber's Theorie die inducirten Ströme erklärt.

Obwohl nun aus Weber's Schriften*), sowie auch aus meinen eigenen Abhandlungen**) über diesen Gegenstand deutlich hervorgeht, dass von einem Widerspruch des Weber'schen Gesetzes gegen das Princip der Erhaltung der Energie nicht die Rede sein kann, so wird es dennoch angemessen sein, hier von Neuem auf die Sache einzugehen.

Es seien c, η zwei elektrische Massenpunkte mit den Trägheitszahlen m, μ und den Coordinaten x, y, z, ξ, ν, ζ , so dass also die die lebendige Kraft T dieser beiden Punkte den Werth hat:

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2} \mu (\dot{\xi}^2 + \dot{\nu}^2 + \dot{\zeta}^2),$$

wo die Accente Differentiationen nach t , d. i. nach der Zeit andeuten. Wir wollen nun annehmen, dass diese beiden Massenpunkte c und η durch die dem Weber'schen Gesetz entsprechende repulsive Kraft

$$R = \frac{e\eta}{r^2} \left(1 - \frac{r'^2}{c^2} + \frac{2rr''}{c^2} \right),$$

und ausserdem durch beliebige äussere Kräfte sollicitirt seien. Dabei bezeichne r die gegenseitige Entfernung beider Punkte und c die Weber'sche Constante.

Bekanntlich ist für jedes Zeitelement dt die Zunahme der lebendigen Kraft eines materiellen Systems ebenso gross, wie die Summe aller während dieses Zeitelementes auf das System ausgeübten (innern und äussern) Arbeiten. Nach diesem allgemeinen Satze***) der Mechanik ist im gegenwärtigen Fall:

$$(1) \quad dT = Rdr + dS,$$

falls man nämlich unter dS die von den äussern Kräften ausgeübte Arbeit versteht. Diese Formel erfährt eine bedeutende Vereinfachung durch die Bemerkung, dass der Ausdruck Rdr ein vollständiges Differential ist. Setzt man nämlich:

$$W = \frac{e\eta}{r} \left(1 - \frac{r'^2}{c^2} \right),$$

so folgt durch Differentiation:

*) Poggendorff's Annalen Bd. 73, S. 229 (vom Jahre 1848).

**) C. Neumann: *Die Principien der Elektrodynamik*, Tübingen, 1868, Verlag von H. Laupp. Man vergl. auch: Abhandlungen der Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. 1874, S. 101.

***) Die Differentialgleichungen für die Bewegung eines materiellen Punktsystems sind sämmtlich von der Form:

$$m\ddot{x} = X.$$

Denkt man sich jede solche Gleichung in die Form versetzt:

$$d\left(\frac{m\dot{x}^2}{2}\right) = Xdx,$$

und hierauf sämmtliche Gleichungen addirt, so entsteht der obige Satz.

$$dW = -e\eta \left[\left(1 - \frac{r'^2}{c^2}\right) \frac{dr}{r^2} + \frac{2r'dr'}{rc^2} \right].$$

Es ist aber*): $r'dr' = r''dr$. Somit folgt:

$$dW = -\frac{e\eta}{r^2} \left[1 - \frac{r'^2}{c^2} + \frac{2rr''}{c^2} \right] dr,$$

oder was dasselbe ist:

$$dW = -Rdr.$$

Es ist also Rdr in der That ein *vollständiges Differential*, nämlich $= -dW$. Substituiren wir diesen Werth in die für dT aufgestellte Formel (1), so erhalten wir:

$$(2) \quad d(T+W) = dS.$$

Nennen wir also (mit Weber) W das *Potential* der beiden Punkte, so haben wir folgenden Satz:

*Bei einem System von zwei Punkten wird die Summe von lebendiger Kraft und Potential in jedem Zeitelement und folglich auch in jedem endlichen Zeitraum um ebensoviel anwachsen, als die dem System während des betreffenden Zeitraumes von Aussen zugeführte Arbeit beträgt**).*

Ist mithin das System sich selber überlassen, so wird jene Summe von lebendiger Kraft und Potential fortdauernd constant bleiben.

Offenbar werden wir denselben Satz in derselben Weise auch dann abzuleiten im Stande sein, wenn das System aus beliebig vielen Punkten besteht. Somit erkennen wir, dass das unsern Betrachtungen zu Grunde gelegte Weber'sche Gesetz mit dem allgemeinen Axiom oder Princip der Energie in bestem Einklange steht. Denn dieses Princip verlangt, dass für jedes materielle System eine *Energiefunction* existire, d. i. eine vom augenblicklichen Zustande des Systems abhängende Function, welche die Eigenschaft hat, in jedem Zeitraum um ebensoviel anzuwachsen, als die dem System während dieses Zeitraums von Aussen zugeführte Arbeit beträgt. Zugleich erkennen wir, dass diese Energiefunction (welche man kurzweg die *Energie* des Systems zu nennen pflegt) bei Zugrundelegung des Weber'schen Gesetzes durch die Summe von lebendiger Kraft und Potential dargestellt ist.

Das Vorurtheil, dass das Weber'sche Gesetz mit dem Princip der Energie im Widerspruch stehe, dürfte wohl allmählig sich verlieren.

*) Man erhält nämlich successive:

$$r'dr' = r'(r''dt) = r''(r'dt) = r''dr.$$

**) Unter der einem materiellen System von Aussen zugeführten Arbeit soll diejenige Arbeit verstanden werden, welche auf das System ausgeübt wird von den auf dasselbe einwirkenden äussern Kräften.

Auch sagt z. B. Maxwell in seinem bekannten Werke (*Treatise on Electricity and Magnetism*, Oxford 1873, Vol. II., p. 432) mit vollem Recht:

Weber's law is — — consistent with the principle of the conservation of energy in so far that a potential exists. and that is all that is required for the application of the principle by Helmholtz and Thomson.

Helmholtz selber nimmt indessen dieser Frage gegenüber eine etwas andere Stellung ein, wie wir im folgenden Paragraphen sehen werden.

§ 2.

Die betreffenden Aeusserungen von Helmholtz.

In seinem Aufsatz über „die Bewegungsgleichungen der Electricität für ruhende leitende Körper“ bemerkt Helmholtz (Borchardt's Journal Bd. 72, S. 63), dass das *Weber'sche Gesetz* dem *Princip der Energie* insofern sich füge, als es keinen Kreisprocess zulasse, bei welchem Arbeit aus Nichts erzeugt werde, dass es aber diesem Princip widerspreche insofern, als zwei elektrische Theilchen, die nach jenem Gesetz sich bewegen und mit endlicher Geschwindigkeit beginnen, in endlicher Entfernung von einander unendliche lebendige Kraft erreichen, und also eine unendlich grosse Arbeit leisten würden.

Mit grösserer Ausführlichkeit äussert sich Helmholtz über die vorliegende Frage in einem späteren Aufsatz (Monatsber. d. Berl. Akad., 18. April 1872); es heisst dort:

Es war durch die Weber'sche Hypothese eine für die Principien der Naturwissenschaft höchst bedeutende Frage zum ersten Mal zur Prüfung an thatsächlichen Problemen gelangt, nämlich die, ob elementare, nicht weiter zerlegbare Kräfte angenommen werden müssen, die nicht blos von der Lage, sondern auch von der Bewegung der wirkenden Punkte abhängig sind. Ich selbst hatte schon in meiner Schrift: „über die Erhaltung der Kraft“ hervorgehoben, dass Kräfte, die nur von der Entfernung und den Geschwindigkeiten, d. h. also von den Coordinaten der Punkte und deren ersten Differentialquotienten abhängen, das allgemeine Naturgesetz von der Erhaltung der Energie, welches sich auch in den elektrodynamischen Erscheinungen durchaus bestätigt, nothwendig verletzen müssen. Dagegen diesen noch complicirteren Fall, welchen das Weber'sche Gesetz aufstellt, wo die Kräfte von den Coordinaten und den ersten und zweiten Differentialquotienten derselben abhängen, hatte ich damals nicht berücksichtigt, und dieser Fall ist mit einer etwas erweiterten Form des Gesetzes von der Erhaltung der Energie allerdings vereinbar.

Diese Vereinbarkeit wird nun näher explicirt, nämlich dargelegt, dass bei Annahme Weber'scher Kräfte kein Kreisprocess möglich sei, durch welchen Arbeit gewonnen oder vernichtet werde.

In ganz ähnlicher Weise äussert sich Helmholtz bei einer andern Gelegenheit (Borch. J. Bd. 75, S. 36), fährt sodann aber fort:

Man hat sich bei den Untersuchungen darüber, ob das Gesetz der Erhaltung der Energie für gewisse Naturprocesse gültig sei oder nicht, meist damit begnügt, zu untersuchen, ob, wenn ich das analytische Resultat praktisch ausdrücken darf, ein immer wiederholter Cirkelprocess in das Unendliche Arbeit erzeugen oder zerstören kann.

In diesem Sinne nun verletzt die Weber'sche Annahme das Gesetz der Erhaltung der Energie *nicht*; aber sie thut es in einem anderen Sinne — — — —

Der nun folgende Einwand betrifft indessen nicht mehr das *gewöhnliche* Princip der Energie, sondern ein vollkommen *neues* hier zum ersten Mal ausgesprochenes Princip*).

Während nämlich das gewöhnliche Princip der Energie für jedes materielle System die Existenz einer Energiefunction, d. i. die Existenz einer Function verlangt, welche die Eigenschaft hat, in jedem Zeitraum um ebensoviel anzuwachsen, als die dem System während dieses Zeitraumes von Aussen zugeführte Arbeit beträgt, — verlangt jenes neue Princip nicht allein die *Existenz* einer solchen Function, sondern zugleich eine gewisse specielle *Beschaffenheit* derselben, indem es behauptet, der kinetische Theil**) dieser Function müsse *stets positiv* sein.

Ein so vollständig neues und seiner Natur nach hypothetisches Princip kann in hypothetischen Dingen unmöglich als Stütze dienen. Und es wird also der Helmholtz'sche Einwand nur in soweit zu beachten sein, als er etwa, auch *ohne* jenes Princip, einen bestimmten Inhalt noch darbieten sollte.

*, Es unterliegt keinem Zweifel und ist von mir in meinen Schriften auch hin und wieder angedeutet, dass die physikalischen Principien einer festen Formulirung unfähig, mithin ihrer Natur nach dehnbar und biegsam sind. Das *Princip der lebendigen Kraft* hat sich allmählig zum *Princip der Energie* ausgedehnt, und ist möglicherweise einer noch weiteren Ausdehnung fähig. — Demgemäss ist es *a priori* keineswegs unmöglich, dass dieses *Princip der Energie* sich allmählig zu jenem *neuen Helmholtz'schen Princip* erweitere. Nur scheint es mir zweckmässig, vorläufig wenigstens, die beiden Principien mit verschiedenen Namen zu bezeichnen.

**) Unter dem *kinetischen* Theil der Energiefunction ist derjenige Theil derselben zu verstehen, welcher von den Geschwindigkeiten abhängt. — In dem vorher behandelten Beispiel (S. 319) ist die ganze Energiefunction durch $T + W$, d. i. durch

$$T + \frac{e\eta}{r} \left(1 - \frac{v'^2}{c^2}\right)$$

dargestellt. Der *kinetische* Theil dieser Function ist also:

$$T - \frac{e\eta}{r} \frac{v'^2}{c^2};$$

während andererseits ihr noch übriger Theil $\frac{e\eta}{r}$ der *statische* Theil zu nennen sein würde.

Dies ist in der That der Fall. Denn wir können, unter Beiseitesetzung jenes Principis, über den Inhalt des Einwandes uns folgendermassen ausdrücken:

Helmholtz betrachtet die in einem System elektrischer Massenpunkte durch ihre gegenseitigen Einwirkungen entstehenden Beschleunigungen, und zeigt, dass diese Beschleunigungen für gewisse singuläre Zustände des Systems (d. i. für gewisse singuläre Werthe der Coordinaten und Geschwindigkeiten) unter Zugrundelegung des Weber'schen Gesetzes unendlich gross sein würden); — hieraus schliesst Helmholtz auf die Unzulässigkeit des Weber'schen Gesetzes.*

Einer solchen Schlussfolgerung können wir nicht beipflichten. Vielmehr werden wir aus dem von Helmholtz hervorgehobenen Umstande des Eintretens unendlich grosser Beschleunigungen *entweder* auf die Unzulässigkeit des Weber'schen Gesetzes, *oder aber* auf die Unmöglichkeit jener singulären Zustände zu schliessen haben. Entscheiden wir uns für die letztere Alternative, so tritt allerdings die Frage heran, *woher es komme*, dass einige Zustände des elektrischen Punktsystems möglich, andere unmöglich sind.

Auskunft über diese Frage wird man indessen, weil die elektrische Materie niemals allein, sondern stets in Verbindung mit der ponderablen Materie auftritt, nur von einem *universalen* Gesetz verlangen dürfen, welches alle Eigenschaften, Kräfte und Beziehungen *beider* Materien umfasst, und die aufeinanderfolgenden Zustände derselben mit souveräner Gewalt beherrscht. Unmöglich aber darf man eine solche Auskunft von einem Gesetze erwarten, welches, wie das Weber'sche, von all' jenen Eigenschaften, Kräften und Beziehungen nur einen kleinen Theil enthält, und den übrigen Theil (z. B. die Beziehungen zwischen Elektrizität und ponderabler Materie, zwischen Elektrizität und Wärme, Elektrizität und Licht) mehr oder weniger im Dunklen lässt, — von einem Gesetze, welches seiner ganzen Natur nach nur ein *particulaires* sein kann**).

*) Besteht das System aus beliebig vielen festen und n beweglichen Massenpunkten, so erhält man, unter Zugrundelegung des Weber'schen Gesetzes, im Ganzen $3n$ Differentialgleichungen, deren jede die $3n$ Beschleunigungen x'', y'', z'' in linearer Weise enthält. Diese Beschleunigungen können daher unendlich gross werden, sobald die aus ihren Coefficienten gebildete Determinante Null wird. Und in der That dürften die in Rede stehenden singulären Zustände, wenn man sie möglichst allgemein angeben will, charakterisirt sein durch das Verschwinden dieser Determinante.

**) Dass das Weber'sche Gesetz den letzten Grund der elektrischen Erscheinungen vollständig aussprechen solle, ist meines Wissens niemals behauptet worden;

Um die Hauptsache zusammenzufassen: Aus dem von Helmholtz hervorgehobenen Umstande des Eintretens unendlich grosser Beschleunigungen kann nach Belieben *entweder* auf die Unzulässigkeit des Weber'schen Gesetzes, *oder aber* auf die Unmöglichkeit der betreffenden singulären Zustände geschlossen werden. Und es würde also übereilt sein, wenn man ohne hinreichende Gründe die eine Alternative vor der andern bevorzugen und in jenem Umstande ein Argument gegen das Weber'sche Gesetz erblicken wollte.

In der That würde ein Argument gegen dieses Gesetz nur dann vorliegen, wenn sich an irgend einem Beispiel nachweisen liesse, dass jene singulären Zustände *wirklich eintreten können*. Wie wenig ein solcher Nachweis bisher gelungen, werden wir später (in § 5.) erkennen.

§ 3.

Der Helmholtz'sche Einwand (A.) gegen das Weber'sche Gesetz.

Kirchhoff hat zwei Abhandlungen veröffentlicht (Pogg. Ann. Bd. 100 u. Bd. 102), in denen er unter Zugrundelegung des *Weber'schen Gesetzes* und unter Herbeiziehung gewisser *accessorischer Annahmen* bestimmte Differentialgleichungen aufzustellen versuchte für die Bewegung der Elektrizität in dünnen Drähten, sowie auch in körperlichen Leitern von beliebiger Gestalt. Die Art und Weise, in welcher Kirchhoff zu seinen accessorischen Annahmen gelangte, und die Bedeutung, welche er denselben beilegte, erkennen wir deutlich aus einzelnen Stellen seiner ersten Abhandlung. So heisst es z. B. dort gleich zu Anfang (S. 103):

Ich habe versucht, eine allgemeine Theorie der Bewegung der Elektrizität in einem unendlich dünnen Draht aufzustellen, *indem ich gewisse Thatsachen, welche bei constanten elektrischen Strömen und Strömen, deren Intensität sich nur langsam ändert, stattfinden, als allgemein geltend angenommen habe*. Ich erlaube mir hier diese Theorie zu entwickeln, und ihre Anwendung auf einige einfache Fälle auseinander zu setzen.

Weiterhin bemerkt Kirchhoff bei Ableitung einer gewissen Gleichung ausdrücklich (S. 201, Note):

Der Ableitung dieser Gleichung liegt die *Voraussetzung* zu Grunde, dass auch bei dem *nicht* stationären Strom durch jeden Querschnitt

und es ist mir daher unverständlich, wenn Helmholtz (in Borchardt's Journal Bd. 75, S. 45) sich folgendermassen äussert:

„Wenn wir aber das Weber'sche Gesetz als ein wirklich elementares anerkennen sollen, als ein solches, *welches den letzten Grund der betreffenden Erscheinungen vollständig ausspricht*; und nicht nur als einen angenäherten Ausdruck der Thatsachen für gewisse engere Grenzen: so müssen wir verlangen, dass es auch, auf Objecte von den denkbar grössten Dimensionen angewendet, Folgerungen gebe, die physikalisch möglich sind.“

des Leiters gleichzeitig gleiche Mengen der beiden Elektricitäten in entgegengesetzter Richtung sich bewegen. *Wollte man diese Vorstellung nicht festhalten*, so würde aber die Gleichung doch noch gelten; man müsste dann nur die Stromintensität definiren als das arithmetische Mittel aus den Mengen beider Elektricitäten, welche in der Zeiteinheit durch den Querschnitt des Leiters in entgegengesetzter Richtung gehen.

Wir erkennen aus diesen Bemerkungen, dass Kirchhoff jene von ihm eingeführten accessorischen Annahmen als ein ziemlich schwanken- des Fundament betrachtete, dass er eine bestimmte Formulirung und Consolidirung derselben vorläufig kaum für möglich erachtete, vielmehr solches der fortschreitenden Zeit zu überlassen die Absicht hatte. Auch werden wir gern zugeben, dass es in der That besser war, jene accessorischen Annahmen in *dehnbarer und biegsamer* Form zu erhalten, als denselben durch voreiliges und willkürliches Eingreifen ein vielleicht verfehltes Gepräge aufzudrücken.

Solches vorangeschickt, — wenden wir uns nun zu unserm eigentlichen Gegenstande.

Der von Helmholtz (Borch. Journ. Bd. 72, S. 61 und Bd. 75, S. 38) gegen das Weber'sche Gesetz erhobene Einwand (A.) besteht darin, dass die aus diesem Gesetz entspringenden Kirchhoff'schen Differentialgleichungen ein *labiles* Gleichgewicht der in einem Körper vorhandenen Elektricität ergeben, mithin unhaltbar seien. Mit Rücksicht hierauf ist von mir schon früher (Ber. d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. October 1871, S. 477) betont worden, dass die Kirchhoff'schen Differentialgleichungen, ausser auf dem Weber'schen Gesetz, noch auf mancherlei andern *accessorischen Annahmen* beruhen. Hieraus folgt, dass das Weber'sche Gesetz durch ein gegen die Kirchhoff'schen Differentialgleichungen geäußertes Bedenken nicht erschüttert werden kann, — um so weniger, als jene *accessorischen Annahmen* ziemlich complicirter Natur sind und wenig Sicherheit darbieten. Es bestehen nämlich jene *accessorischen Annahmen* in folgenden acht Voraussetzungen.

[A.] *Beindet sich die Elektricität des betrachteten ponderablen (linearen oder körperlichen) Leiters in irgend welcher (gleichförmigen oder ungleichförmigen) Bewegung, so flicssen in jedem Volumelement des Leiters gleiche Quanta positiver und negativer Elektricität mit gleichen Geschwindigkeiten in entgegengesetzten Richtungen.*

[B.] *In jedem Volumelement ist ausser den gleich grossen Quantitäten strömender Elektricität im Allgemeinen auch noch ein gewisses Quantum ruhender Elektricität vorhanden. Diese ruhende Elektricität steht mit der strömenden in einem gewissen Tauschverkehr, der Art, dass bald Theilchen der einen in die Bewegung der anderen hineingearissen werden, bald umgekehrt Theilchen der letzteren aus der Bewegung ausscheiden, um der ersteren sich beizugesellen.*

[C.] Bei einem homogenen Leiter ist die Dichtigkeit der strömenden Elektricität nicht nur für die beiderlei Elektricitäten, sondern auch an allen Stellen und zu allen Zeiten ein und dieselbe, — also eine dem Leiter eigenthümliche Constante.

[D.] Aus der Voraussetzung [A.] folgt, wie noch besonders zu betonen ist, dass die sogenannte freie Elektricität stets in Ruhe ist. Trotzdem kann der Vertheilungszustand der freien Elektricität sich ändern durch ihren Tauschverkehr mit der strömenden Elektricität.

[E.] Sind $+\eta$, $-\eta$ die in einem Volumelement vorhandenen Mengen strömender Elektricität, ist ferner $\eta^{(f)}$ das daselbst vorhandene Quantum freier Elektricität, und sind endlich R_p , R_n , R_f die auf diese Massen $+\eta$, $-\eta$, $\eta^{(f)}$ in ein und derselben Richtung einwirkenden Kräfte, so besitzen die aus diesen Kräften resultirende ponderomotorische Einwirkung R und die aus denselben resultirende elektromotorische Einwirkung $\mathfrak{R}$ folgende Werthe:

$$R = R_p + R_n + R_f,$$

$$\mathfrak{R} = \frac{R_p - R_n}{2\eta}.$$

[F.] Die Geschwindigkeit der strömenden Elektricität ist stets sehr klein gegen c , also sehr klein gegen eine Geschwindigkeit von etwa 59000 Meilen in der Sekunde.

[G.] Die Componenten der elektrischen Strömung sind stets ebenso gross wie die Componenten der einwirkenden elektromotorischen Kraft, letztere noch multiplicirt mit einer gewissen Constanten k (der sogenannten Leitungsfähigkeit).

[H.] Ist der betrachtete Conductor von einem isolirenden Medium umgeben, und bezeichnet man die in ihm vorhandenen elektrischen Strömungscomponenten mit u , v , w , andererseits die Dichtigkeit der freien Elektricität an seiner Oberfläche mit e , so findet die Relation statt:

$$\frac{\partial e}{\partial t} = -(u \cos \alpha + v \cos \beta + w \cos \gamma),$$

wo α , β , γ die Richtungswinkel der inneren Normale bezeichnen*).

Ich will gern einräumen, dass eine gewisse Willkühr, eine gewisse Wahl**) zwischen vielleicht gleichberechtigten, gleichgut sich eignenden

*) Man möge sich nicht wundern, diese Formel mitaufgenommen zu sehen unter die Zahl der hypothetischen Voraussetzungen. In der That knüpfen sich (wie ich im folgenden § zeigen werde) an diese Formel sehr ernstliche Bedenken; und diese Bedenken sind um so schwerwiegender, als sie nicht nur den ungleichförmigen, sondern auch den gleichförmigen Zustand betreffen.

**) Hinsichtlich der Erwägungen, welche bei dieser Auswahl maassgebend waren, sowie auch hinsichtlich der Willkühr, welche dabei hin und wieder nicht

Vorstellungen bei Formulirung dieser Voraussetzungen [A.], [B.], . . . [H.] nicht zu vermeiden gewesen ist; und hiedurch erklärt sich, dass dieselben von denen, welche Weber und später Lorberg angedeutet haben, in wesentlichen Punkten abweichen*). — — Mag man nun aber jene accessorischen Voraussetzungen so oder so formuliren, — immer wird man einräumen müssen, dass dieselben nicht minder hypothetisch sind, als das Weber'sche Gesetz selber; und es bleibt daher stets die Frage, ob der von Helmholtz gegen die Kirchhoff'schen Differentialgleichungen erhobene Einwand dem Weber'schen Gesetz oder jenen accessorischen Voraussetzungen aufzubürden sei. Und die Expositionen des folgenden § dürften in der That zeigen, dass einige von diesen accessorischen Voraussetzungen recht bedenklicher Natur sind.

§ 4.

Einige Bemerkungen zum Vorhergehenden.

I. Ueber die Voraussetzung [A.].

Wollte man in der Hydrodynamik bei Einführung der bekannten Bedingungsgleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

die gleichzeitige Einführung der entsprechenden Kräfte

$$\frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \frac{\partial p}{\partial z}$$

unterlassen, so würde man zu Formeln gelangen, die mit sich selber in Widerspruch sind. Aus diesem und andern Beispielen (vgl. diese Annalen, Bd. VI, S. 335—336) resultirt der allgemeine Satz:

Soll die Bewegung eines materiellen Systems einer bestimmten Bedingungsgleichung unterworfen gedacht werden, so ist (falls man innere Widersprüche vermeiden will) nicht nur die Einführung der Bedingungsgleichung selber, sondern gleichzeitig auch die Einführung gewisser Kräfte erforderlich, welche für die Aufrechterhaltung jener Bedingungsgleichung Sorge tragen.

Adoptirt man also z. B. die in [A.] genannte Voraussetzung, dass in einem elektrischen Strom stets gleiche Quanta der beiderlei Elektricitäten mit gleichen Geschwindigkeiten in entgegengesetzten Richtungen

zu vermeiden war, verweise ich auf eine meiner letzten Arbeiten (Abh. d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. 1874, S. 128—151). In der That sind die dort mit [A.], [B.], . . . [G.] bezeichneten Annahmen, abgesehen von [F.], vollkommen identisch mit denjenigen, welche hier in gleicher Weise bezeichnet sind.

*) Näheres hierüber findet man in dem schon genannten Aufsatz (Abh. d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. 1874, S. 149).

fließen, so wird man gezwungen sein, daneben auch gewisse *Kräfte* zu adoptiren, welche für ein solches Gleichsein Sorge tragen. — Dies ist bisher noch *niemals* geschehen, auch wird man die analytischen Ausdrücke jener hinzuzufügenden Kräfte nicht gut angeben können, so lange man über jene Voraussetzung [A.] keine deutlicheren Vorstellungen als bisher sich gebildet hat.

II. Ueber die Voraussetzung [F.].

Es mag hier beiläufig gestattet sein, eine kurze Andeutung zu geben über die *Gründe*, durch welche die Voraussetzung [F.] geboten ist*). Die Kraft R , mit welcher zwei Elektricitätstheilchen e und η in der Entfernung r auf einander wirken, kann bekanntlich, falls man $\sqrt{r} = \psi$ setzt, dargestellt werden durch folgenden Ausdruck:

$$R = e\eta \left[\frac{1}{r^2} + \frac{8}{c^2} \frac{d\psi}{dr} \frac{d^2\psi}{dt^2} \right].$$

Mit Hülfe dieser Formel wollen wir diejenige elektromotorische Wirkung zu berechnen suchen, welche ein in dem betrachteten Körper vorhandenes Theilchen e freier Elektricität hervorbringt in irgend einem Volumelement des Körpers. Die in diesem Volumelement vorhandenen Quantitäten *strömender* Elektricität seien bezeichnet mit η und $-\eta$. Jenes Theilchen e befindet sich, nach der Voraussetzung [D.], im Zustande der *Ruhe*; die Entfernung r zwischen e und η wird daher *nur* deshalb eine Function der Zeit sein, weil η in Bewegung ist. Bezeichnen wir also die Bahn der Masse η mit σ , ferner ihre Geschwindigkeit und Beschleunigung mit σ' und σ'' , so hat die von e auf η ausgeübte Kraft R_p den Werth:

$$R_p = e\eta \left[\frac{1}{r^2} + \frac{8}{c^2} \frac{d\psi}{dr} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \sigma^2} \sigma'^2 + \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} \sigma'' \right) \right].$$

Da es sich hier nur um Andeutungen handeln soll, so wollen wir einen möglichst einfachen Fall annehmen, nämlich voraussetzen, dass die Massen η und $-\eta$ nicht nur entgegengesetzte Geschwindigkeiten, sondern auch entgegengesetzte Beschleunigungen besitzen**). Alsdann ergibt sich die von e auf $-\eta$ ausgeübte Kraft R_n aus dem vorstehenden Ausdruck unmittelbar dadurch, dass man η , σ' , σ'' mit $-\eta$, $-\sigma'$, $-\sigma''$ vertauscht. Also:

$$R_n = -e\eta \left[\frac{1}{r^2} + \frac{8}{c^2} \frac{d\psi}{dr} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \sigma^2} \sigma'^2 - \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} \sigma'' \right) \right].$$

*) Schon deswegen, weil die Voraussetzung [F.] abweichend ist von der früher von mir proponirten (vergl. die zweite Note S. 326).

**) Im Allgemeinen ist solches *keineswegs* der Fall, vergl. den schon genannten Aufsatz (Abh. d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. 1874, S. 137).

Die von e auf das betrachtete Volumelement ausgeübte elektromotorische Wirkung $\mathfrak{K}$ hat, nach Voraussetzung $[E.]$, den Werth:

$$\mathfrak{K} = \frac{R_p - R_n}{2\eta};$$

und hieraus folgt durch Substitution der für R_p , R_n gefundenen Ausdrücke sofort:

$$\mathfrak{K} = e \left[\frac{1}{r^2} + 8 \frac{d\psi}{dr} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \sigma^2} \left(\frac{\sigma'}{c} \right)^2 \right].$$

Diese Formel aber reducirt sich auf die von Kirchhoff angewandte Formel:

$$\mathfrak{K} = e \frac{1}{r^2}$$

offenbar nur dann, wenn man $\frac{\sigma'}{c}$ als sehr klein betrachtet, also nur dann, wenn man die Geschwindigkeit σ' der elektrischen Strömung als sehr klein betrachtet im Vergleich mit c .

III. Ueber die Voraussetzung $[H.]$.

Denken wir uns eine isolirt und fest aufgestellte Metallkugel, um welche ein elektrischer Massenpunkt mit *constanter Geschwindigkeit* im Kreise herumläuft, so wird im Innern der Metallkugel allmählig ein stationärer Zustand eintreten. Zur Zeit dieses stationären Zustandes ist die Strömung u , v , w in solchen Punkten der Kugel, die dicht an der Oberfläche liegen, offenbar *tangential*, also senkrecht zur Normale α , β , γ . Somit folgt aus der (auf S. 326 angegebenen) Formel $[H.]$:

$$\frac{\partial e}{\partial t} = 0$$

d. i.

e unabhängig von der Zeit.

Dies aber ist unmöglich; denn es unterliegt keinem Zweifel, dass die elektrische Dichtigkeit e an einer gegebenen Stelle der Kugelfläche in Folge der Bewegung des elektrischen Massenpunktes fortwährend (und zwar periodisch) variirt.

Hieraus folgt, dass die Formel $[H.]$ mit irgend welchem Fehler behaftet ist. Und dieser Fehler liegt offenbar darin, dass an der Oberfläche des (von einem isolirenden Medium umgebenen) Conductors im Allgemeinen zwei Processe stattfinden, nämlich *erstens* eine elektrische Communication zwischen jedem Oberflächenelement und dem angrenzenden Volumelement, und *zweitens* eine elektrische Communication zwischen je zwei aneinander grenzenden Oberflächenelementen; — während doch bei Ableitung jener Formel nur der *erste* Process berücksichtigt ist*).

*) Vergl. meinen Aufsatz (Abh. d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. 1874, S. 135).

Um diesen Fehler zu vermeiden, eröffnen sich, wie es scheint, zwei verschiedene Wege. Der *eine* besteht darin, dass man neben den Strömungen u, v, w der *innern* Elektricität noch besondere Strömungen der *Oberflächen*-Elektricität in die Rechnung einführt; so dass man alsdann im Ganzen *zweierlei* Strömungen hat, ebenso wie ja schon längst *zweierlei Dichtigkeiten* (ϵ und e , nach Kirchhoff) im Gebrauch sind.

Ein *zweiter* Weg würde darin bestehen, dass man die Annahme der *unendlich dünnen* elektrischen Oberflächenschichten überhaupt fallen lässt, diese Annahme also für eine mathematische Abstraction erklärt, welche in der *Elektrostatik* gute Dienste leiste, in der *Elektrodynamik* aber unbrauchbar sei.

§ 5.

Der Helmholtz'sche Einwand (B.) gegen das Weber'sche Gesetz.

Dieser Einwand (Borchardt's Journal, Bd. 72, S. 63) bestand in seiner ursprünglichen Form darin, dass die Beschleunigungen, welche zwei elektrische Massenpunkte nach dem Weber'schen Gesetz einander zuertheilen, bei einer gewissen sehr kleinen Entfernung *unendlich gross* sein würden. Ein solcher Einwand kann indessen beseitigt werden durch die schon vor fünfzehn Jahren bei meinen Untersuchungen über die magnetische Drehung der Polarisationssebene des Lichtes von mir gemachte Annahme*), dass das Weber'sche Gesetz, ähnliche wie das Newton'sche, für *sehr kleine* Entfernungen einer gewissen Modification bedürfe. Es werden alsdann, falls man das Weber'sche Gesetz durch die Formel ausdrückt:

$$R = e\eta \left[\frac{d\varphi}{dr} + \frac{8}{c^2} \frac{d\psi}{dr} \frac{d^2\psi}{dt^2} \right],$$

unter φ und ψ Functionen von r zu verstehen sein, welche nur für *beträchtliche* Entfernungen mit $\frac{1}{r}$ und $\sqrt{r}$ identisch, hingegen für *sehr kleine* Entfernungen von noch unbekannter Beschaffenheit sind.

Um nun diesen Fall *sehr kleiner* Entfernungen zu vermeiden, hat Helmholtz (Borchardt's Journal, Bd. 75, S. 39) zu zeigen versucht, dass der von ihm erhobene Einwand *bestehen bleibe*, wenn man den einen der beiden elektrischen Massenpunkte durch eine elektrische Kugelfläche ersetzt.

Man denke sich einen elektrischen Massenpunkt, welcher im Innern einer gleichmässig mit Elektricität belegten Kugelfläche eine beliebige

*) Vergl. meine Habilitationsschrift Halle 1858, namentlich aber meine ausführlichere Schrift über diesen Gegenstand: „*Die magnetische Drehung der Polarisationssebene des Lichtes*“ Halle 1863. Weitere Bemerkungen hierüber findet man in meinem letzten Aufsatz (Abh. d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. 1874, S. 113).

Lage besitzt, und von dieser Kugelfläche nach dem Weber'schen Gesetz sollicitirt wird. Der Helmholtz'sche Einwand (B.) in seiner zweiten Form besteht alsdann darin, dass dieser Punkt in einem gewissen idealen Falle durch die Einwirkung der Kugelfläche eine *unendlich grosse* Beschleunigung erhalten müsste. Ich nenne jenen Fall einen idealen, weil seine Realisirbarkeit vorläufig in Frage steht. In der That scheint ein ungefährer Ueberschlag zu ergeben, dass der Fall nur dann eintreten könnte, wenn der Radius der Kugelfläche über 400 Sonnenweiten beträgt*).

*Nach meinem Dafürhalten sind nun aber als Controle eines noch hypothetischen physikalischen Gesetzes nur solche Fälle anwendbar, deren Wirklichkeit oder Realisirbarkeit ausser Zweifel steht. Denn wollte man ideale Fälle (d. i. solche, deren Realisirbarkeit noch nicht dargethan ist) als Controle gelten lassen, so würde man selbst das Newton'sche Gesetz für unzulässig erklären müssen, weil dasselbe zu absurden Folgerungen führt, sobald man sich den gauzen Weltraum mit Materie erfüllt denkt, welche mit überall gleicher Dichtigkeit nach allen Seiten ins Unendliche reicht**).*

Demgemäss kann nach meiner Ansicht dem in Rede stehenden Helmholtz'schen Einwande eine ernstliche Bedeutung nicht früher beigemessen werden, als bis die Realisirbarkeit des dabei als Prüfstein benutzten Falles wirklich dargethan sein wird.

§ 6.

Ueber die in neuerer Zeit an Stelle des Weber'schen Gesetzes in Vorschlag gebrachten Theorien.

Es sind hier namentlich diejenigen Theorien zu erwähnen, welche Helmholtz proponirt hat, daneben auch diejenige, welche von mir selber aufgestellt worden ist.

Die ursprünglich (1870) von Helmholtz angegebene Theorie geht bekanntlich aus von der Existenz eines elementaren Potentials***)

*) Ich verstehe hier unter Sonnenweite den Abstand zwischen Sonne und Erde. Uebrigens findet man Näheres über die hier gemachten Angaben in meinem mehrfach erwähnten Aufsatz (Abh. d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. 1874, S. 91—97). Ich benutze diese Gelegenheit, um ein kleines Versehen zu corrigiren. In jenem Aufsätze sind nämlich auf S. 95 die beiden ersten Zeilen des zweiten Absatzes durch folgende zu ersetzen:

Nach Weber ist $c > 59000$ Meilen; ferner ist $g < 31$ Fuss, d. i. $g < \frac{1}{770}$ Meilen. Somit folgt etc. etc.

Im Uebrigen bleibt Alles ungeändert, so dass also diese Verbesserung auf die dort erhaltenen Resultate keinerlei Einfluss hat.

**) L. c. S. 97, 98.

***) Ich verstehe hier unter *elementarem Potential* einen von den betrachteten Stromelementen abhängenden Ausdruck, welcher durch seine Differentiation

und leugnet das Ampère'sche Gesetz. Neben dieser Theorie (und ohne dieselbe einstweilen aufzugeben) ist dann später (1874) von Helmholtz eine zweite Theorie angedeutet worden, welche umgekehrt das Ampère'sche Gesetz als Grundlage benutzt, und die Existenz eines elementaren Potentials aufgiebt.

I. Die ursprüngliche Helmholtz'sche Theorie, von 1870.

Borchardt's Journal Bd. 72.

Dass diese ursprüngliche Theorie mit den elektrodynamischen Rotationserscheinungen in diametralem Widerspruch stehe*), und unter dem Gewicht dieser experimentellen Thatsachen zusammenbrechen werde, ist von mir bereits mehrfach bemerkt worden. Und dass ich auf die etwas künstlichen und wenig ansprechenden Stützen, welche — diesen Bemerkungen gegenüber — von Herrn Helmholtz zur Rettung seiner Theorie hervorgesucht wurden, mich näher einzulassen, *nicht für nöthig erachtete*, dürfte um so mehr gerechtfertigt sein, als Herr Helmholtz schliesslich seine ganze Theorie *zurückgezogen* hat. Denn dass die Worte, mit denen Herr Helmholtz in den Monatsberichten der Berliner Akademie vom 17. Juli 1875 (S. 412) über diesen Gegenstand sich explicirt, eine *vollständige Zurücknahme* seiner Theorie involviren, — darüber dürfte wohl Niemand in Zweifel sein.

II. Die spätere Helmholtz'sche Theorie, von 1874.

Borchardt's Journal Bd. 78.

Diese spätere Theorie ist nahe verwandt mit derjenigen, welche schon einige Jahre früher von mir selber entwickelt wurde, in meinem Werk: „*Die elektrischen Kräfte*“. Um näher hierauf eingehen zu

nach der räumlichen Lage die zwischen den beiden Elementen stattfindenden ponderomotorischen Wirkungen ergibt.

*) Etwas *später* wurde Aehnliches auch von Riecke bemerkt, nur in weniger bestimmten Umrissen. Denn während mein Einwand gegen die Helmholtz'sche Theorie auf *bereits bekannten Thatsachen* (den elektrodynamischen Rotationserscheinungen) basirte, machte Riecke seine Entscheidung zu Gunsten oder Ungunsten jener Theorie abhängig vom Ausfall eines gewissen *erst noch anzustellenden* Experimentes, dessen Einrichtung er näher beschrieb. Wenn man daher *meinen* Einwand nur beiläufig zu erwähnen, und hauptsächlich vom Riecke'schen Einwande zu sprechen pflegt, so dürfte diese Ausdrucksweise als eine (absichtliche oder unabsichtliche) *Entstellung der Thatsachen* zu bezeichnen sein. — Man findet meine betreffenden Aeusserungen in den Ber. d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. vom 3. Aug. 1872, S. 149 und 157 (S. 8 und 16 der Separatabzüge), ferner in den Mathem. Annalen Bd. V, S. 607 und 614, endlich in meinem Werke „*Die elektrischen Kräfte*“, S. X der Einleitung und S. 78, 79. Andererseits findet man die Aeusserungen von Riecke in den Nachr. d. Kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, vom 14. August 1872.

können, sei zunächst erinnert an die von mir bei früherer Gelegenheit mit *Delta* und *Epsilon* bezeichneten Voraussetzungen. Dieselben lauten:

Voraussetzung Delta. — Bezeichnet D_v ein Volumelement eines körperlichen Inducenten, und denkt man sich die in D_v vorhandene (der Richtung und Stärke nach variable) Strömung i in Componenten u, v, w zerlegt nach drei aufeinander senkrechten mit der ponderablen Masse des Inducenten starr verbundenen Axen, so kann die von i auf irgend ein äusseres Object ausgeübte elektromotorische Kraft ersetzt werden durch die von u, v, w auf jenes Object ausgeübten Kräfte.

Voraussetzung Epsilon. — Ein Stromelement D_v , welches in Bezug auf Ort, Stromrichtung und Stromintensität constant bleibt, kann in einem ruhenden Leiterelement D_s keine elektromotorische Kraft hervorbringen.

Wenn Herr Helmholtz diese beiden Voraussetzungen als richtig anerkennen wollte, so würde er gezwungen sein, die in seinen Formeln enthaltene Constante k gleich -1 zu setzen; wodurch seine Theorie vollkommen identisch werden würde mit der von mir in den „Elektrischen Kräften“ entwickelten. Auch unterliegt es keinem Zweifel, dass Herr Helmholtz der Voraussetzung *Delta* wirklich beipflichtet.

Der einzige Unterschied zwischen beiden Theorien besteht also in der Hypothese *Epsilon*. Nun kann man allerdings über diese Hypothese *Epsilon* verschiedener Ansicht sein. Eine absolute Nöthigung zu ihrer Annahme liegt nicht vor. Wenigstens sind solche Theorien, welche, wie z. B. die Weber'sche, die elektrodynamischen Kräfte nicht von den *localen Geschwindigkeitszuwüchsen* des elektrischen Fluidums, sondern von den *Beschleunigungen* der elektrischen Theilchen abhängig machen, dieser Hypothese von selber überhoben. Wie aber gerade Herr Helmholtz, ohne seiner Theorie eine *neue unerwartete Wendung* zu geben, die Annahme dieser Hypothese wird vermeiden können, — ist vorläufig schwer zu begreifen. Entschliesst sich aber Herr Helmholtz zu diesem Schritt, so wird seine Theorie mit der meinigen identisch.

Um die Hauptsache zusammenzufassen: Durch Verbesserung gewisser Uebereilungen (nämlich durch Berücksichtigung gewisser zu Anfang übersehener experimenteller Thatsachen) ist Herr Helmholtz von seiner *ursprünglichen* Theorie (1870) zu seiner *späteren* Theorie (1874) hingedrängt worden; wodurch bereits eine *bedeutende Annäherung* an die von mir entwickelte Theorie stattgefunden hat. Und aller Wahrscheinlichkeit nach wird Herr Helmholtz *allmählig* durch weitere Berichtigungen schliesslich zu einer Theorie gedrängt werden, welche mit der meinigen *völlig identisch* ist.

Diese letztere*) giebt für das ponderomotorische und elektromotorische Elementargesetz *einfachere* Ausdrücke**), als die Weber'sche Theorie, steht aber der Weber'schen insofern nach, als es mir bisher nicht gelungen ist, jene einfacheren Elementargesetze auf eine gemeinschaftliche Quelle zurückzuführen.

Will man also für die elektrostatischen und elektrodynamischen Erscheinungen eine Theorie haben, welche in all' ihren Betrachtungen von einer gemeinschaftlichen Quelle ausgeht, und welche gleichzeitig in den experimentellen Thatsachen kein handgreifliches Veto findet, so scheint bis zum heutigen Tage die Weber'sche die einzige zu sein, welche diesen Anforderungen entspricht.

§ 7.

Ueber die Anzahl der elektrischen Materien.

Thomson und Tait bemerken in dem oben (S. 318) mitgetheilten Citat, dass man die Hypothese, es existirten zwei elektrische Fluida, unmöglich als richtig ansehen könne. Obwohl nun eine weitere Discussion dieser Frage, in Ermangelung fester Anhaltspunkte, sehr unfruchtbar ausfallen würde, so möchte ich doch die Gelegenheit benutzen zu Erörterung einer *verwandten* Frage, indem ich dabei ausgehe von den bekannten Thatsachen der sogenannten *unipolaren Induction*.

Wollen wir die elektromotorische Einwirkung eines um seine Axe drehbaren cylindrischen Magneten auf ein *fest aufgestelltes* lineares Leiterelement *Ds* näher angeben, so haben wir zwei Fälle zu unterscheiden:

Erster Fall. Der Magnet steht still. — Alsdann ist die von ihm in Ds inducirte elektromotorische Kraft stets gleich Null.

Zweiter Fall. Der Magnet rotirt. — Alsdann wird die von ihm in Ds inducirte elektromotorische Kraft einen Werth besitzen, der (bei geeigneter Aufstellung des Elementes Ds) von Null verschieden ist.

Man wird schwerlich bezweifeln, dass diese Sätze auch dann noch gültig bleiben, wenn man den Magneten durch ein *Solenoid* (von end-

*) Man findet diese von mir entwickelte Theorie in ihren *Hauptumrissen* kurz angedeutet in den Berichten der Kgl. Sächs. Ges. August 1872, S. 157—164 (S. 16—23 der Separatabdrücke), ferner in den Mathem. Annalen Bd. VI, S. 614—624; sodann aber *ausführlicher* entwickelt theils in meinem Werke: „*Die elektrischen Kräfte*“ (Leipzig, 1873), theils in den Abb. d. Kgl. Sächs. Ges. 1873, S. 419—503. — Ausserdem habe ich die Beziehung dieser Theorien zu der in Rede stehenden Helmholtz'schen Theorie (von 1874) näher dargelegt in den Ber. d. Kgl. Sächs. Ges., August 1874, S. 145, 146.

**) Genauer gesprochen, wird nur der Ausdruck des *elektromotorischen* Elementargesetzes ein einfacherer, während der des *ponderomotorischen* für beide Theorien derselbe ist, nämlich der von Ampère gegebene.

lichem Durchmesser), resp. durch einen *einzelnen Stromring* ersetzt. Denken wir uns also einen kreisförmigen Metallring, welcher drehbar ist um seine geometrische Axe (d. i. um die in seinem Mittelpunkt auf seiner Ebene errichtete Normale), und denken wir uns diesen Metallring von einem constanten elektrischen Strom durchflossen, so werden hinsichtlich der elektromotorischen Wirkung dieses Ringes auf ein *fest aufgestelltes* Leiterelement *Ds* wiederum zwei Fälle zu unterscheiden sein:

(α) *Erster Fall. Der Ring steht still. — Alsdann ist die von ihm in Ds inducirte elektromotorische Kraft gleich Null.*

(β) *Zweiter Fall. Der Ring rotirt. — Alsdann wird die von ihm in Ds inducirte elektromotorische Kraft einen Werth besitzen, der (bei geeigneter Aufstellung des Elementes Ds) von Null verschieden ist.*

Wollte man nun annehmen, dass die Wirkungen des elektrischen Stromes von *einer einzigen* Materie herrühren, die mit einer gewissen Geschwindigkeit in der Strombahn dahinfließt, so würde aus dem *ersten* Falle folgen, dass diese Materie bei einer constanten kreisförmigen Bewegung in dem linearen Leiter keine elektromotorische Kraft erzeugt, und sie dass also auch im *zweiten* Falle, wo sie offenbar wiederum eine constante kreisförmige Bewegung, nur von etwas anderer Winkelgeschwindigkeit, besitzt*), eine elektromotorische Kraft zu induciren unfähig sei, — was dem Satze (β) widerspricht. Somit folgt, dass jene Annahme, die Wirkung eines elektrischen Stromes rühre nur von *einer einzigen* Materie her, unzulässig ist; und wir gelangen daher zu folgendem Resultat:

Ist überhaupt die Vorstellung richtig, dass die Wirkungen des elektrischen Stromes irgend welchen Materien zuzuschreiben sind, die mit gewissen Geschwindigkeiten in der Strombahn dahinfließen, so sind, falls man einen offenbaren Conflict mit den Sätzen (α), (β) vermeiden will, mindestens zwei solche Materien anzunehmen.

In der That überzeugt man sich leicht davon, dass jener Conflict vermieden wird, wenn man (im Einklange mit der gewöhnlichen *dualistischen* Anschauungsweise) zwei Materien sich vorstellt, welche in der Strombahn mit gleichen Geschwindigkeiten in entgegengesetzten Richtungen dahinfließen, und dass derselbe andererseits auch dann vermieden wird; wenn man (der von mir proponirten *unitarischen* Anschauungs-

*) Die Winkelgeschwindigkeit dieser kreisförmigen Bewegung würde nämlich im *ersten* Fall $= \frac{v}{r}$, im *zweiten* $= \frac{v}{r} + \Omega$ sein, falls v die Strömungsgeschwindigkeit der Materie, r den Radius der kreisförmigen Strombahn, und Ω die Winkelgeschwindigkeit bezeichnet, mit welcher diese Bahn rotirt.

weise Folge leistend) zwei Materien annimmt, von welchen nur die eine in Strömung begriffen, die andere aber mit der Strombahn unbeweglich verbunden ist.

§ 8.

Ueber einige Bemerkungen des Herrn Helmholtz.

I. Ueber einen dem Verfasser zur Last gelegten Rechnungsfehler.

Ich habe überall, wo ich mit Herrn Helmholtz verschiedener Ansicht war, die bei einer wissenschaftlichen Discussion gebotenen Grenzen mit grosser Sorgfalt einzuhalten mich bemüht; kann aber nicht behaupten, dass Herr Helmholtz seinerseits dasselbe Bestreben an den Tag gelegt hätte. Denn wenn Herr Helmholtz z. B. in Borchardt's Journal (Bd. 75, S. 55, Anmerkung) in Betreff eines von mir aufgestellten Satzes sagt:

Ich *erstaunte* nicht wenig, als ich diesen Satz las, denn in den Hypothesen, von denen Herr C. Neumann ausging, und auf welche seine „Deduction“ gegründet ist, war über die mechanischen Beziehungen zwischen der sich bewegenden — — Elektrizität und der Materie des Leiters nichts weiter angenommen, als dass die Elektrizität der Reibung des Leitungswiderstandes — — — unterworfen sei. Dass nun durch blosser Rechnung eine neue mechanische Beziehung zwischen beiden, zu welcher in den Prämissen kein Grund gelegt war, erzeugt werden sollte, machte mich *neugierig*, das Verfahren kennen zu lernen, welches so etwas leisten konnte. *Der Fehler ist einfach folgender:*
Die Gleichung — — — — —

so muss man doch wohl eingestehen, dass derartige Expectorationen die genannten Grenzen *überschreiten*, — ganz abgesehen davon, dass der Angriff ein *durchaus ungerechter* ist.

Ich habe meinerseits diesen Angriff des Herrn Helmholtz dadurch beantwortet, dass ich den von ihm getadelten Aufsatz vor etwa zwei Jahren in etwas ausführlicherer Gestalt von Neuem publicirte (in den Abh. d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. 1874), und bei dieser Gelegenheit eine kurze Notiz hinzufügte (l. c. p. 163), aus welcher hervorgeht, dass der in Rede stehende Angriff lediglich auf ein *Versehen des Herrn Helmholtz* zurückkommt. Ich erwartete damals, dass Herr Helmholtz wenigstens für nöthig erachten werde, sich in Betreff seiner irrthümlichen und mich persönlich verletzenden Aeusserungen zu entschuldigen. Eine solche Entschuldigung ist indessen bis zum heutigen Tage *nicht* erfolgt*).

*) Und leider muss ich hinzufügen, dass ich Aehnliches auch bei *andern* Aeusserungen zu bemerken habe, die Herr Helmholtz in Betreff meiner Schriften sich erlaubt hat.

II. Ueber das Energie- und Potentialgesetz.

Im Verlaufe meiner elektrodynamischen Untersuchungen habe ich gelegentlich (Ber. d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. October 1871) die Consequenzen des Weber'schen Gesetzes unter Zugrundelegung einer gewissen unitarischen Anschauungsweise zu entwickeln gesucht. Dabei gelangte ich zu dem Resultat, dass das Princip der lebendigen Kraft im Gebiet der elektrischen Kräfte nicht durch *einen*, sondern durch *zwei* Sätze dargestellt sei, welche ich zur bequemern Unterscheidung als *Energie*- und *Potentialgesetz* bezeichnete. Zugleich bemerkte ich (l. c. p. 472), dass diese beiden Gesetze genau in derselben Form auch aus der Helmholtz'schen Theorie (von 1870) sich ableiten liessen, nur mit dem Unterschiede, dass das Potentialgesetz aus der Helmholtz'schen Theorie sich als *allgemein gültig* ergebe, während seine Ableitung aus *meiner* Theorie bis zu jener Zeit nur für gewisse specielle Fälle gelungen wäre. Mit Bezug hierauf hat nun Herr Helmholtz (Borchardt's Journal, Bd. 75, p. 39) folgende Bemerkung gemacht:

Gegen meinen Einwand (A.) hat Herr C. Neumann nur im Allgemeinen geltend gemacht, die Kirchhoff'schen Differentialgleichungen seien noch auf andere, nicht genau präcisirte Hypothesen gegründet, ohne aber die ihm hypothetisch erscheinenden Punkte näher zu bezeichnen. Was ich aus diesen gefolgert hätte, gelte nicht gegen das Weber'sche Gesetz. Uebrigens hat er selbst aus seiner eignen neuen Annahme keine Differentialgleichungen der elektrischen Bewegung hergeleitet, sondern erklärt nur auf S. 472 seines Aufsatzes, dass das zur Aufstellung dieser Gleichungen nöthige „Potentialgesetz“ bisher für andere als geschlossene lineare Strömungen noch nicht eruiert worden sei. Demgemäss ist denn Herr C. Neumann auch den Beweis schuldig geblieben, dass seine neue Modification des Weber'schen Gesetzes zu stabilem Gleichgewicht der ruhenden Elektrizität in Leitern führe.

Dass die Kirchhoff'schen Differentialgleichungen ausser auf das Weber'sche Gesetz noch auf andere bisher nicht genau präcisirte Hypothesen gegründet sind, ist durch die Expositionen des gegenwärtigen Aufsatzes (vgl. S. 325 ff.) hinreichend constatirt, zugleich also auch constatirt, dass ein Einwand gegen jene Differentialgleichungen noch nicht als ein Einwand gegen das Weber'sche Gesetz anzusehen ist.

Andererseits ist es wohl möglich, dass die Kirchhoff'schen Differentialgleichungen ein labiles Gleichgewicht der Elektrizität in leitenden Körpern ergeben, mithin unhaltbar seien*). Auch will ich gern ein-

*) Eine *bestimmte* Aeussderung hierüber möchte ich vorläufig vermeiden, aus Gründen, die ich an einer andern Stelle näher entwickelt habe (Ber. d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss., August 1874, S. 147—150).

räumen, dass Herr Helmholtz sich mit Scharfsinn und Erfolg bemüht habe, andere Differentialgleichungen aufzufinden, die von diesem Uebelstande frei sind. Desgleichen will ich anerkennen, dass ich selber mit der Aufstellung solcher Differentialgleichungen bisher mich *nicht* beschäftigt habe. — Nur bitte ich, aus diesem letztern Umstande, der eine nothwendige Consequenz des von mir verfolgten wissenschaftlichen Planes ist, mir keinen Vorwurf zu machen.

Wir haben nämlich im Gebiet der elektrischen Erscheinungen zu unterscheiden zwischen solchen Wirkungen, die in *beträchtlichen* Entfernungen stattfinden, und zwischen solchen, bei denen die Entfernungen *äusserst klein* sind; wobei zu bemerken, dass zur Aufstellung der Differentialgleichungen für die Bewegung der Elektrizität in einem gegebenen Leiter sowohl die Kenntniss der Wirkungen *erster* Art, als auch diejenige der Wirkungen *zweiter* Art erfordert wird.

Je schwieriger nun aber die Erforschung eines wissenschaftlichen Gebietes ist, desto nothwendiger erscheint es, *planmässig* vorzugehen, mit dem Leichterem zu beginnen, und erst, wenn man hier festen Fuss gefasst hat, zum Schwierigeren überzugehen. Da nun im gegenwärtigen Fall der leichtere Theil des zu erforschenden Gebietes durch die Wirkungen *erster* Art, der schwierigere durch die Wirkungen *zweiter* Art repräsentirt ist, so wird es gut sein — und dies ist der von mir verfolgte Plan — mit den Wirkungen *erster* Art zu beginnen, und zu den Wirkungen *zweiter* Art, mithin auch zur Aufstellung der in Rede stehenden Differentialgleichungen, falls irgend möglich, nicht früher überzugehen, als bis die Theorie jener Wirkungen *erster* Art zu *einiger Festigkeit* gediehen ist, — was bis jetzt offenbar noch nicht der Fall.

Dass ich übrigens, wie Herr Helmholtz in seiner obigen Bemerkung ausspricht, erklärt haben sollte, zur Aufstellung jener Differentialgleichungen *bedürfe es des Potentialgesetzes*, beruht auf *Irrthum*. Denn man wird eine derartige Aeusserung in meinem Aufsatz vergeblich suchen.

Ein zweiter *Irrthum* des Herrn Helmholtz besteht darin, dass er von einer *neuen* Modification des Weber'schen Gesetzes spricht, welche nach seiner Ansicht (Borchardt's Journal, Bd. 75. S. 39) von mir nur eingeführt sei, um seine gegen das Weber'sche Gesetz erhobenen Einwände zu beseitigen. Denn jene angeblich *neue* Modification (welche sich auf die Form des Weber'schen Gesetzes für *sehr kleine* Entfernungen bezieht) ist bereits im Jahre 1858 von mir eingeführt worden, in meiner Habilitationsschrift: *Explicare tentatur, quomodo fiat, ut lucis planum polarisationis per vires electricas vel magneticas declinetur. Halis Saxo-num* 1858.

III. Ueber die Beziehung des Energiegesetzes zum Inductionsgesetz.

Wollte man in der Hydrodynamik bei Einführung der bekannten Bedingungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

die gleichzeitige Einführung der entsprechenden Kräfte

$$\frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \frac{\partial p}{\partial z}$$

unterlassen, so würde man zu Formeln gelangen, die mit sich selber in Widerspruch sind. Hieraus resultirt (wie bereits auf S. 327 bemerkt wurde) der allgemeine Satz:

Soll die Bewegung gegebener Massen einer bestimmten Bedingungsgleichung unterworfen gedacht werden, so ist (zur Vermeidung innerer Widersprüche) die Einführung von Kräften erforderlich, welche für die Aufrechterhaltung jener Bedingungsgleichung Sorge tragen.

Hieraus folgt, dass die Annahme *constanter* Magnete oder *constanter* Molecularströme theoreisch unzulässig ist, falls man nicht gleichzeitig Kräfte einführt, die für jene Constanz Sorge tragen; und hierin liegt (wie ich in diesen Annalen Bd. VI, S. 330—340 weiter ausgeführt habe) der Grund derjenigen innern Widersprüche, welche die Theorie der Elektrodynamik bei ihrer Anwendung auf sogenannte *constante* Magnete in der That darbietet.

So z. B. ist es bei Annahme *constanter* Magnete unmöglich, das Energiesetz und die übrigen Gesetze der Elektrodynamik mit einander in Einklang zu bringen. Ein derartiger Einklang aber ist von Helmholtz bis in die neueste Zeit behauptet worden. Denn nach seiner Ansicht soll gerade für den Fall *constanter* Magnete das Inductionsgesetz aus dem Energiegesetz *ableitbar* oder wenigstens mit demselben *in Einklang* sein. So äussert sich z. B. Helmholtz in Borchardt's Journal, Bd. 75. S. 62 folgendermassen:

Der Streit darüber, ob die Existenz der elektrodynamischen Induction aus dem Gesetz von der Erhaltung der Kraft „deducirt“ werden könne, hat für mich nur den Werth eines *Wortstreites*. Meine Aufgabe in der „Erhaltung der Kraft“ war, die sämtlichen damals bekannten Thatsachen durchzugehen, und zu prüfen, ob sie mit dem betreffenden allgemeinen Gesetze in Uebereinstimmung wären, oder ob sich vielleicht im Gegentheil irgendwo Lücken oder Widersprüche zeigten. Als *Form der Darstellung* ist es bei solcher Aufgabe oft anschaulicher, die Richtigkeit des allgemeinen Gesetzes vorauszusetzen, die Folgen zu deduciren, nicht aber um sie durch eine solche Deduction

als bewiesen zu betrachten, sondern um sie mit den Thatsachen zu vergleichen, und dadurch die Zulässigkeit des allgemeinen Gesetzes zu prüfen, was den Ausgangspunkt bildete. Will man alle bei der elektrodynamischen Induction in Betracht kommenden Thatsachen bis auf eine als bekannt voraussetzen, so wird man diese eine immer noch aus dem Gesetz von der Constanz der Energie „deduciren“ können, so z. B. den Werth der Inductionsconstante. Aber als Beweismittel von thatsächlichen Wahrheiten kenne ich nur den Weg der *Induction*.

Die Ansicht, welche Herr Helmholtz theils in seiner Schrift über die Erhaltung der Kraft (Berlin 1847), theils in den eben wiederholten Worten, theils auch an einer anderen Stelle (Borchardt's Journal Bd. 72, S. 69) vertritt, geht offenbar dahin, dass *das Gesetz der Energie und die Annahme constanter Magnete mit den gewöhnlichen und für richtig geltenden Gesetzen der Elektrodynamik in Einklang gebracht werden können*. Dies aber gerade ist es, was von mir bestritten wird. Mag man nämlich den von der Induction *constanter* Magnete handelnden Abschnitt jener Helmholtz'schen Schrift (von 1847) corrigiren wie man will, immer werden daselbst noch Widersprüche zurückbleiben, — es sei denn, dass man sich entschlosse, die Vorstellung *constanter* Magnete aufzugeben; womit dann aber selbstverständlich ein Aufgeben jenes ganzen Abschnittes verbunden sein würde.

Leipzig, September 1876.

Inhaltsverzeichniss.

	Seite
§ 1. Der Tait-Thomson'sche Einwand gegen das Weber'sche Gesetz	318
§ 2. Die betreffenden Aeusserungen von Helmholtz	321
§ 3. Der Helmholtz'sche Einwand (A.) gegen das Weber'sche Gesetz	324
§ 4. Einige Bemerkungen hierüber	327
§ 5. Der Helmholtz'sche Einwand (B.) gegen das Weber'sche Gesetz	330
§ 6. Ueber einige in neuerer Zeit an Stelle des Weber'schen Gesetzes in Vorschlag gebrachte Theorien. (Wenn der Verfasser die neuerdings von Clausius aufgestellte Theorie in diesem § unerwähnt lässt, so hat das einfach darin seinen Grund, dass derselbe diese Theorie bis jetzt noch nicht mit der erforderlichen Sorgfalt studirt hat.)	331
§ 7. Ueber die Anzahl der elektrischen Materien	334
§ 8. Ueber einige Bemerkungen des Herrn Helmholtz	336