5.

Ueber die Coëfficienten der Secantenreihe.

(Vom Herrn Dr. Stern in Göttingen.)

In dem vierten Bande dieses Journals (S. 299) hat Herr Prof. Scherk einen Ausdruck mitgetheilt, welcher die Bernoullischen Zahlen und die Coëfficienten der Secantenreihe zugleich darstellt. Da meines Wissens sonst Nichts über diesen Gegenstand bekannt ist, so möchte vielleicht folgende Notiz nicht ganz ohne Interesse sein. Wie in dem erwähnten Aufsätze, soll auch hier B^{2n-1} die n te Bernoullische Zahl und B^{2n} den n ten Secanten-coëfficienten bezeichnen.

Aus der bekannten Formel *)

$$\cos \frac{x\pi}{2n} + \tan \frac{m\pi}{2n} \sin \frac{x\pi}{2n} = \left(1 + \frac{x}{n-m}\right) \left(1 - \frac{x}{n+m}\right) \left(1 + \frac{x}{3n-m}\right) \left(1 - \frac{x}{3n+m}\right) \dots$$

ergiebt sich, wenn man $n=2$, $m=1$ und $x\pi=u$ setzt,

$$\begin{aligned} \cos \frac{1}{4}u + \sin \frac{1}{4}u &= (1+x) \left(1 - \frac{1}{3}x\right) \left(1 + \frac{1}{5}x\right) \left(1 - \frac{1}{7}x\right) \dots \\ &= 1 + \frac{u}{4} - \frac{1}{2!} \cdot \frac{u^2}{4^2} - \frac{1}{3!} \cdot \frac{u^3}{4^3} \dots \end{aligned}$$

Bezeichnet man in der letzten Reihe den Coëfficienten von u^n durch A_n und durch $\frac{1}{2}n$ die größte in dem Bruche $\frac{1}{2}n$ enthaltene ganze Zahl, so ist

$$A_n = (-1)^{\frac{1}{2}n} \cdot \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{2^{2n}}$$

und

$$(1 + A_1 u + A_2 u^2 + \dots) = (1+x) \left(1 - \frac{1}{3}x\right) \left(1 + \frac{1}{5}x\right) \left(1 - \frac{1}{7}x\right) \dots$$

Nimmt man auf beiden Seiten die Logarithmen und bemerkt dafs

$$\frac{2^{2n}-1}{2} \cdot \frac{\pi^{2n}}{2n!} B^{2n-1} = 1 + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{5^{2n}} \dots,$$

$$\frac{2n+1}{2^{2n+2}} \cdot \frac{\pi^{2n+1}}{2n+1!} B^{2n} = 1 - \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{5^{2n}} \dots$$

ist, wo man, um die zweite Formel allgemein zu machen, $B^0 = 1$ setzt,

*) Euler introd. in an. inf. §. 171.

so hat man

$$\log(1 + A_1 u + A_2 u^2 \dots) \\ = \frac{1}{2^2} B u - \frac{1}{2} \cdot \frac{2^2 - 1}{2} \cdot \frac{1}{2!} B u^2 \dots - \frac{1}{2n} \cdot \frac{2^{2n} - 1}{2} \cdot \frac{B}{2n!} u^{2n} + \frac{1}{2^{2n+2}} \cdot \frac{B}{2n+1!} u^{2n+1} \dots$$

In dieser Entwicklung ist also der Coëfficient von u^n , welcher a_n heißen mag,

$$\text{entweder} = -\frac{1}{n} \cdot \frac{2^n - 1}{2} \cdot \frac{B}{n!},$$

$$\text{oder} = \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{B}{n!},$$

je nachdem n gerade oder ungerade ist.

Bezeichnet man durch k_n einen Ausdruck, welcher $= 0$ oder $= 1$ wird, je nachdem n eine ungerade oder gerade Zahl ist (z. B. $k_n = \frac{1}{2}(1 + (-1)^n)$), so kann man diese zwei Fälle in einen zusammen ziehen und hat

$$a_n = \frac{1 - k_n \cdot 2^n}{2^n - k_n(2^n - n)} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{B}{n!}.$$

Vermittelst der bekannten Relation, dafs, wenn

$$\tan(1 + A_1 u + A_2 u^2 \dots) = a_1 u + a_2 u^2 \dots,$$

auch

$$n A_n = n a_n + n - 1 \cdot a_{n-1} A_1 + \dots + a_1 A_{n-1}$$

ist, ergibt sich daher, wenn man die früher entwickelten Werthe der A und a substituirt,

$$1. \quad (-1)^{\frac{1}{2}n} \cdot \frac{1}{2^{2n-1}} \cdot \frac{1}{n-1!} \\ = \frac{1 - k_n \cdot 2^n}{2^n - k_n(2^n - n)} \cdot \frac{B}{n-1!} + \frac{1 - k_{n-1} \cdot 2^{n-1}}{2^{n-1} - k_{n-1}(2^{n-1} - (n-1))} \cdot \frac{B}{n-2!} \cdot (-1)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{1!} + \dots \\ \dots \frac{1}{2^2} \cdot (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)} \cdot \frac{1}{2^{2n-3}} \cdot \frac{1}{n-1!},$$

also eine Recursionsformel, welche alle Bernoullischen Zahlen und alle Secantencoëfficienten angiebt.

Man kann diese Formel auf folgende Weise noch etwas kürzer ausdrücken:

$$2. \quad (-k_n)^{\frac{1}{2}n} \cdot \frac{1}{2^{2n-2}} \cdot \frac{1}{n-1!} \\ = \frac{1 - k_n \cdot 2^n}{2^n - k_n(2^n - n)} \cdot \frac{B}{n-1!} + \frac{1 - k_{n-1} \cdot 2^{n-1}}{2^{n-1} - k_{n-1}(2^{n-1} - (n-1))} \cdot \frac{B}{n-2!} \cdot (-1)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{1!} \dots \\ \dots + \frac{1 - 2^2}{2} \cdot \frac{B}{1!} \cdot (-1)^{\frac{1}{2}(n-2)} \cdot \frac{1}{2^{2n-4}} \cdot \frac{1}{n-2!}.$$

An die Formel (1.) schließt sich eine unabhängige combinatorische Formel. Es ist nemlich

$$3. \quad \frac{1 - h_n \cdot 2^n}{2^n - h(2^n - n)} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{B}{n!} = \sum_{1,n}^h (-1)^{h-1} \cdot \frac{1}{h} {}^n C'_h \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{4^2} \dots \right),$$

wo ${}^n C'_h \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{4^2} \dots \right)$ die Combinationen mit Wiederholung der Classe h zur Summe n aus den Gröſsen $\frac{1}{4}, -\frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{4^2} \dots (-1)^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{1}{2^{2n}} \cdot \frac{1}{n!}$ als Elemente genommen, jede Gruppe mit der entsprechenden Permutationszahl multiplicirt, bedeutet, und die Elemente durch Multiplication verbunden sind.

Eine andere Recursionsformel findet man durch folgende Betrachtung. Aus

$$\cos x = \left(1 - \frac{4x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{4x^2}{3^2 \cdot \pi^2}\right) \dots$$

folgt, wenn man $x^2 = u$ setzt,

$$\begin{aligned} & \log \left(1 - \frac{u}{2!} + \frac{u^2}{4!} - \frac{u^3}{6!} \dots\right) \\ &= -2 \cdot \frac{2^2 - 1}{2!} B \cdot u - \frac{1}{2} \cdot 2^3 \cdot \frac{2^4 - 1}{4!} B \cdot u^2 \dots - \frac{1}{n} \cdot 2^{2n-1} \cdot \frac{2^{2n} - 1}{2n!} B \cdot u \dots, \end{aligned}$$

mithin

$$\begin{aligned} 4. \quad (-1)^n \cdot \frac{n}{2n!} &= -2^{2n-1} \cdot \frac{2^{2n} - 1}{2n!} B + 2^{2n-3} \cdot \frac{2^{2n-2} - 1}{2n-2!} \cdot \frac{1}{2!} B \\ &\quad - 2^{2n-5} \cdot \frac{2^{2n-4} - 1}{2n-4!} \cdot \frac{1}{4!} B \dots + (-1)^n \cdot 2 \cdot \frac{2^2 - 1}{2!} \cdot \frac{1}{2n-2!} B \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} & 2^{2n-1} (2^{2n} - 1) B - 2^{2n-3} (2^{2n-2} - 1) \cdot \frac{2n \cdot 2n-1}{2!} B \\ & + 2^{2n-5} (2^{2n-4} - 1) \cdot \frac{2n \cdot 2n-1 \cdot 2n-2 \cdot 2n-3}{4!} B \dots + (-1)^n \cdot n = 0. \end{aligned}$$

Diese Relation zwischen den Bernoullischen Zahlen habe ich nirgendwo gefunden. An dieselbe schließt sich folgende unabhängige Bildung der Bernoullischen Zahlen, nemlich

$$5. \quad \frac{1}{n} \cdot 2^{2n-1} \cdot \frac{2^{2n} - 1}{2n!} B = \sum_{1,n}^h (-1)^h \cdot \frac{1}{h} {}^n C'_h \left(-\frac{1}{2!}, \frac{1}{4!}, -\frac{1}{6!} \dots \right).$$

Nun ist

$$\sec x = 1 + \frac{B}{2!} u + \dots + \frac{B}{2n!} u^n \dots,$$

also, da $\log \sec x = -\log \cos x$,

$$\log \left(1 + \frac{B}{2!} u + \dots \right) \\ = 2 \cdot \frac{2^2-1}{2!} \frac{B}{2} u + \frac{1}{2} \cdot 2^3 \cdot \frac{2^4-1}{4!} \frac{B^3}{2} u^2 \dots + \frac{1}{n} \cdot 2^{2n-1} \cdot \frac{2^{2n}-1}{2n!} B \cdot u^n \dots$$

und

$$6. \quad n \cdot \frac{B}{2n!} = 2^{2n-1} \cdot \frac{2^{2n}-1}{2n!} B + 2^{2n-3} \cdot \frac{2^{2n-2}-1}{2n-2!} \frac{B^3}{2!} \dots + 2 \cdot \frac{2^2-1}{2!} B \cdot \frac{B}{2n-2!},$$

welches die erwähnte Recursionsformel ist.

Setzt man die Secantencoëfficienten als bekannt voraus, so ergiebt sich aus denselben jede Bernoullische Zahl durch die Formel

$$7. \quad \frac{1}{n} \cdot 2^{2n-1} \cdot \frac{2^{2n}-1}{2n!} B = \sum_{1,n}^h (-1)^{h-1} \cdot {}^n C'_h \left(\frac{B}{2!}, \frac{B}{4!} \dots \right).$$

Setzt man die Bernoullischen Zahlen als bekannt voraus, so findet man die Secantencoëfficienten durch die Formel

$$8. \quad \frac{B}{2n!} = \sum_{1,n}^h \frac{{}^n C'_h \left(2 \cdot \frac{2^2-1}{2!} B, \dots, \frac{1}{n} \cdot 2^{2n-1} \cdot \frac{2^{2n}-1}{2n!} B \dots \right)}{h!}.$$

Behandelt man auf ähnliche Weise die Formel

$$\frac{\sin x}{x} = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2} \right) \left(1 - \frac{x^2}{2^2 \pi^2} \right) \dots,$$

so findet man neben der bekannten Relation

$$\frac{2^{2n-1} \cdot B}{2n!} - \frac{2^{2n-3} \cdot B}{2n-2!} \cdot \frac{1}{3!} \dots \pm \frac{n}{2n+1!} = 0$$

auch die unabhängige Bildungsformel

$$9. \quad \frac{1}{n} \cdot \frac{2^{2n-1} \cdot B}{2n!} = \sum_{1,n}^h (-1)^h \cdot \frac{1}{h} {}^n C'_h \left(-\frac{1}{3!}, \frac{1}{5!} \dots \right).$$

Vergleicht man diese Formel mit der Formel (5.), so ergiebt sich der merkwürdige combinatorische Satz

$$10. \quad 2^{2n} - 1 = \frac{\sum_{1,n}^h (-1)^h \cdot \frac{1}{h} {}^n C'_h \left(-\frac{1}{2!}, \frac{1}{4!} \dots \right)}{\sum_{1,n}^h (-1)^h \cdot \frac{1}{h} {}^n C'_h \left(-\frac{1}{3!}, \frac{1}{5!} \dots \right)}.$$