Construction einer Tafel für die geradlinige Central-Bewegung mit abstossender Kraft, welche sich umgekehrt wie das Quadrat der Entfernung verhält, innerhalb der Grenzen $r = 2a = \frac{2\rho k^2\mu}{\rho c^2 + 2k^2\mu}$ und $r = 2,55034980a$, — verbunden mit einer durchgreifenden Revision der Berechnung der dritten Differential-Coefficienten in den Interpolations-Formeln für die Tafeln des *lapsus hyperbolicus* und *ellipticus*, von Herrn Dr. W. Lehmann.

(Fortsetzung der Abhandlungen desselben Verfassers über den *lapsus hyperbolicus* und *ellipticus*.)

(Fortsetzung von № 1075.)

§ 54.

Beim *lapsus hyperbolicus* für die Argumente $lg\tau = 0$ bis 7,5 ist der Fall weniger delicat, und zur Bestimmung von $\frac{Z}{\alpha}$ brauchen daher keine achtziffrigen Logarithmen angewandt zu werden. Hier gilt die Gleichung (49) § 43., welche wir nun zweckmässig in die beiden Gleichungen

$$d^3v = (s^3 + \tau^2(2s + 9)) \sqrt{1 + \frac{2}{s} - 3\tau s(s+3)},$$

$\frac{Z}{\alpha}$ (für $lg\tau = 0$ bis 2,7) $= \frac{0,135}{\alpha\pi} \left(3 + \frac{25\tau}{\alpha^2} \cdot \frac{\sqrt{(d^3v)^2}}{s^4} \right)$ verwandeln können. Der einigermaassen delicate Fall beschränkt sich hier auf die Bestimmung von d^3v ; hier sind Additions- und Subtractions-Logarithmen zu vermeiden und

$$\frac{d^3v}{\alpha(dlg\tau)^3} = \frac{4\alpha - lg(2\tau)}{\alpha^4\tau} \left(1 + \frac{\frac{8}{\alpha}(lg(2\tau))^2 - 56lg(2\tau) + 60\alpha}{2\tau lg(2\tau) - 8\alpha\tau} + \dots \right)$$

anzuwenden, worin für so grosse Werthe von $lg\tau$ die Hauptklammer $= 1$ gesetzt werden kann und zwar aus folgenden Gründen. Für $lg\tau > 4$ ist $\frac{8}{\alpha}lg(2\tau) > 56$ (also $\frac{8}{\alpha}(lg(2\tau))^2 - 56lg(2\tau)$ positiv), und $lg(2\tau) > 4\alpha$ (also auch $2\tau lg(2\tau) - 8\alpha\tau$ positiv), also $\frac{\frac{8}{\alpha}(lg(2\tau))^2 - 56lg(2\tau) + 60\alpha}{2\tau lg(2\tau) - 8\alpha\tau}$ positiv und $= 4 \frac{lg\text{nat } \tau + lg\text{nat } 2}{\tau} - \frac{12}{\tau} - \frac{18}{\tau lg\text{nat } (2\tau) - 4\tau}$, also $< 4 \frac{lg\text{nat } \tau + lg\text{nat } 2}{\tau}$, also (da $\frac{d lg\text{nat } \tau + lg\text{nat } 2}{d\tau}$ für $lg\tau > 4$ den negativen Werth $\frac{1 - lg\text{nat } (2\tau)}{\tau^2}$ hat)

$$\frac{lg(2\tau) - 4\alpha}{24\alpha^4\tau} \cdot \frac{\frac{8}{\alpha}(lg(2\tau))^2 - 56lg(2\tau) + 60\alpha}{2\tau lg(2\tau) - 8\alpha\tau - \frac{8}{\alpha}(lg(2\tau))^2 + 56lg(2\tau) - 60\alpha} - \frac{\Delta \cdot c^3 \cdot 648000''}{\pi}.$$

Tafeln siebenziffriger Logarithmen anzuwenden, auch überall zwei überzählige Decimalen und die oberen und unteren Grenzen hinzuschreiben: hat man aber einmal d^3v bestimmt, so kann $\frac{Z}{\alpha}$ mittelst fünfziffriger Logarithmen ohne Hinzuschreibung überzähliger Decimalen oder der oberen und unteren Grenzen und mit Anwendung der *Gaus'schen* Additions-Logarithmen gefunden werden. Für $lg\tau = 2,7$ bis 4,0 wird (weil hier d^3v negativ ist)

$$\frac{Z}{\alpha} = \frac{27''}{\alpha\pi} \left(0,018 - \frac{\tau}{\alpha^2} \cdot \frac{d^3v}{s^4} \right).$$

Für $lg\tau = 4,0$ bis 7,5 ist es zweckmässig, von der geschlossenen Formel ganz abzugehen, und die Reihe

kleiner als der bei $lg\tau = 4$ stattfindende Werth von $4 \frac{lg\text{nat } \tau + lg\text{nat } 2}{\tau}$, also um so mehr < 1 . Obige Hauptklammer bildet also eine convergirende Reihe mit abwechselnden Zeichen; aber auch wenn die Zeichen nicht abwechselten, (welchen Fall wir hier um der geradlinigen Central-Bewegung mit negativer Gravitation willen sogleich mitherücksichtigen wollen), würde der Einfluss der Glieder

$$\frac{\frac{8}{\alpha}(lg(2\tau))^2 - 56lg(2\tau) + 60\alpha}{2\tau lg(2\tau) - 8\alpha\tau} + \dots$$

auf $\frac{Z}{\alpha}$ (zufolge der Gleichung (22) § 9.) nur von der Ordnung

oder, einfacher ausgedrückt (indem wir statt

$$\frac{8}{x} (lg(2\tau))^2 - 56 lg(2\tau) + 60\alpha$$

die etwas grössere Grösse $4 \frac{lg nat \tau + lg nat 2}{\tau}$ setzen), von der Ordnung

$$\frac{lg nat(2\tau) - 4}{\alpha^3 \tau} \cdot \frac{lg nat(2\tau)}{\tau - 4 lg nat(2\tau)} \Delta \cdot x^3 \cdot \frac{648000''}{\pi},$$

also für $lg \tau =$ 4,0 4,2 4,4 ... 6,0

von der Ordnung

0"00197 0"00089 0"000394 0"000174 0"000077 0"0000337
0"0000147 0"0000064 0"00000276 0"00000119 0"00000051
und für $lg \tau =$

6,0 6,5 7,0 7,5

von der Ordnung

0"0000080 0"00000096 0"000000113 0"0000000132

sein. Hieraus folgt, dass, wenn wir obige Hauptklammer $= 1$ setzen, wir in $\frac{Z}{\alpha}$ für $lg \tau = 4,0$ bis 6,0 die Hunderttel-Secunden und für $lg \tau = 6,0$ bis 7,5 die Zehntausendstel-Secunden sicher haben, selbst bei Anwendung bloss dreiziffriger Logarithmen zur Bestimmung von $\frac{Z}{\alpha}$ für $lg \tau = 3,0$ bis 6,0, und fünfziffriger Logarithmen zur Bestimmung von $\frac{Z}{\alpha}$ für $lg \tau = 6,0$ bis 7,5, — wobei noch dazu die durch Hinschreibung der zwei überzähligen Decimalen und der jedesmaligen oberen und unteren Grenze entstehende Weitläufigkeit gespart werden kann. Wir finden also $\frac{Z}{\alpha}$ für $lg \tau = 4,0$ bis 6,0 durch die Gleichung

$$\frac{Z}{\alpha} = \frac{216''}{\alpha \pi} \left(0,003 + \frac{lg(2\tau) - 4x}{\alpha^3 \tau} \right)$$

und für $lg \tau = 6,0$ bis 7,5 durch die Gleichung

$$\frac{Z}{\alpha} = \frac{27''}{\alpha \pi} \left(0,042 + 125 \cdot \frac{lg(2\tau) - 4x}{\alpha^3 \tau} \right).$$

Was aber den Grad der Zuverlässigkeit der durch die strengere Methode gefundenen Werthe von $\frac{Z}{\alpha}$ für $\tau = 0,0$ bis 4,0 betrifft, so beurtheilt man denselben (mit Benutzung der zur Berechnung von $\frac{Z}{\alpha}$ anzuwendenden Werthe von $lg(s^2)$) durch Berechnung der Gleichungen

$$\Delta \frac{Z}{\alpha} = \frac{3''375 \cdot \tau}{\alpha^3 \pi} \cdot \frac{\Delta d^3 v}{s^4}, \quad \Delta \frac{Z}{\alpha} = \frac{27'' \tau}{\alpha^3 \pi} \cdot \frac{\Delta d^3 v}{s^4},$$

von denen die erstere von $lg \tau = 0,00$ bis 2,70, die letztere für $\tau = 2,7$ bis 4,0 gilt, und worin $\Delta d^3 v$ die halbe Differenz zwischen der durch die strengere speciell-numerische siebenziffrig-logarithmische Rechnung gefundenen oberen und unteren Grenze von $d^3 v$. $\Delta \frac{Z}{\alpha}$ aber den Einfluss von

$\Delta d^3 v$ auf $\frac{Z}{\alpha}$ bedeutet. Diese Berechnung von $\Delta \frac{Z}{\alpha}$, mit fünfziffrigen Logarithmen durchgeführt, zeigt, dass durch die strengere siebenziffrig-logarithmische Rechnung in $\frac{Z}{\alpha}$ von $lg \tau = 0,00$ bis $lg \tau = 2,70$ die Zehntausendtel-Secunden, von $lg \tau = 2,7$ bis $lg \tau = 4,0$ aber die Tausendtel-Secunden sicher sind.

Die in § 21 gefundenen Werthe von $\frac{Z}{\alpha}$ werden durch die strengere Rechnung zwar nur in Kleinigkeiten verändert, aber doch so, dass die Differenzen-Controle befriedigender wird. Was nämlich erstlich die Werthe von $\frac{Z}{\alpha}$ für $lg \tau = 0,00$ bis 0,70 betrifft, so ist dort für $lg \tau = 0,30$ bis 0,40 durch kleine Rechnungsfehler $\frac{Z}{\alpha} =$

0"4483 0"4355 0"4209

anstatt

0"4484 0"4354 0"4208

gesetzt, nach deren Verbesserung die 4te bis 9te unter den 12 dritten Differenzen sich in

0 +2 -1 +2 +1 +1

Zehntausendtel-Secunden verwandeln; die strengere Rechnung giebt 0"4485 statt 0"4484, und ausserdem für $lg \tau = 0,15$

$$\frac{Z}{\alpha} = 0"4779 \text{ statt } 0"4778,$$

so dass die 12 dritten Differenzen

-1 +1 -2 0 +2 -1 +2 +1 +1 +2 +4 -1

(wovon die Summe der Quadrate, wenn man 0"0001 als Einheit betrachtet, $= 38$ ist) sich nun in

0 -2 +1 0 -1 +2 +1 +2 +1 +2 +4 -1

verwandeln, wovon die Summe der Quadrate $= 34$ und also geringer als vorher ist und daher eine befriedigendere Controlle giebt, zumal da das vorherrschend Positive der 3ten Differenzen (welches von $lg \tau = 0,75$ bis $lg \tau = 1,40$, wo $d^3 v$ negativ ist, dem vorherrschend Negativen Platz macht) nun noch besser hervortritt als bei der weniger strengen Rechnung. Von $lg \tau = 0,75$ bis $lg \tau = 2,70$ giebt die strengere Rechnung dieselben Werthe von $\frac{Z}{\alpha}$ wie in § 21,

mit Ausnahme der zu $lg \tau = 0,75$ u. 2,45 gehörigen, Werthe 0"3061 und 0"4031, welche sich nun in 0"3060 und 0"4032 und dadurch die mit den Argumenten $lg \tau =$

0,88 2,35 2,40 2,45 2,50 2,55

in einerlei Horizontallinie stehenden 4ten Differenzen

-2 +2 +1 -5 +6 -4

(deren Quadratsumme 86 ist) in

-3 +3 -3 +1 +2 -3

verwandeln, wovon die Summe der Quadrate $= 41$ ist (jedemfalls eine befriedigendere Differenzen-Controle). Von $lg \tau = 2,7$ bis $lg \tau = 4,0$ giebt die strengere Rechnung

durchgängig dieselben Werthe von $\frac{Z}{\alpha}$ wie in § 21 für $lg \tau = 4,0$ bis $6,0$ erhält man durch Gleichung $\frac{Z}{\alpha} =$

$\frac{216''}{\alpha \pi} \left(0,003 + \frac{lg(2\tau) - 4x}{\alpha^3 \tau} \right)$ dieselben Werthe wie in § 21.

ausgenommen für $lg \tau = 5,4$, wo $\frac{Z}{\alpha} = 0''50$ sich in $0,51$ und dadurch die mit $lg \tau =$

5,0 5,2 5,4 5,6

in einerlei Horizontalinie stehenden 4^{ten} Differenzen

— 3 + 4 — 5 + 4

in die viel befriedigenderen

— 2 0 + 1 0

verwandelt. Für $lg \tau = 6,0$ bis $7,5$ erhalten wir folgende Differenzen - Controlle:

$lg \tau$	$\frac{Z}{\alpha} = \frac{27''}{\alpha \pi} \left(0,042 + 125 \cdot \frac{lg(2\tau) - 4x}{\alpha^3 \tau} \right)$
6,0	0''9690
6,5	0,8795
7,0	0,8479
7,5	0,8369

welche (wegen der zu grossen Intervalle) in $\frac{Z}{\alpha}$ nur die Hundertel-Secunden verbürgt (was aber für unsern Zweck, nämlich zu zeigen, dass $\frac{Z}{\alpha}$ für $lg \tau = 0,00$ bis $7,5$ stets merklich unter einer Secunde bleibt, hinreichend ist).

Und für die rechte Seite der Gleichung (68) § 22 finden wir von $lg \tau = 0,00$ bis $lg \tau = 7,5$ vermittelst der strengeren Rechnung durchgängig dieselben Werthe wie in § 22.

§ 55.

Um die den Argumenten $x = 0,30$ bis $2,6$ des *lapsus ellipticus* entsprechenden Formeln für $\frac{Z}{\alpha}$ der für die strengere Berechnung von $\frac{Z}{\alpha}$ beim *lapsus hyperbolicus* angewandten Formel möglichst ähnlich zu machen, schreiben wir:

Für die Intervalle $\Delta x = 0,15$:

$$\frac{\pi Z}{81''\alpha} = \frac{0,007}{\alpha} + \frac{18}{(2x)^3} + \frac{81-27s}{4(2s)^3} + \frac{1}{(\frac{2}{3}x)^2 \cdot 2s} \sqrt{\frac{x}{s} - \frac{x}{2}} - x \cdot \frac{81-18s}{(2s)^4} \sqrt{\frac{x}{s} - \frac{x}{2}};$$

für die Intervalle $\Delta x = 0,125$:

$$s = 1 - \sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \left(\text{Arc.}(10' - 12'' 2 \frac{595}{604} \dots) - \frac{(\text{Arc.}(10' - 12'' 2 \frac{595}{604} \dots))^2}{1.2} - \frac{(\text{Arc.}(10' - 12'' 2 \frac{595}{604} \dots))^3}{1.2.3} + \dots \right)$$

$$= 0,2908812 \frac{2915}{3289} \dots \text{ und } \sqrt{\frac{x}{s} - \frac{x}{2}} = 0,93880177 \dots, \text{ und dann durch achtziffrige Logarithmen } \frac{\pi Z'}{81\alpha} = 0''025 \frac{97813}{13703} \dots;$$

$$\frac{\pi Z}{27''\alpha} = \frac{0,0195}{\alpha} + \frac{2}{(0,8x)^3} + \frac{9-3s}{4(0,8s)^3} + \frac{1}{(1,6x)^2 \cdot 0,8s} \sqrt{\frac{x}{s} - \frac{x}{2}} - x \cdot \frac{3,6-0,8s}{(0,8s)^4} \sqrt{\frac{x}{s} - \frac{x}{2}};$$

für die Intervalle $\Delta x = 0,1$:

$$\frac{\pi Z}{3''\alpha} = \frac{0,162}{\alpha} + \frac{18}{x^3} + \frac{81-27s}{4s^3} + \frac{1}{(\frac{2}{3}x)^2 \cdot s} \sqrt{\frac{x}{s} - \frac{x}{2}} - x \cdot \frac{81-18s}{2s^4} \sqrt{\frac{x}{s} - \frac{x}{2}}.$$

Bei Gelegenheit der Berechnung von y für alle in die Tafel aufgenommenen Argumente x haben wir schon s ohne Logarithmen gefunden, ebenso $\sqrt{\frac{x}{s} - \frac{x}{2}}$ bei Gelegenheit der Berechnung von $\frac{dy}{dx}$; vermittelst jener Werthe von x u. s sind nun

$$\text{auch } \frac{0,007}{\alpha} + \frac{18}{(2x)^3} + \frac{81-27s}{4s^3}, \quad 2s, \quad (\frac{2}{3}x)^2 \cdot 2s, \quad x(81-18s),$$

$$\frac{0,0195}{\alpha} + \frac{2}{(0,8x)^3} + \frac{9-3s}{4s^3}, \quad 0,8s, \quad (1,6x)^2 \cdot 0,8s, \quad x(3,6-0,8s).$$

$$\frac{0,162}{\alpha} + \frac{18}{x^3}, \quad (\frac{2}{3}x)^2 s \text{ und } x \cdot \frac{81-18s}{2}$$

ohne Logarithmen zu berechnen; dann wird man, vermittelst Befolgung der für die Argumente $x = 0,6$ bis $1,8$ beim *lapsus hyperbolicus* auseinandergesetzten strengeren Grundsätze der siebenziffrigen logarithmischen Rechnung, $\frac{\pi Z}{81''\alpha}$ (resp. $\frac{\pi Z}{27''\alpha}$ und $\frac{\pi Z}{3''\alpha}$ in eine obere und untere Grenze einschliessen (deren halben Abstand von einander wir $\Delta \frac{\pi Z}{81''\alpha}$, resp. $\Delta \frac{\pi Z}{27''\alpha}$, $\Delta \frac{\pi Z}{3''\alpha}$ nennen

wollen), und die auf diesem Wege erreichbare Genauigkeit der Bestimmung von $\frac{Z}{\alpha}$ durch Berechnung der Gleichungen

$$\Delta \frac{Z}{\alpha} = \frac{81''}{\pi} \Delta \frac{\pi Z}{81''\alpha}, \quad \Delta \frac{Z}{\alpha} = \frac{27''}{\pi} \Delta \frac{\pi Z}{27''\alpha}, \quad \Delta \frac{Z}{\alpha} = \frac{3''}{x} \Delta \frac{\pi Z}{3''\alpha}$$

beurtheilen können. Diese Berechnung gab erstlich $lg \Delta \frac{Z}{\alpha}$

(für $x = 0,30$) $= 7,89982$., woraus zu ersehen, dass für $x = 0,30$ die strenge siebenziffrige-logarithmische Rechnung nicht ausreicht in $\frac{Z}{\alpha}$ die Hundertel-Secunden zu verbürgen,

sondern dass dazu achtziffrige Rechnung gehört. Diese aber erfordert wiederum (wie schon für $x = 0,2$ beim *lapsus hyperbolicus* bemerkt wurde), s und $\sqrt{\frac{x}{s} - \frac{x}{2}}$ genauer zu

bestimmen, als es zur Ermittlung von y und $\frac{dy}{dx}$ nöthig war.

Wir bestimmen daher $E = 44^\circ 50' 12'' 26$ genauer auf $44^\circ 50' 12'' 260$, und daraus

aus dem Abstand dieser beiden Grenzen von einander leiten wir $\lg \Delta \frac{Z}{\alpha} = 6,88050$, her, woraus wir sehen, dass wir in $\frac{Z}{\alpha}$ die Hundertel-Seconds sicher erhalten. Für $x = 0,45$ bis 1,50 reicht zu diesem Zweck die siebenziffrige Rechnung aus, und diese giebt für $x = 1,50$ bis 2,6 die Zehntausendtel-Seconds sicher.

Wir erhalten auf diesem Wege für $x = 0,30$ bis $x = 2,6$ dieselben Werthe von $\frac{Z}{\alpha}$ wie in § 38, mit Ausnahme von $\frac{Z}{\alpha} = 0,7402$ für $x = 2,6$: aber auch in § 38 ist $\frac{Z}{\alpha} = 0,7404$ nur durch einen kleinen Rechnungsfehler entstan-

$$\frac{Z}{\alpha} = \frac{27^a}{\pi} \left(\frac{0,027}{\alpha} + \frac{125}{64 (\pi - M)^3 s} \left(\left(\frac{3}{(\pi - M)^2} + \frac{9 - 2s}{s^3} \right) \sqrt{\frac{2-s}{s} - \frac{9-3s}{s^2 (\pi - M)}} \right) \right)$$

an, nachdem wir vorher $2-s$ und s ohne Logarithmen durch die Gleichungen

$$2-s = \sin \frac{180^\circ - E}{2} \cdot 2 \sin \frac{180^\circ - E}{2}, \quad s = 2 - (2-s),$$

auch $\frac{3}{(\pi - M)^2}$, $9 - 2s$ und $9 - 3s$ ohne Logarithmen, und

$$\Delta \frac{Z}{\alpha} = \frac{3375^a}{64 \pi (\pi - M)^3 s} \Delta \left(\left(\frac{3}{(\pi - M)^2} + \frac{9 - 2s}{s^3} \right) \sqrt{\frac{2-s}{s} - \frac{9-3s}{s^2 (\pi - M)}} \right),$$

nachdem $\lg \frac{3375}{64 \pi (\pi - M)^3}$ durch die in sehr vielen Ziffern bekannten Logarithmen

$$\lg 3, \quad \lg 5, \quad \lg 2, \quad \lg \pi$$

in 5 Bruchziffern völlig zuverlässig bestimmt worden, und wir finden auf diesem Wege, dass in $\frac{Z}{\alpha}$ die Tausendtel-Seconds sicher sind; für $\frac{Z}{\alpha}$ aber finden wir dieselben Werthe wie in § 43, mit Ausnahme von $\frac{Z}{\alpha} = 0,744$ für $(\pi - M)^2$

$= 0,50$; aber auch in § 43 ist $\frac{Z}{\alpha} = 0,742$ nur durch einen kleinen Rechnungsfehler entstanden, und die richtige Rechnung giebt dort ebenfalls 0,744, wodurch sich

$$-0,002 \quad +0,006 \quad 0,006$$

(die 3 letzten unter den 3ten Differenzen) in die viel befriedigenderen

$$0,000 \quad 0,000 \quad 0,000$$

verwandeln. Auch für die rechte Seite der Gleichung (68) § 22 erhalten wir durchgängig dieselben Werthe wie in § 43.

§ 57.

Für die Argumente $\tau^2 =$

$$0,3 \quad 0,6 \quad 0,9 \quad \dots \quad 4,8$$

bei der geradlinigen Central-Bewegung mit negativer Gravitation wenden wir die strenge siebenziffrige-logarithmische Rechnung auf die Gleichung

den, und die richtige Rechnung giebt dort ebenfalls 0,7402, wodurch sich 0,0004 (die letzte der 4ten Differenzen) in die befriedigendere 0,0002 verwandelt. Auch für die rechte Seite der Gleichung (68) § 22 erhalten wir von $x = 0,30$ bis $x = 2,6$ durchgängig dieselben Werthe wie in § 38.

§ 56.

Für die Argumente $(\pi - M)^2 =$

$$1,50 \quad 1,25 \quad 1,00 \quad \dots \quad 0,25$$

beim *lapsus ellipticus* wenden wir die strenge siebenziffrige-logarithmische Rechnung auf die aus (91) §. 32 folgende Gleichung

$$\lg \frac{27}{\pi}, \quad \lg \frac{0,027}{\alpha}, \quad \lg \frac{125}{64 (\pi - M)^3} \quad \text{und} \quad \lg (\pi - M) \quad \text{durch die}$$

in sehr vielen Ziffern bekannten Logarithmen

$$\lg 3, \quad \lg \pi, \quad \lg \alpha, \quad \lg 5, \quad \lg 2$$

bestimmt haben. Den Grad der Zuverlässigkeit von $\frac{Z}{\alpha}$ beurtheilen wir durch Berechnung der Gleichung

$$d^3 \lg s = (3s^3 - \tau^2(9 - 2s)) \sqrt{1 - \frac{2}{s} - 3\tau s(3-s)} \dots (135)$$

und fünfzigziffrige-logarithmische Rechnung (ohne Hinschreibung überzähliger Decimalen oder der oberen und unteren Grenzen und mit Zuhilfenahme der Gauss'schen Additions-Logarithmen) auf die Gleichung

$$\frac{Z}{\alpha} = \frac{0,81}{\pi} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{112,5}{\tau^5} \cdot \frac{d^3 \lg s}{s^4} \right) \dots (136)$$

an, welche beiden Gleichungen zusammen (weil überall $3s^3$ sich $> \tau^2(9 - 2s)$, und $(3s^3 - \tau^2(9 - 2s)) \sqrt{1 - \frac{2}{s} - 3\tau s(3-s)}$ sich $> 3\tau s(3-s)$, also $d^3 \lg s$ sich positiv findet) unter den Voraussetzungen $z = 0,0000005$, $z' = 0,000005$ und $\Delta(\tau^2) = 0,3$ gleichgeltend sind der Gleichung (122) § 47. Bei der Berechnung der Gleichung (135) ist $\tau^2(9 - 2s)$ ohne Logarithmen, und $\lg(3\tau)$ durch die Köhler'schen elfziffrigen Logarithmen der Primzahlen (mit Beachtung der Bemerkungen in № 1046 der Astr. Nachr.) zu ermitteln, in der Gleichung (136) aber $\lg \frac{0,81}{\pi}$, $\lg \frac{1}{\alpha}$ und $\lg \frac{112,5}{\pi^5}$ durch die elfziffrigen Logarithmen der Primzahlen und der Zahlen π u. α . Uebrigens kann bei der Berechnung der Gleich. (135), zum Behuf der Bestimmung von $3s^3$, die obere und untere Grenze von $\lg s$ aus der Berechnung des in die Tafel aufzunehmenden $\lg s$ entnommen werden, wobei aber die 7te und 8te Bruchstelle von $\lg s$ nicht abzuwerfen sind; auf diese Weise

erhält man auch die obere und untere Grenze des Logarithmus des Factors s des Gliedes $3\tau s(3-s)$ der Gleichung (135).

Den Grad der Zuverlässigkeit von $\frac{Z}{\alpha}$ beurtheilt man durch Berechnung der Gleichung

$$\Delta \frac{Z}{\alpha} = \frac{91''125}{\pi \tau^5} \cdot \frac{\Delta d^3 \lg s}{s^4},$$

wo wieder $\lg \frac{91,125}{\pi \tau^5}$ durch die elfziffrigen Logarithmen der Primzahlen und der Zahl π zu bestimmen ist. Wir finden auf diesem Wege, dass in $\frac{Z}{\alpha}$ die Tausendtel-Secunden sicher sind, und für $\frac{Z}{\alpha}$ folgende Werthe:

τ^2	$\frac{Z}{\alpha}$	Δ^I	Δ^{II}	Δ^{III}
0,0	0''903	—25	0	—
0,3	0,878	—25	0	+4
0,6	0,853	—21	+2	—2
0,9	0,832	—19	+2	0
1,2	0,813	—17	+1	—1
1,5	0,796	—16	+3	+2
1,8	0,780	—13	0	3
2,1	0,767	13	+2	+2
2,4	0,754	—11	+1	—1
2,7	0,743	—10	0	—1
3,0	0,733	—10	+2	+2
3,3	0,723	—8	0	—2
3,6	0,715	—8	+1	+1
3,9	0,707	—7	0	—1
4,2	0,700	—7	+1	+1
4,5	0,693	—6		
4,8	0,687			

und auf ähnliche Art wie in § 22 folgende Controlle zwischen den Einheiten der 6^{ten} Bruchstelle auf beiden Seiten der dortigen Gleichung (68):

τ^2	τ^2	τ^2	τ^2
0,0	—1	—1	—1
0,3	—1,5	—1	—1
0,6	—1	—1	—1
0,9	—0,5	—1	—1
1,2	—0,5	—1	—1
1,5	—0,5	—1	—1
1,8	—2	—1	—1
2,1	—1,5	—1	—1
2,4	—1	—1	—1
2,7	—1,5	—1	—1
3,0	—1,5	—1	—1
3,3	—0,5	—1	—1
3,6	+1	—1	—1
3,9	—1	—1	—1
4,2	—0,5	—1	—1
4,5	+0,5	—1	—1
4,8			

Die Differenzen-Controlle (137) und die Controlle (138) enthalten nichts, worüber man stutzen könnte, mit Ausnahme des Unterschiedes $= 0,000002$, welcher zwischen der rechten und linken Seite der Gleichung (68) in dem von $\tau^2 = 3,3$ bis $\tau^2 = 3,6$ weichenden Intervall stattfindet. Aber

auch dieser auffallende Unterschied lässt sich aus der bedeutenden Ausdehnung des Intervalls $\Delta(\tau^2)$ erklären: hier ist nämlich $z' = 0,000005$, und $\frac{Z}{\Delta(\tau^2)} = \frac{0,000005}{3}$, also z'

bedeutend grösser als $\frac{Z}{\Delta(\tau^2)}$, und in solchem Falle ist, wie in § 22 gezeigt worden, die auf die dortige Gleichung (68) gegründete Controlle nicht so unzweideutig. Berechnet man aber $\lg s$ in 7 und $\frac{d \lg s}{d(\tau^2)}$ in 6 Bruchstellen, so findet man

τ^2	$\lg s$	$\frac{d \lg s}{d(\tau^2)}$	linke Seite der Gleichung (68)
3,3	0,3779874	+0,020174	—0,000001, wie die rechte.
3,6	0,3839697	+0,019711...	

So haben wir durchgehends Controllen und, da alle 17 Werthe von $\frac{Z}{\alpha}$ merklich unter einer Secunde bleiben, einen strengeren Beweis der Ausreichendheit folgender

Tafel für die geradlinige Centralbewegung mit negativer Gravitation, innerhalb der Grenzen

$$r = 2a = \frac{2\rho k^2 \mu}{\rho v^2 + 2k^2 \mu} \text{ und } r = 2,55034980 a.$$

$\tau^2 = \frac{k^2 \mu}{a^3} t^2$	$\log \frac{r}{a}$	$\frac{d \log \frac{r}{a}}{d(\tau^2)}$	Diff.
0,0	0,301030	+0,02714	82
0,3	0,309048	+0,02632	77
0,6	0,316827	+0,02555	74
0,9	0,324380	+0,02481	—69
1,2	0,331719	+0,02412	—65
1,5	0,338857	+0,02347	—62
1,8	0,345803	+0,02285	—59
2,1	0,352568	+0,02226	—56
2,4	0,359161	+0,02170	—53
2,7	0,365590	+0,02117	—51
3,0	0,371863	+0,02066	—49
3,3	0,377987	+0,02017	—46
3,6	0,383970	+0,01971	—44
3,9	0,389816	+0,01927	—42
4,2	0,395533	+0,01885	—41
4,5	0,401126	+0,01844	—39
4,8	0,406600	+0,01805	

Wir unterlassen es aus dem zu Ende des 43^{ten} § angeführten Grunde auch hier, den Gebrauch dieser Tafel durch Beispiele zu erläutern.

Spandau, 1856 Decbr. 26.

W. Lehmann.