ADDIZIONE ALLA NOTA

SOPRA ALCUNE PROPRIETA' DELLA PROPAGAZIONE DELLA CORRENTE
ELETTRICA NEI FILI TELEGRAFICI, DEDOTTE DALLA TEORIA DI OHM.

DI FILIPPO KELLER.

I.

In una precedente Nota (*) ho dato le formole, le quali esprimono l'intensità variabile della corrente elettrica per ciascun punto di un filo telegrafico; credo che forse non sarà senza interesse di conoscere qualche valore numerico relativamente a questa materia.

Primieramente ho calcolato una tavola per i valori di $\frac{s}{p}$ secondo la formola (6); questo quoziente rappresenta il rapporto fra la corrente variabile col tempo, e la corrente stazionaria per il caso della chiusura del circuito. Si è presa l'espressione $\frac{\pi^2 k}{l^2 c} = 1$, con questa supposizione però la formola non diviene meno generale come prima, perchè essendo conosciuto il valore numerico di $\frac{k}{c}$, si può sempre trovare l'unità del tempo o della lunghezza in tal maniera, che questa condizione sia soddisfatta. Il quadro seguente poi non ha bisogno di altra spiegazione.

TAVOLA I.

t	Valore di $\frac{s}{p}$ per il punto $x =$								
	0	$\frac{1}{180} l$	$\frac{1}{4} l$	$\frac{1}{2} l$	$\frac{89}{180} l$	$\frac{1}{2} l$	$\frac{2}{3} l$	$\frac{3}{4} l$	l
0. 1	5. 60500	5. 60068	1. 19906	0. 36136	0. 01342	0. 01174	0. 00009	0. 00001	0. 00000
0. 5	2. 50668	2. 50624	1. 84138	1. 44364	0. 75016	0. 73000	0. 28003	0. 15728	0. 03608
1	1. 77262	1. 77250	1. 52008	1. 34934	0. 97624	0. 96338	0. 61405	0. 47992	0. 30060
2	1. 27132	1. 27130	1. 19139	1. 13502	1. 00406	0. 99932	0. 86434	0. 80862	0. 72999
3	1. 09960	1. 09957	1. 07040	1. 04978	1. 00174	1. 00000	0. 95021	0. 92960	0. 90042
4	1. 03662	1. 03662	1. 02590	1. 01832	1. 00064	1. 00000	0. 98169	0. 97410	0. 96338
5	1. 01346	1. 01346	1. 00952	1. 00674	1. 00026	1. 00000	0. 99326	0. 99048	0. 98652
6	1. 00496	1. 00496	1. 00350	1. 00248	1. 00009	1. 00000	0. 99752	0. 99650	0. 99504
7	1. 00182	1. 00182	1. 00128	1. 00090	1. 00003	1. 00000	0. 99909	0. 99872	0. 99818
8	1. 00068	1. 00068	1. 00048	1. 00032	1. 00000	1. 00000	0. 99966	0. 99852	0. 99934
9	1. 00024	1. 00024	1. 00018	1. 00012	1. 00000	1. 00000	0. 99988	0. 99982	0. 99976
10	1. 00008	1. 00008	1. 00006	1. 00005	1. 00000	1. 00000	0. 99996	0. 99992	0. 99992

(*) V. Ann. di Mat. N° 5, 1859, pag. 305.

L'aspetto di questa tavola, o anche la formola generale mostra le particolarità seguenti.

Per $t = \infty$ tutti i valori di $\frac{s}{p}$ hanno per limite l'unità, come già sappiamo; ma la legge di questa variazione è molto diversa nelle due diverse metà del filo. Alla seconda metà CB (essendo C il punto $x = \frac{l}{2}$), $\frac{s}{p}$ cresce continuamente e non diviene mai maggiore che l'unità; mentre nella prima metà AC questo valore arriva a un certo massimo che è maggiore dell'unità, e avendo passato questo massimo si diminuisce, e arriva per $t = \infty$ al limite $= 1$. Questo massimo ha luogo *prima* per punti i quali hanno un x *minore*. Immaginiamo un punto mobile il quale rappresenti l'andamento di questo massimo, questo punto parte al tempo $t = 0$ dal capo A, e entra per un $t = \infty$ al punto C del filo, e mentre il punto fa questo movimento il valore assoluto del massimo si diminuisce da ∞ continuamente fino alla unità. Per un t grandissimo, o per dire meglio, per un $\frac{\pi^2 k}{l^2 c} t$ grandissimo la formola si riduce a

$$s = p \left(1 + 2 \cos \frac{\pi}{l} x \cdot e^{-t} \right)$$

e questa fa vedere, che al punto C lo stato stazionario si stabilisce *più presto*, che a ognun altro punto, perchè si annulla il secondo membro della parentesi. Per due punti in egual distanza dal punto C la differenza $s - p$ ha anche lo stesso valore assoluto, ma positivo alla prima metà e negativo alla seconda; e questa differenza è più grande per punti più vicini ai capi, che per quelli verso la metà.

Essendo più importante di conoscere il valore di $\frac{s}{p}$ per i due capi, che per i punti intermedi si è ancora costruita la tavola seguente :

TAVOLA II.

t	Valore di $\frac{s}{p}$ per il capo		t	Valore di $\frac{s}{p}$ per il capo	
	A	B		A	B
0. 1	5. 6050	0. 0000	2. 1	1. 2453	0. 7555
0. 2	3. 9633	0. 0000	2. 2	1. 2219	0. 7787
0. 3	3. 2360	0. 0018	2. 3	1. 2007	0. 7997
0. 4	2. 8025	0. 0117	2. 4	1. 1816	0. 8187
0. 5	2. 5066	0. 0360	2. 5	1. 1643	0. 8359
0. 6	2. 2882	0. 0749	2. 6	1. 1486	0. 8515
0. 7	2. 1185	0. 1248	2. 7	1. 1344	0. 8656
0. 8	1. 9817	0. 1837	2. 8	1. 1216	0. 8784
0. 9	1. 8684	0. 2409	2. 9	1. 1101	0. 8900
1. 0	1. 7726	0. 3006	3. 0	1. 0996	0. 9004
1. 1	1. 6904	0. 3587	3. 1	1. 0901	0. 9099
1. 2	1. 6189	0. 4140	3. 2	1. 0815	0. 9185
1. 3	1. 5561	0. 4659	3. 3	1. 0738	0. 9262
1. 4	1. 5006	0. 5142	3. 4	1. 0667	0. 9332
1. 5	1. 4512	0. 5587	3. 5	1. 0604	0. 9396
1. 6	1. 4071	0. 5995	3. 6	1. 0546	0. 9454
1. 7	1. 3676	0. 6369	3. 7	1. 0494	0. 9506
1. 8	1. 3321	0. 6709	3. 8	1. 0447	0. 9553
1. 9	1. 3001	0. 7019	3. 9	1. 0405	0. 9595
2. 0	1. 2713	0. 7300	4. 0	1. 0366	0. 9634

Per causa della piccolezza di t era di gran vantaggio per il calcolo di questa tavola la formola

$$s_{(l,t)} = \sqrt{\frac{\pi}{t}} \cdot \left[s_{(0, \frac{\pi^2}{4t})} - s_{(0, \frac{\pi^2}{t})} \right]$$

la quale si ottiene dalla combinazione delle due formole (ved. pag. 314)

$$s_{(l,t)} = 2s_{(0,4t)} - s_{(0,t)}, \quad s_{(0,t)} = \sqrt{\frac{\pi}{t}} \cdot s_{(0, \frac{\pi^2}{t})}.$$

Finalmente si è costruita ancora la tavola seguente, rappresentando il valore di $\frac{s}{p}$ per l'apertura del circuito secondo la formola (9).

TAVOLA III.

t	Valore di $\frac{s}{p}$ per $x =$	
	$\frac{1}{2} l$	l
$\frac{1}{2}$	0. 88380	0. 99664
1	0. 73247	0. 94734
2	0. 54940	0. 76758
3	0. 42565	0. 60100
4	0. 33125	0. 46834
5	0. 25795	0. 36480
6	0. 20086	0. 28410
7	0. 15646	0. 22126
8	0. 12184	0. 17232
9	0. 09489	0. 13420
10	0. 07391	0. 10452

Nel §. 6 fu accennato esistere un certo $\frac{s}{p}$, il quale rende eguale i tempi impiegati dal segno telegrafico corrispondente alle apertura per le due metà del filo. Per trovare questo valore si ha da risolvere l'equazione

$$e^{-\frac{1}{4} 2z} - \frac{1}{3} e^{-\frac{9}{4} 2z} + \frac{1}{5} e^{-\frac{25}{4} 2z} - \frac{1}{7} e^{-\frac{49}{4} 2z} \dots$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[e^{-\frac{1}{4} z} + \frac{1}{3} e^{-\frac{9}{4} z} - \frac{1}{5} e^{-\frac{25}{4} z} - \frac{1}{7} e^{-\frac{49}{4} z} \dots \right]$$

e si trova

$$z = 1, 27598$$

e sostituendo questo z in una delle due parti dell'equazione si avrà

$$\frac{s}{p} = 0.6713586.$$

Ogni volta dunque, che il valore di $\frac{s}{p}$ è *minore* di 0.6713586, il segno impiega per la seconda metà *meno* tempo, che per la prima.

II.

Quando una corrente stazionaria di intensità p è stabilita in un filo conduttore gli autori tedeschi intendono sotto il termine *effetto magnetico* (magnetischer Effect) di una porzione di questo filo di lunghezza L il valore del prodotto pL . Riteniamo questa notazione anche per una corrente non stazionaria s : per avere l'effetto magnetico della porzione (x_1, x) del filo si avrà da trasformare quel prodotto in $\int_{x_1}^x s dx$.

Denotiamo ora come prima per u la tensione, e per P l'effetto magnetico, la corrente ha per espressione $-\omega k \frac{du}{dx}$, e per conseguenza si avrà

$$P = -\omega k \int_{x_1}^x \frac{du}{dx} \cdot dx = -\omega k(u_x - u_{x_1})$$

adunque l'effetto magnetico è in ogni istante proporzionale alla differenza delle tensioni alle due estremità.

Prendiamo adesso a considerare i quattro casi seguenti come applicazione di quest'ultima formola.

1) Siano le circostanze quelle del § 2., considerando il valore di P per tutta l'estensione del filo, (come faremo anche nei tre casi seguenti), si abbiano le tensioni costanti ai due capi a e 0 , e per conseguenza sarà

$$P = -\omega k a$$

di qui si vede, che l'effetto magnetico è indipendente dal tempo.

2) Per il filo del § 3 si avrà per il capo A la tensione

$$u = \frac{2a}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{(n + \frac{1}{2})^2} e^{-\frac{(n + \frac{1}{2})^2 \pi^2}{l^2} \frac{k}{c} t} \right]$$

e per il capo B la tensione 0 dunque

$$P = -\omega k \frac{2a}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{(n + \frac{1}{2})^2} e^{-\frac{(n + \frac{1}{2})^2 \pi^2}{l^2} \frac{k}{c} t} \right].$$

Essendo $t = 0$ si trasformerà questo valore in

$$P = -\omega k \frac{8a}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{(2n + 1)^2} \right]$$

ma è noto che il valore della serie equivale a $\frac{1}{8} \pi^2$, e quindi

$$P = -\omega k a.$$

Quest'ultima equazione si può trovare anche facilmente, essendo per il tempo $t=0$ ancora la corrente costante è $= \frac{\omega a k}{l}$, questa quantità moltiplicata colla lunghezza l dà il valore di P come sopra.

3) S'immagini che il filo sia con i due capi in comunicazione colla terra, e sia per il tempo 0 caricato con elettricità in qualunque maniera.

Qui i due capi hanno le tensioni 0 per ogni t , dunque essendo pure la diffe-

renza di esse 0, per conseguenza il valore di

$$P = 0.$$

Nel caso, che la distribuzione fosse simmetrica intorno alla metà, la giustezza di questa equazione si vede immediatamente, ma è notabile, che essa vale pure per una distribuzione *non* simmetrica.

4) S'immagini di nuovo questo filo, ma in tal maniera, che i due capi siano uniti, e senza essere in contatto colla terra. È noto, che il movimento del calorico in un filo segue la stessa legge dell'elettricità, e la formola che ha dato Fourier nella sua celebre opera: *La theorie de la chaleur* trova anche qui la sua applicazione per l'elettricità.

Si può argomentare che qui, come nel caso precedente, per ogni t il valore di P sia nullo.

APPENDICE.

Dopo finita la Nota precedente mi venne sott'occhio l'interessante Memoria dei Sigg. Guillemin e Burnouf: *Recherches sur la transmission de l'électricité dans les fils telegraphiques*, presentata all'Accademia di Parigi (*Comptes Rendus* del 23 Gen. 1860, pag. 183.)

Questa Memoria tratta di certi esperimenti, eseguiti per determinare le variazioni d'intensità della corrente elettrica ai due capi di un filo telegrafico secondo i diversi tempi, che duravano le comunicazioni del filo colla pila; essa è interessante perchè contiene una serie di esperimenti dai quali si può trarre il valore di $\frac{k}{c}$. Il conduttore aveva una lunghezza di 520 chilometri, probabilmente era di ferro, e quindi per questo metallo si avrà da intendere il valore di $\frac{k}{c}$, quale troviamo qui appresso.

Riteniamo la nostra notazione, abbiamo i valori corrispondenti di t e s (*Compt. Rend.* pag. 184)

$t = 0,0019$	0,0030	0,0055	0,0070	0,0090
$s = 0^{\circ},50$	$3^{\circ},50$	$10^{\circ},00$	$16^{\circ},50$	$17^{\circ},00$
$t = 0,0120$	0,0150	0,0170	0,0190	0,0220
$s = 18^{\circ},00$	$18^{\circ},50$	$18^{\circ},50$	$18^{\circ},75$	$19^{\circ},00$

dove t è dato in secondi, s rappresenta i gradi di un galvanometro, e il numero di questi gradi è proporzionale alla intensità come è accennato.

La corrente stazionaria segnava $19^{\circ}, 50 = p$, e i valori di $\frac{s}{p}$ saranno

0,025 0,179 0,512 0,846 0,871 0,923 0,948 0,948 0,961 0,974.

Secondo la Tavola II. questi $\frac{s}{p}$ corrispondono ai valori seguenti di $\frac{\pi^2}{l^2} \frac{k}{c} t$

0,45 0,79 1,40 2,55 2,74 3,25 3,65 3,65 3,95 4,50.

Ora per il primo risultato si caverà l'equazione

$$\frac{\pi^2}{l^2} \frac{k}{c} \cdot 0,0019 = 0.45$$

e quindi

$$\frac{k}{c} = 24,0$$

prendendo la lunghezza di 520 chilometri per l'unità.

Eguualmente gli altri nove dati somministrano per $\frac{k}{c}$ i valori

26,5 25,7 36,7 30,8 27,7 24,2 21,4 21,2 20,7.

Il medio di tutti sarà 25,9. Il significato di questo numero è, secondo le definizioni di sopra, il seguente :

Supponiamo, che il filo sia isolato al capo B, e caricato uniformemente di elettricità della tensione della pila; e chiamiamo la quantità che esso contiene una *carica*. Se venga posto il capo B in comunicazione colla terra la corrente stazionaria stabilita *dalla stessa pila* farà passare in ogni sezione del filo 25,9 cariche per secondo. Essendo l'unità della lunghezza il chilometro questa quantità è da moltiplicare per 520^2 , cioè pel quadrato della lunghezza, e si ottengono

$$\frac{k}{c} = 7003000.$$

Trovato adesso $\frac{k}{c}$ possiamo calcolare di nuovo la serie degli esperimenti per la intensità in diversi tempi. I tempi riportati all'unità della Tavola II (cioè i tempi moltiplicati con $25,9\pi^2$) sono

0,48 0,76 1,41 1,79 2,30 3,07 3,84 4,35 4,86 5,63

e le intensità corrispondenti secondo la Tavola II.

0,03 0,17 0,51 0,67 0,78 0,91 0,95 0,97 0,98 0,99.

*

Fra questi valori, e i valori osservati si trovano le differenze

0,00 -0,01 0,00 -0,17 -0,09 -0,01 0,00 +0,02 +0,02 +0,02.

Tutte le ricerche precedenti sono fatte nella supposizione, che l'isolamento del filo sia stato perfetto, e non è impossibile che le differenze trovate abbiano, almeno in parte, l'origine in questa supposizione inesatta, ma mancano affatto gli elementi per poter considerare questo punto.

Non volendo trascurare l'imperfezione dell'isolamento si avrebbe da adoperare la formola (pag. 315)

$$(17) \quad s = \omega k a \beta \frac{e^{\beta(l-x)} + e^{-\beta(l-x)}}{e^{\beta l} - e^{-\beta l}} \\ + 2k\omega \frac{a}{l} e^{-\frac{k}{c}\beta^2 t} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(n+1)^2 \pi^2}{(n+1)^2 \pi^2 + \beta^2 l^2} \cos \frac{(n+1)\pi}{l} x \cdot e^{-\frac{(n+1)^2 \pi^2}{l^2} \frac{k}{c} t} \right]$$

e per prima cosa si avrebbe da determinare il valore di β . Questo valore dipenderà dalla periferia del filo, dallo stato di umidità dell'atmosfera, e probabilmente anche dalla forma della sezione del filo. Esso non è difficile da determinare in pratica, si ha solo da osservare con un galvanometro la intensità della corrente per le due estremità del filo. Chiamiamo r il quoziente di queste due quantità si ha secondo la formola (17)

$$r = \frac{2}{e^{\beta l} + e^{-\beta l}} \quad \text{dove} \quad \beta = \frac{1}{l} \operatorname{Lg.} \frac{1 + \sqrt{1 - r^2}}{r}$$

ove per la radice $e^{\beta l}$ si prenda quella proveniente dal segno +.

Conoscendo β non abbiamo più alcuna incognita nella formola, ma il calcolo numerico con essa è un poco incomodo. Probabilmente sarà $\frac{\beta l}{\pi}$ pel solito una frazione piccola in modo che si possa sostituire

$$1 - \left(\frac{(\beta l)}{(n+1)\pi} \right)^2 \quad \text{invece di} \quad \frac{(n+1)^2 \pi^2}{(n+1)^2 \pi^2 + \beta^2 l^2}$$

e la tavola II. sarà ancora utile per il calcolo numerico.

S'intenderà, che la legge trovata (pag. 312) che i tempi impiegati dal segno telegrafico per due linee di diverse lunghezze stiano in ragione del quadrato delle lunghezze, non può avere più luogo con esattezza in caso che β non sia nulla; e forse è questa anche una ragione che l'esperienze non hanno confermato rigorosamente la teoria.