Ueber das volle Formensystem der ternären biquadratischen
Form $f = x_1^3 x_2 + x_2^3 x_3 + x_3^3 x_1$.

Von

P. GORDAN in Erlangen.

(Hierzu eine Tafel.)

Als es mir gelungen war zu beweisen, dass sich für jede binäre Form ein endliches zugehöriges Formensystem aufstellen lasse, wandte sich mein Interesse naturgemäss der analogen Fragestellung bei ternären Formen zu. Indess erkannte ich bald, dass eine allgemeine Behandlung des hiermit angedeuteten Problems fürs erste noch viel zu schwierig ist. Ich sah mich also darauf angewiesen, zunächst einzelne Fälle zu studiren. Sehr leicht erledigte sich der Fall zweier ternärer quadratischer Formen; man vergl. die Resultate, welche in Clebsch-Lindemann's Vorlesungen über Geometrie p. 291 mitgetheilt sind. Aber schon der Fall einer einzelnen ternären cubischen Form, den ich im ersten Bande dieser Annalen p. 90 ff. behandelte, erwies sich als complicirt. Ich nahm sodann die ternären biquadratischen Formen in Angriff. Auch bei ihnen gelang es mir, die Endlichkeit des zugehörigen Formensystems zu erschliessen.*) Inzwischen erwies sich die Zahl der bei ihnen in Betracht kommenden Bildungen als so gross, dass ich von vorneherein davon abstand, das Formensystem wirklich hinzuschreiben, und schliesslich überhaupt auf eine Redaction meiner immerhin nur vorläufigen Untersuchungen verzichtete. Ich wurde zu denselben erst wieder zurückgeführt, als Hr. Klein bei seinen Studien über die Auflösung gewisser Gleichungen siebenten Grades**) eine sehr einfache ternäre Form vierten Grades auffand, die durch 168 lineare Substitutionen in sich übergeht und dementsprechend nur vier linear unabhängige Covarianten besitzt. In der That gestatteten mir meine früheren Betrachtungen sehr leicht, für

*) Vergl. Clebsch-Lindemann, Vorlesungen, p. 174, Note.

**) Cf. Zwei Mittheilungen über Gleichungen siebenten Grades in den Erlanger Berichten vom 4. März und 20. Mai 1878, sowie: Ueber Transformation siebenter Ordnung der elliptischen Functionen, Math. Annalen Bd. XIV; Ueber die Auflösung gewisser Gleichungen vom siebenten und achten Grade, ebenda, Bd. XV.

diese Form das ganze zugehörige System, das aus 54 Bildungen besteht, aufzustellen. Indem ich dasselbe nachstehend veröffentliche, verfolge ich einen doppelten Zweck. Einmal wünsche ich durch Behandlung des einzelnen Falles die Principien darzulegen, die auch im Falle der allgemeinen biquadratischen Form eine Umgrenzung des Formensystems ermöglichen. Andererseits wird die Kenntniss der hier mitzutheilenden Resultate für weitere Untersuchungen über die Auflösung der Gleichungen siebenten Grades von Vortheil sein.

Meine Darlegung trennt sich in drei Capitel. Im ersten Capitel (§ 1.—3.) stelle ich eine Reihe im Allgemeinen bekannter Definitionen und Sätze zusammen, die für das Folgende wichtig sind. Ich knüpfe dabei zumal an diejenigen Entwicklungen an, die ich in meiner Programmschrift: *Ueber das Formensystem binärer Formen* (Leipzig 1875) gegeben habe. Im zweiten Capitel (§ 4.—10.) beginne ich die Systemaufstellung für die allgemeine biquadratische Form und führe sie so weit, als ohne weitläufige Rechnung möglich ist. Im dritten Capitel endlich (§ 11.—20.) lasse ich die Vereinfachungen eintreten, welche der besonderen hier in Betracht kommenden biquadratischen Form entsprechen, und führe auf Grund derselben die Systembildung zum Abschluss.

Erstes Capitel.

Allgemeine Definitionen und Sätze.

§ 1.

Operationen.

Die beiden hauptsächlichen Operationen, deren ich mich im Folgenden zu bedienen habe, sind der *Ueberschiebungsprocess* und der *Faltungsprocess*. Hinsichtlich derselben scheinen folgende Vorerinnerungen am Platze.

Zunächst sei daran erinnert, dass man, der Allgemeinheit wegen, jede einer Operation zu unterwerfende Form im *ternären* Gebiete sich als Zwischenform zu denken hat, d. h. als eine Form, die sowohl die x , als die u , enthält.

Zwei derartige Formen:

$$A = a_x^r u_\alpha^s, \quad B = b_x^q u_\beta^q$$

können nun auf mannigfachste Weise über einander geschoben werden. In der That muss man jede Bildung:

$$Ux = a_\beta^{r_1} b_\alpha^{r_2} (ab u)^{r_3} (\alpha\beta x)^{r_4} a_x^{r_5} b_x^{r_6} u_\alpha^{r_7} u_\beta^{r_8},$$

weil in den Coefficienten von A und B bilinear, als *Ueberschiebung* bezeichnen. Dabei ist natürlich:

$$r_1 + r_3 + r_5 = r; \quad r_2 + r_4 + r_7 = s; \quad r_2 + r_3 + r_6 = \varrho; \\ r_1 + r_4 + r_8 = \sigma.$$

Unter der grossen Zahl dieser Bildungen benutze ich zumal diejenigen, bei denen drei der vier Zahlen r_1, r_2, r_3, r_4 verschwinden, also:

$$a_{\beta}^{r_1} a_x^{r_2} b_x^{r_3} u_{\alpha}^{r_4} u_{\beta}^{r_5}, \text{ resp.} \\ b_{\alpha}^{r_1} a_x^{r_2} b_x^{r_3} u_{\alpha}^{r_4} u_{\beta}^{r_5}, \\ (ab u)^{r_1} a_x^{r_2} b_x^{r_3} u_{\alpha}^{r_4} u_{\beta}^{r_5}, \\ (\alpha \beta x)^{r_1} a_x^{r_2} b_x^{r_3} u_{\alpha}^{r_4} u_{\beta}^{r_5};$$

ich verwende für dieselben die Bezeichnung:

$$A_B^{r_1}, \quad B_A^{r_1}, \quad (ABu)^{r_1}, \quad (\alpha \beta x)^{r_1}.$$

Uebrigens bemerkt man sofort, dass solche Ueberschiebungen, bei denen sowohl r_3 als $r_4 > 0$ ist, sich durch andere ausdrücken lassen; man hat nur die Identität anzuwenden:

$$(ab u) (\alpha \beta x) = \begin{vmatrix} a_{\alpha} & a_{\beta} & a_x \\ b_{\alpha} & b_{\beta} & b_x \\ u_{\alpha} & u_{\beta} & u_x \end{vmatrix}.$$

Natürlich gestaltet sich auch der *Faltungsprocess* bei ternären Formen mannigfaltiger als bei binären. Wenn man in dem Producte

$$A \cdot B = a_x^r u_{\alpha}^s \cdot b_x^c u_{\beta}^g$$

irgendwelche Factorenpaare

$$a_x u_{\beta}, \quad b_x u_{\alpha}, \quad a_x b_x, \quad u_{\alpha} u_{\beta}$$

resp. durch:

$$a_{\beta}, \quad b_{\alpha}, \quad (ab u), \quad (\alpha \beta x)$$

ersetzt, so sage ich von jeder so entstehenden Form, dass sie aus dem Product $A \cdot B$ durch Faltung hervorgehe. Auch aus A , resp. B , allein entstehen Formen durch Faltung, nämlich:

$$a_{\alpha}^{\lambda} a_x^{r-\lambda} u_{\alpha}^{s-\lambda}, \quad b_{\beta}^{\lambda} b_x^{c-\lambda} u_{\beta}^{g-\lambda},$$

ich nenne diese Formen A_{λ} , bez. B_{λ} .

§ 2.

Reihenentwickelungen der Ueberschiebungen und ihrer Glieder.

Hat man A und B als irgendwelche symbolische Producte gegeben, so ergeben sich die Ueberschiebungen U von A und B im Allgemeinen als Aggregate symbolischer Producte $G_1; G_2, \dots$:

$$U = c_1 G_1 + c_2 G_2 + \dots$$

Diese $G_1, G_2, \dots$, die ich *Glieder* der Ueberschiebung U nenne, entstehen aus dem Producte $A \cdot B$ je durch entsprechende Faltungen.

Dabei werden nur solche Factorenpaare gefalten, deren einer Factor der Form A , der andere B angehört, und die verschiedenen Glieder G entstehen je nach Auswahl dieser Factoren.

Man hat nun Sätze, denen zufolge ein beliebiges Glied der Ueberschiebung U (oder auch diese Ueberschiebung selbst) bei der Bildung eines Formensystems durch ein anderes beliebiges Glied und übrigen niedere Bildungen ersetzt werden kann.

Zunächst nämlich kann man die Differenzen zweier Glieder $G_i - G_k$ (oder auch die Differenz $G_i - U$) durch andere symbolische Producte H ausdrücken, die aus den am Schlusse des vorigen Paragraphen definirten A_λ, B_λ durch Faltung hervorgehen. Diese H sind aber selbst wieder Glieder von Ueberschiebungen U_1 von A_λ über B_λ . Wir können also die Differenzen $H_i - H_k$ (und $H_i - U_1$) wieder als Aggregate symbolischer Producte darstellen, die durch Faltung aus Formen $A_{\lambda, \mu}, B_{\lambda, \mu}$ entstehen, wo $A_{\lambda, \mu}, B_{\lambda, \mu}$ Formen bezeichnen sollen, die aus den A_λ , bez. den B_λ , durch Faltung hervorgehen. In dieser Weise fortfahrend gelangt man schliesslich zu einer Reihe:

$$G_i = a_0 U + a_1 U_1 + a_2 U_2 + \dots,$$

wo die U_i Ueberschiebungen von Formen bedeuten, welche aus A , resp. B durch Faltung hervorgehen. *Hiernach lässt sich jedes Glied der ursprünglichen Ueberschiebung durch ein Aggregat von Ueberschiebungen ersetzen.*

Statt dieser Reihe kann man sofort die andere bilden:

$$G_i = b_0 V + b_1 V_1 + b_2 V_2 + \dots,$$

wo die $V, V_1, \dots$ irgendwelche Glieder der Ueberschiebungen $U, U_1, \dots$ bedeuten. *Das Glied G_i ist also durch ein beliebiges anderes Glied der ursprünglichen Ueberschiebung und Glieder niederer Ueberschiebungen ersetzt.*

Diese Sätze, die ich hier nur ganz im Allgemeinen hingestellt habe, spielen bei der Systembildung ternärer Formen dieselbe wichtige Rolle, wie die bekannten Reihenentwickelungen in der Theorie der binären Formen.

§ 3.

Functionaldeterminanten.

Die einfachsten Ueberschiebungen zweier Formen:

$$f = a_x^m, \quad F = b_x^n,$$

oder auch:

$$\varphi = u_\alpha^\mu, \quad \Phi = u_\beta^\nu$$

sind die *Functionaldeterminanten*:

$$(fFu), \quad (\varphi\Phi x).$$

Es ist nützlich, sich ein für allemal einzuprägen, dass viele aus diesen Functionaldeterminanten durch Faltung oder Ueberschiebung entstehenden Formen ganze Functionen von Formen niederen Grades sind. Dies gilt zunächst von dem Producte:

$$(fFu)(\varphi\Phi x) = \begin{vmatrix} f_{\varphi} & f_{\Phi} & f \\ F_{\varphi} & F_{\Phi} & F \\ \varphi & \Phi & u_x \end{vmatrix},$$

dann von vielen aus ihm durch Faltung entstehenden Formen, bei denen die Faltungen die Factoren (abu) , $(\alpha\beta x)$ unberührt lassen. Ferner gilt es von den Functionaldeterminanten, die man aus (fFu) und $(\varphi\Phi x)$ mit beliebigen anderen Formen ψ bilden kann. Desgleichen von den Producten:

$$\psi(fFu), \quad \psi(\varphi\Phi x),$$

zu denen insbesondere die Quadrate und Producte der Functionaldeterminanten (fFu) , $(\varphi\Phi x)$ selbst gehören.

Die einzige Ausnahme erleiden diese Sätze in dem Falle, wo die Grade m, n, μ, ν der ursprünglichen Formen den Werth 1 haben.

Zweites Capitel.

Die allgemeine, ternäre, biquadratische Form.

§ 4.

Allgemeines über Systembildung. Reducenten.

Die ternäre biquadratische Form

$$f = a_x^4$$

hat eine Covariante vierter Classe

$$\varphi = 2(abu)^4 = u_v^4.$$

Der Grundgedanke nun, auf den ich mich bei der Bildung des Systems von f stütze, ist der, f und φ *gleichzeitig* zu betrachten und demnach neben den Symbolen $a, b, c, \dots$ von f , Symbole $v, v_1, v_2, \dots$ von φ einzuführen. Hiernach wird man, unter Anwendung bekannter Principien, die zu f gehörigen symbolischen Producte P in drei Classen theilen:

- 1) in solche P , welche nur die Symbole $a, b, c, \dots$ von f enthalten,
- 2) in solche P , welche nur die Symbole $v, v_1, v_2, \dots$ von φ enthalten,
- 3) in solche P , die gleichzeitig Symbole $a, b, c, \dots$ von f und Symbole $v, v_1, v_2, \dots$ von φ enthalten.

Dementsprechend kann man die Aufstellung des vollen Systems der zu f gehörigen irreducibelen symbolischen Producte in der Weise gliedern, dass man zunächst das System S_1 aller Producte der ersten Art sucht, sodann das System S_2 aller Producte der zweiten Art, und endlich das volle System S_3 der Producte dritter Art durch Combination von S_1 und S_2 gewinnt.

Als einen *Reducenten* wird man sodann jeden aus den Symbolen $a, b, c, \dots v, v_1, v_2, \dots$ zusammengesetzten Ausdruck R betrachten, welcher zur Folge hat, dass alle symbolischen Producte, die ihn zum Factor haben, und in denen nur die in ihm auftretenden Symbole vorkommen, sich als Aggregate solcher Formen darstellen lassen, die entweder eine Invariante zum Factor haben oder aus weniger Symbolen bestehen. — Diese reducibelen Formen:

$$P_1, P_2, P_3, \dots$$

gehen aus einer von ihnen durch Faltung hervor, und alle aus einer von ihnen durch Faltung entstehenden Formen kommen unter ihnen vor. — Schiebt man P_i über beliebige andere Formen ψ , so erhält man wieder reducibele Formen, ebenso sind alle Formen reducibel, welche durch Faltung aus dem Product $P_i\psi$ entstehen. — Dies sind aber alle symbolischen Producte, welche R zum Factor haben.

§ 5.

Disposition der nachfolgenden Untersuchungen.

Die Betrachtung für die allgemeine biquadratische Form f werde ich nunmehr nur so weit durchführen, dass ich für sie das System S_1 (der Producte erster Art) bilde. Das System S_2 , und um so mehr das System S_3 , soll nur bei der speciellen, weiterhin zu definirenden biquadratischen Form wirklich aufgestellt und also auch nur im dritten Capitel dieser Darlegung besprochen werden.

Unter den Formen des Systems S_1 nehme ich diejenigen voraus, welche die Symbole $a, b, c, \dots$ von f nur in den Combinationen

$$a_x, b_x, \dots$$

und

$$(abu), (acu), (bcu), \dots$$

enthalten. Solche Formen will ich Formen Q nennen. Es sind diejenigen Formen, welche aus dem binären Gebiet herübergenommen sind. Schreibt man nämlich statt $(abu), (acu), \dots$ etc. einfach $(ab), (ac) \dots$, so kann man die entstehenden Ausdrücke Q' als Covarianten der binären Form a_x^4 auffassen. — Erst wenn diese Formen Q erledigt sind, was sehr rasch geschieht (§ 6.), schreite ich zur Betrachtung solcher Formen von S_1 , die auch symbolische Factoren $(abc), (abd), \dots$ enthalten (§ 7.—10.).

§ 6.

Das System S_1 . Erster Theil: Herübergenommene Formen.

Die Covarianten Q' einer binären biquadratischen Form a_x^4 sind, wie man weiss, ganze Functionen $F(Q')$ der Formen:

$$Q_1' = a_x^4; \quad Q_2' = (ab)^2 a_x^2 b_x^2; \quad Q_3' = (ab)^2 (ac) a_x b_x^2 c_x^3; \\ Q_4' = (ab)^2 (ac)^2 (bc)^2; \quad Q_5' = (ab)^4.$$

Die entsprechenden Q lassen sich daher auf ganze Functionen von

$$Q_1 = a_x^4; \quad Q_2 = (abu)^2 a_x^2 b_x^2; \quad Q_3 = (abu)^2 (acu) a_x b_x^2 c_x^3; \\ Q_4 = (abu)^2 (acu)^2 (bcu)^2; \quad Q_5 = (abu)^4$$

zurückführen. Denn wenn $Q' - F(Q') = 0$ ist, so ist $Q - F(Q)$ durch u_x theilbar. Aber unter diesen Q ist noch $Q_5 = \varnothing$ auszulassen. *Die einzigen irreduciblen Formen Q sind daher (unter Beifügung zweckmässig scheinender Zahlenfactoren):*

$$(I) \quad f = Q_1, \quad \Theta (\text{symb } \Theta x^4 u^3) = -8 Q_2, \quad K = -32 Q_3, \quad j = \frac{8}{3} Q_4.$$

Ich werde die hier eingeführten Benennungen dieser einfachsten Covarianten auch fernerhin beibehalten.

§ 7.

Das System S_1 . Zweiter Theil: Formen mit 3 Symbolen.

Unter den nun noch zu betrachtenden Formen von S_1 erledige ich in diesem Paragraphen diejenigen, welche nur drei Symbole: a, b, c enthalten.

Da die P , welche den Factor $(abc)^3$ besitzen, durch Einführung des Symbols v reducibel sind, so haben wir nur Formen $P_{1,i}$ mit dem einfachen Factor (abc) und Formen $P_{2,i}$ mit dem Factor $(abc)^2$ ins Auge zu fassen. Ich behaupte, dass alle diese Formen reducibel sind mit alleiniger Ausnahme von

$$(II) \quad \Delta = \frac{16}{3} (abc)^2 a_x^2 b_x^2 c_x^2.$$

In der That, von den $P_{2,i}$ lassen sich alle ausser Δ ohne Weiteres durch das Symbol v reduciren. Das Gleiche gilt von denjenigen $P_{1,i}$:

$$P_{1,i} = (abc)(bcu)^{r_1}(acu)^{r_2}(abu)^{r_3} a_x^{3-r_2-r_3} b_x^{3-r_3-r_1} c_x^{3-r_1-r_2},$$

bei denen eine der Zahlen r_1, r_2, r_3 grösser als 1 ist.

Es bleiben also nur folgende $P_{1,i}$ zu betrachten:

$$P_{1,1} = (abc)(abu) a_x^2 b_x^2 c_x^3; \quad P_{1,2} = (abc)(abu)(acu) a_x b_x^2 c_x^4;$$

$$P_{1,3} = (abc)(abu)(acu)(bcu) a_x b_x c_x.$$

Für sie aber findet man:

$$16 P_{1,1} = u_x \cdot \Delta; \quad P_{1,2} = 0;$$

$$\begin{aligned} P_{1,3} &= (abc) (abu) acu) b_x c_x \{2b_x (acu) + u_x (abc)\}, \\ &= \frac{1}{2} (abc) (acu) b_x \{2b_x (acu) + u_x (abc)\} \{b_x (acu) + u_x (abc)\}, \\ &= -\frac{1}{4} b_v u_v b_x \{2b_x u_v - u_x b_v\} \{b_x u_v - u_x b_v\} \\ &= -\frac{1}{2} f_v + \frac{3}{32} i u_x^3 - \frac{1}{16} i u_x^3 = -\frac{1}{2} f_v + \frac{i}{32} u_x^3. \end{aligned}$$

Ich habe dabei, wie später immer geschehen soll, die Invariante

$$f_v^4 = \frac{3}{4} i$$

gesetzt.

Hiernach ist unsere Behauptung bewiesen.

§ 8.

Das System S_1 . Dritter Theil: Formen mit 4 Symbolen.

Ich betrachte ferner Producte P , die aus vier Symbolen a, b, c, d zusammengesetzt sind und den Factor (abc) besitzen. Dieselben entstehen durch Faltung von Producten aus f , in Formen, welche nur die drei Symbole a, b, c und dabei den Factor (abc) enthalten. Da diese letzteren, dem vorhergehenden Paragraphen zufolge, auf Δ reducibel sind, so braucht man, um jedenfalls alle irreducibelen, im gegenwärtigen Paragraphen zu betrachtenden Producte zu erhalten, nur das Product

$$f \cdot \Delta = a_x^4 \cdot \Delta_x^6$$

auf alle Weisen zu falten. Dies giebt die Ueberschiebungen:

$$(f\Delta u), (f\Delta u)^2, (f\Delta u)^3, (f\Delta u)^4.$$

Ich sage, dass unter ihnen nur

$$(III) \quad (f\Delta u)$$

irreducibel ist und also zum Systeme S_1 gehört. Die Reducibilität der anderen Formen folgt nämlich aus nachstehenden Rechnungen.

I. Reduction von $(f\Delta u)^2$.

$$\begin{aligned} \frac{3}{16} (f\Delta u)^2 &= (abc)^2 d_x^2 \left\{ \frac{1}{5} b_x^2 c_x^2 (adu)^2 + \frac{4}{5} a_x b_x c_x^2 (adu) (bd u) \right\} \\ &= (abc)^2 d_x^2 \left\{ a_x b_x c_x^2 (adu) (bd u) + \frac{1}{10} c_x^2 (d_x (abu) - u_x (abd))^2 \right\}; \\ 2(abc)^2 c_x^2 d_x^2 (d_x (abu) - u_x (abd))^2 &= c_v^2 c_x^2 d_x^2 (d_x u_v - u_x d_v)^2 = 0; \\ \frac{3}{16} (f\Delta u)^2 &= (abc)^2 a_x b_x c_x^2 d_x^2 (adu) (bd u) \\ &= a_x b_x c_x^2 d_x (abc) (adu) (bd u) \{2a_x (bcd) + c_x (abd)\} = U_1 + U_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U_1 &= (abc)(adu)(bcd) a_x b_x c_x^2 d_x \{b_x(adu) + u_x(abd)\}; \\
 U_1 &= (abc)(bdu)^2(acd) a_x^2 b_x c_x^2 d_x = - (abc)(adu)^2(bcd) a_x b_x c_x^2 d_x; \\
 2 U_1 &= u_x \cdot (abc)(adu)(abd)(bcd) a_x b_x c_x^2 d_x \\
 &= -\frac{1}{3} u_x^2 \cdot (abc)(abd)(acd)(bcd) a_x b_x c_x d_x \\
 &= -\frac{1}{12} u_x^2 \left\{ -2f_v a_v^3 a_x + \frac{i}{8} f \right\} = -\frac{1}{12} u_x^2 \left\{ -\frac{i}{2} f + \frac{i}{8} f \right\} = \frac{1}{32} i f u_x^2; \\
 U_1 &= \frac{i f u_x^2}{64}; \\
 U_2 &= (abd)(abf)(adu)(bdu) a_x b_x d_x = -\frac{1}{2} f^2 u_x^2 + \frac{i}{32} f u_v^2 \\
 &= -\frac{1}{2} a_x^2 b_x^2 u_v^2 \left\{ a_v^2 b_x^2 - \frac{1}{2} (a_v b_v - b_v a_v)^2 \right\} + \frac{i}{32} f u_v^2 \\
 &= -\frac{i}{32} f u_x^2 - \frac{1}{32} (\Theta \varphi x)^2; \\
 U_1 + U_2 &= -\frac{i}{64} f u_x^2 - \frac{1}{32} (\Theta \varphi x)^2; \\
 (f \Delta u)^2 &= -\frac{i f u_x^2}{12} - \frac{1}{6} (\Theta \varphi x)^2.
 \end{aligned}$$

 II. Reduction von $(f \Delta u)^3$.

$$\begin{aligned}
 -\frac{3}{16} (f \Delta u)^3 &= (abc)^2 \left\{ \frac{2}{5} (dau)(dbu)(dcu) a_x b_x c_x + \frac{3}{5} (dau)^2 (dbu) b_x c_x^2 \right\} d_x \\
 &= (abc)^2 d_x \{ (dau)(dbu)(dcu) a_x b_x c_x \\
 &\quad + \frac{3}{10} a_v^2 (dau) \{ d_x(bcu) - u_x(bcd) \}^2 \} \\
 &= 2(abc)(dau)(dbu) a_x b_x c_x d_x (bcd)(acu) \\
 &\quad + \frac{3}{20} a_v^2 d_x a_x (dau) \{ d_x u_v - u_x d_v \}^2 = 0; \\
 (f \Delta u)^3 &= 0.
 \end{aligned}$$

 III. Reduction von $(\Delta f u)^4$.

$$\begin{aligned}
 \frac{3}{16} (\Delta f u)^4 &= (abc)^2 (adu)^2 \left\{ \frac{1}{5} c_x^2 (bdu)^2 + \frac{4}{5} b_x c_x (bdu)(cd u) \right\} \\
 &= (abc)^2 (adu)^2 \left\{ b_x c_x (bdu)(cd u) + \frac{1}{10} (d_x(bcu) - u_x(bcd))^2 \right\} \\
 &= (abc)^2 (adu)^2 (bdu)(cd u) b_x c_x + \frac{1}{20} a_v^2 (adu)^2 (d_x u_v - u_x d_v)^2 \\
 &= 2(abc)(abd)(acu)(adu)(bdu)(cd u) b_x c_x \\
 &= (acu)^2 a_v c_v u_v^2 a_x c_x = (acu)^2 u_v^2 \left\{ a_v^2 c_x^2 - \frac{1}{2} (a_v c_v - c_v a_v)^2 \right\} \\
 &= -\frac{1}{4} u_v^2 u_v^2 (v v_1 x)^2 = \frac{1}{32} H; \\
 (f \Delta u)^4 &= \frac{1}{6} H.
 \end{aligned}$$

Ich habe dabei, wie man sieht,

$$u_v^2 u_{i_1}^2 (v v_1 x)^2 = -\frac{1}{8} H (\text{symb. } H_x^1 u_v^2)$$

gesetzt.

Man beachte noch zweierlei Folgerungen aus den nun bewiesenen Formeln:

$$(\Delta f u)^2 = -\frac{i}{12} f \cdot u_x^2 - \frac{1}{6} (\Theta \varphi x)^2; \quad (\Delta f u)^3 = 0; \quad (\Delta f u)^4 = \frac{1}{6} H.$$

Zunächst nämlich ergibt sich, dass $(a \Delta u)^2$ ein Reducent ist. Sodann aber findet man folgende Relationen, von denen ich später Gebrauch machen werde:

$$(a b \Delta)^2 a_x^2 b_x^2 \Delta_x^4 = \frac{-i}{12} f^2; \quad \Delta_{\Theta}^2 = \frac{2i}{3} f;$$

$$\Theta_v^1 (a_x \Delta_{\varphi} - \Delta_x a_{\varphi})^2 a_x^2 \Delta_x^4 = -\frac{1}{6} (\Theta^2 \varphi x)^4; \quad (\Theta^2 \varphi x)^4 = 3 \Delta^2 - 4 i f^3.$$

§ 9.

Das System S_1 . Vierter Theil: Formen mit fünf oder mehr Symbolen.

Sämmtliche symbolische Producte, welche einen Factor (abc) und dabei mehr als vier Symbole enthalten, sind, wie ich jetzt zeigen werde, reducibel.

Offenbar ist dies nur für Producte mit 5 Symbolen nachzuweisen, da es für die übrigen dann von selbst folgt. Die Producte mit 5 Symbolen entstehen aber, von reduciblen Formen abgesehen, durch Faltung aus:

$$(f \Delta u) \cdot f = a_x^3 \Delta_x^5 (a \Delta u) b_x^4.$$

Es sind also nur folgende Formen zu berücksichtigen:

$$U_1 = a_x^2 b_x^3 (a b u) (a \Delta u) \Delta_x^5; \quad U_2 = a_x^3 (a \Delta u) (b \Delta u)^2 b_x^2 \Delta_x^3;$$

$$U_3 = a_x^1 (a \Delta u) (b \Delta u)^3 b_x \Delta_x^2; \quad U_4 = a_x^3 (a \Delta u) (b \Delta u)^1 \Delta_x.$$

Von diesen sind U_2, U_3, U_4 reducibel, weil sie den Reducenten $(b \Delta u)^2$ zum Factor haben. Für U_1 aber hat man die Formel:

$$\begin{aligned} 2 U_1 &= a_x^2 b_x^2 \Delta_x^5 (a b u) \{ \Delta_x (a b u) - u_x (a b \Delta) \} \\ &= \Delta \cdot a_x^2 b_x^2 (a b u)^2 - u_x \cdot a_x^2 b_x^2 \Delta_x^5 (a b \Delta) (a b u). \end{aligned}$$

Meine Behauptung ist also erwiesen.

§ 10.

Definitive Gestalt des Systems S_1 .

Stellen wir zusammen, so umfasst das System S_1 bei der allgemeinen, ternären, biquadratischen Form nur folgende Bildungen:

$$S_1 : f, \Theta, K, j, \Delta, (\Delta f u).$$

Drittes Capitel.

Die besondere biquadratische Form $x_1^3 x_2 + x_2^3 x_3 + x_3^3 x_1$.

§ 11.

Definition und charakteristische Eigenschaften.

Wenn man für die besondere Form

$$f = x_1^3 x_2 + x_2^3 x_3 + x_3^3 x_1$$

die Covariante

$$\varphi = 2(ffu)^4 = u_v^4$$

berechnet, so findet man:

$$\varphi = u_1^3 u_2 + u_2^3 u_3 + u_3^3 u_1.$$

Des Weiteren ergibt sich:

$$f_\varphi^2 = \frac{1}{8} u_x^2, \quad i = \frac{4}{3} f_\varphi^4 = 1.$$

Zwischen den so berechneten Formen besteht also die Relation:

$$(IV) \quad f_\varphi^2 - \frac{i}{8} \cdot u_x^2 = 0.$$

Dass diese Relation für f charakteristisch ist, werde ich bei späterer Gelegenheit zeigen. Einstweilen nehme ich sie als *Definition* der im Folgenden zu betrachtenden Form f , indem ich das System der ternären, biquadratischen Form $f = a_v^4$ unter der einzigen vereinfachenden Bedingung aufstellen werde, dass die Relation (IV) erfüllt sei.

Aus dieser Bedingung ergibt sich sofort:

$$2(\varphi \varphi x)^4 = 4(a, b_x - b, a_x)^4 = 8a_1^4 b_x^4 - 32a_1^3 a_x \cdot b_1 b_x^3 + 24a_1^2 x^2 \cdot b_v^2 b_x^2 = if.$$

Die Form if hängt also gerade so von φ ab, wie φ von f . Hieraus folgt allgemein: Hat man ein symbolisches Product P , welches

$$a, b, c, \dots, v, v_1, v_2, \dots, x, u$$

enthält, und man ersetzt diese Grössen resp. durch:

$$v, v_1, v_2, \dots, ia, ib, ic, \dots, u, x,$$

so erhält man eine Form Q , die ebenso von φ abhängt, wie P von f . — Ich werde diesen Process, durch den man Q aus P erhält, als *Vertauschung* bezeichnen; durch ihn gehen reducible Formen in reducible Formen und Reducenten in Reducenten über.

§ 12.

Das System S_2 der besonderen Form f .

Aus dem Vertauschungssatze folgt, dass das System S_2 unserer Form f jedenfalls nicht grösser ist als dasjenige System, welches aus S_1 (§ 10.):

$$f, \Theta, K, j, \Delta, (f\Delta u)$$

durch Vertauschung hervorgeht. Aus f entsteht dabei φ , aus Θ die in § 8. eingeführte Form H . Die aus K hervorgehende Form will ich L nennen. Aus $j, \Delta, (f\Delta u)$ ergeben sich

$$j(\varphi) = \frac{1}{3} (\varphi Hx)^4; \quad \Delta(\varphi) = -\frac{2}{3} H\varphi^2; \quad (\Delta(\varphi), \varphi, x).$$

Ich will nun zeigen, dass diese letzten drei Formen die Invariante i zum Factor haben, so dass also das System S_2 von f nur folgende drei Formen umfasst:

$$S_2: \quad \varphi, H, L.$$

Hierzu dienen nachstehende Rechnungen.

Zunächst ist:

$$\begin{aligned} \frac{3}{16} \Delta \varphi^4 &= (abc)^2 \left\{ \frac{1}{5} a_v^2 b_v^2 c_x^2 + \frac{4}{5} a_v^2 b_v c_v b_x c_x \right\} = 0; \\ \frac{3}{16} \Delta \varphi^3 &= (abc)^2 u_v^2 \left\{ \frac{2}{5} a_v b_v c_v a_x b_x c_x + \frac{3}{5} a_v^2 b_v b_x c_x^2 \right\} \\ &= -\frac{1}{5} (abc)^2 u_v a_x a_v (b_x c_v - c_x b_v)^2 \\ &= -\frac{1}{10} a_v^2 u_v a_x a_v (v v_1 x)^2 = 0; \\ \frac{3}{16} \Delta \varphi^2 &= (abc)^2 u_v^2 \left\{ \frac{1}{5} a_v^2 b_x^2 c_x^2 + \frac{4}{5} a_v b_v a_x b_x c_x^2 \right\} \\ &= (abc)^2 a_x^2 u_v^2 \left\{ b_x^2 c_v^2 - \frac{2}{5} (b_x c_v - c_x b_v)^2 \right\} \\ &= \frac{i}{8} (abu)^2 a_x^2 b_x^2 - \frac{1}{5} a_v^2 a_x^2 u_v^2 (v v_1 x)^2 = -\frac{i}{64} \Theta; \\ \frac{3}{16} \Delta \varphi &= (abc)^2 a_v a_x b_x^2 c_x^2 u_v^3 = (abc) a_v a_x b_x^2 c_x^2 u_v^2 \{ a_v (bcu) - 2b_v (acu) \} \\ &= (abc) c_x^2 u_v^2 (bcu) \{ a_v^2 a_x b_x^2 + 2a_v b_v a_x^2 b_x \} \\ &= (abc) c_x^2 u_v^2 \{ 2a_v^2 a_x b_x^2 + a_x^3 b_v^2 - a_x (a_v b_x - b_v a_x)^2 \} (bcu) \\ &= \frac{i}{4} (bcu)^2 u_x b_x^2 c_x^2 - \frac{1}{2} (abc) c_x^2 u_v^2 (a_v b_x - b_v a_x)^2 (u_x (abc) \\ &\quad - c_x (abu)) \\ &= -\frac{i}{32} \Theta u_x - \frac{1}{4} c_v c_x^2 u_v^2 (v v_1 x)^2 \{ u_x c_v - c_x u_v \} \\ &= -\frac{i}{32} \Theta u_x - \frac{1}{32} f_H. \end{aligned}$$

Es folgt also, dass Δ , ein Reducent ist.

Ferner ist:

$$\Delta_x^2 (a\Delta u)^4 = \frac{1}{6} H,$$

also

$$(a\Delta u)^4 \Delta_v^2 u_v^2 = \frac{1}{6} H\varphi^2;$$

$$\Delta_x^2 (a_v \Delta_x - \Delta_v a_x)^4 = \frac{1}{6} (\varphi Hx)^4;$$

$$\begin{aligned}
 H_{\varphi}^2 &= -\frac{i}{2} (a \Theta u)^4 = -\frac{3}{2} i j; \\
 (\varphi H x)^4 &= 6 a_1^4 \Delta_1^6 - 24 a_1^3 a_x \Delta_1^5 \Delta_x + 36 a_1^2 a_x^2 \Delta_1^4 \Delta_x^2 \\
 &\quad - 24 a_1 a_x^3 \Delta_1^3 \Delta_x^3 + 6 a_x^4 \Delta_1^2 \Delta_x^4 \\
 &= 4 \frac{1}{2} i \Delta - 6 i \Delta + 4 \frac{1}{2} i \Delta = 3 i \Delta;
 \end{aligned}$$

somit:

$$\Delta(\varphi) = ij; \quad j(\varphi) = i\Delta; \quad (\Delta(\varphi), \varphi, x) = i(j, \varphi, x),$$

womit unsere Behauptung bewiesen ist.

Man sieht, dass

$$j, \Delta, (f\Delta u)$$

durch Vertauschung in

$$\Delta, j, (j\varphi x)$$

übergehen. Man schliesst hieraus, dass den Formeln:

$$\begin{aligned}
 (f\Delta u)^2 &= -\frac{if}{12} \cdot u_x^2 - \frac{1}{6} (\Theta \varphi x)^2, & \Delta_{\varphi} &= -\frac{1}{6} u_x \Theta - \frac{1}{6} f_H, \\
 (f\Delta u)^3 &= 0, & \Delta_{\varphi}^2 &= -\frac{i}{12} \Theta, \\
 (f\Delta u)^4 &= \frac{1}{6} H, & \Delta_{\varphi}^3 &= 0, \quad \Delta_{\varphi}^4 = 0
 \end{aligned}$$

durch Vertauschung folgende entsprechen:

$$\begin{aligned}
 (j\varphi x)^2 &= -\frac{ij\varphi}{12} \cdot u_x^2 - \frac{1}{6} (fHu)^2, & f_j &= \frac{1}{6} u_x H - \frac{1}{6} \Theta_{\varphi}, \\
 (j\varphi x)^3 &= 0, & f_j^2 &= -\frac{1}{12} H, \\
 (j\varphi x)^4 &= \frac{i}{6} \Theta, & f_j^3 &= 0, \quad f_j^4 = 0,
 \end{aligned}$$

dass also $(j\varphi x)^2$ und a_j Reducenten sind.

§ 13.

Das System S_{11} . Einleitung.

Es handelt sich nunmehr, um auch das System S_3 und damit das volle Formensystem von f zu haben, nur noch darum, das System S_1 und das System S_2 zu combiniren. Man hat also, theoretisch zu reden, alle Formen:

$$f^{\alpha} \Theta^{\alpha} K^{\alpha} j^{\alpha} \Delta^{\alpha} (f\Delta u)^{\alpha} = A, \quad \varphi^{\beta} H^{\beta} L^{\beta} = B$$

in symbolische Producte zu entwickeln und dann die Producte $A \cdot B$ in der Art zu falten, dass bei jeder Faltung ein Factor von A und einer von B verwendet wird.

Diese Faltungen verändern

$$a_x u_r, \quad (abu) u_r, \quad a_x (v v_1 x), \quad (abu) (v v_1 x),$$

resp. in:

$$a_r, \quad a_r b_x - b_r a_x, \quad a_r u_r - u_r a_r, \quad a_r b_r - b_r a_r.$$

Ich nenne die Zahlen, welche angeben, wie viele solche Faltungen man vornehmen muss, um eine bestimmte Form P zu erzielen, beziehungsweise

$$r_1, r_2, r_3, r_4$$

und bezeichne diese r , zusammen mit den Exponenten α, β in den A, B als die *Charaktere* von P .

Da man bei den Faltungen die verschiedenen Factoren von A und B verwenden darf, so giebt es im Allgemeinen viele Formen P , welche dieselben Charaktere haben.

§ 14.

Anordnung nach Charakterensystemen.

Die somit eingeführten Charaktere dienen mir dazu, die Formen P einer bestimmten Anordnung und damit das System S_3 , welches wir suchen, einer genauen Definition zu unterwerfen. Ich will nämlich diejenigen P voranstellen, bei denen die Summe $r_1 + r_2 + r_3 + r_4$ einen kleineren Werth hat, ferner unter solchen P , bei welchen $r_1 + r_2 + r_3 + r_4$ denselben Werth hat, diejenigen als einfacher betrachten, bei denen r_4 kleiner ist. *Das System S_3 umfasse sodann alle diejenigen P , welche sich nicht durch einfachere (vorangehende) ausdrücken lassen.*

Die hiermit getroffene Verabredung ist zweckmässig, insofern man für jedes Charakterensystem jedenfalls nur ein P zu berücksichtigen braucht. Denn, haben P_1 und P_2 dieselben Charaktere, so ist $P_1 - P_2$ das Aggregat einfacherer P .

Insbesondere hat man hiernach die Regel: dass ein Charakterensystem, welches auf nur *ein* reducibles P führt, weggelassen werden kann. — Dies tritt zumal ein, wenn ein *zerfallendes* P vorhanden ist. Dies ist z. B. der Fall, wenn man die Zahlen r_1, r_2, r_3, r_4 so klein wählt, dass schon ein Theil der Factoren von A, B für sie ausreicht. Wir dürfen daher im Folgenden voraussetzen, dass zu den in Betracht kommenden Faltungen jedenfalls alle Formen gebraucht werden müssen, die Factoren von A, B sind.

§ 15.

Inhalt der folgenden Paragraphen.

Es handelt sich nunmehr darum, auf Grund der getroffenen Vereinbarungen alle überflüssigen P auszuschneiden. Ich werde dies in den folgenden Paragraphen in der Weise ausführen, dass ich zunächst eine Reihe von Beschränkungen aufstelle, denen man die Charaktere α, β, r unterwerfen kann, und unter den dann noch möglichen P auf Grund

specieller Rechnung jedesmal die reducibelen entferne. Im Schlussparagraphe (§ 20.) habe ich das so resultirende System S_3 mit den früheren S_1, S_2 zu einer Tabelle vereinigt.

§ 16.

Die Charaktere α_4, α_5 und α_6 .

Zunächst behaupte ich, dass man alle Charakterensysteme weglassen darf, bei denen eine der Zahlen $\alpha_1, \alpha_5, \alpha_6$ von Null verschieden ist. Zunächst nämlich, wenn $\alpha_5 > 0$ oder $\alpha_6 > 0$, so hat P den Reducenten Δ_r zum Factor.*) Hieraus folgt, dass S_3 überhaupt keine Form enthält, bei deren Bildung Δ betheiligt ist. Also tritt, nach dem Vertauschungsprincip, auch keine Form auf, bei der j betheiligt wäre. Und somit kann auch α_4 immer $= 0$ genommen werden.

§ 17.

Der Charakter r_1 .

Ich sage ferner, dass für $r_1 > 0$ nur $r_1 = 1$ und $r_2 = r_3 = r_4 = 0$ zu beachten ist.

Man hat nämlich folgende Formeln:

$$\begin{aligned} a_r^2 a_x^2 u_r^2 &= \frac{i}{8} u_x^2, \\ \Theta_r^2 \Theta_x^2 u_{\vartheta}^2 u_i^2 &= -\frac{1}{6} II, \\ \Theta_x^3 \Theta_i (\vartheta v x) u_{\vartheta} u_i^2 &= 0, \\ \Theta_x^3 \Theta_r (\vartheta v x)^2 u_r &= -i u_x f, \\ \Theta_x^2 \Theta_r^2 (\vartheta v x) u_{\vartheta} u_r &= 0, \\ \Theta_x^2 \Theta_r^2 (\vartheta v x)^2 &= -\frac{7}{3} if, \end{aligned}$$

aus denen hervorgeht, dass die Ausdrücke:

$$a_r^2, \Theta_r^2, \Theta_r (\vartheta v x)$$

und also auch:

$$a_{\eta}^2, a_{\eta} (a H u)$$

Reducenten sind. Für $r_1 > 1$, oder für $r_1 = 1$ und $r_2 > 0$, oder $r_3 > 0$, oder $r_4 > 0$ entstehen aber P , welche solche Factoren haben.

Unter den Formen mit $r_1 > 0$ sind hiernach nur folgende in Betracht zu ziehen:

*) Eine Ausnahme bilden nur die Charakterensysteme, bei denen $r_1 = 0$ ist, dieselben führen auf zerfallende Formen.

$$f_{\varphi}; f_H; f_L; \Theta_{\varphi}; \Theta_H; \Theta_L; K_{\varphi}; K_H; K_L.$$

Aber auch noch K_L kann weggelassen werden, da es nach § 3. reducibel ist.

§ 18.

Der Charakter r_4 .

Aehnlich schliesst man, dass alle P reducibel sind, bei denen $r_4 > 0$ ist. In der That, man hat:

$$\Theta_H = -8u_{\vartheta}(\nu\nu_1x)^2\Theta_v\Theta_x^3u_vu_{v_1}^2 = -8u_{\vartheta}(\nu\nu_1x)\Theta_v\Theta_x^3u_vu_{v_1}^2\{u_v(\vartheta\nu_1x) - u_{v_1}(\vartheta\nu x) + u_x(\vartheta\nu\nu_1)\},$$

$$H_{\Theta} = -8u_{\vartheta}(\nu\nu_1x)(\vartheta\nu\nu_1)\Theta_x^4u_v^2u_{v_1}^2 = 16u_{\vartheta}(\nu\nu_1x)u_v^2u_{v_1}^2\Theta_x^3(\vartheta\nu_1x)\Theta_v,$$

$$\Theta_{\Theta}^2 = -8(\vartheta\nu\nu_1)^2\Theta_x^4u_v^2u_{v_1}^2 = 16(\vartheta\nu\nu_1)(\vartheta\nu_1x)\Theta_v\Theta_x^3u_v^2u_{v_1}^2,$$

$$(\Theta H u)\Theta_x^3u_{\vartheta}H_{\vartheta}u_{\eta}^4 = 16\Theta_v\Theta_x^3u_{\vartheta}(\vartheta\nu\nu_1)u_v^2u_{v_1}^3,$$

$$(\vartheta\eta x)\Theta_x^4u_{\eta}^3H_xH_{\vartheta} = 16a_x^3b_x^2u_{\eta}^3b_{\eta}H_x(abH).$$

Aus den in diesen Gleichungen links stehenden Formen entstehen durch Faltung lauter solche P , bei denen entweder $r_1 > 0$ und $r_4 > 0$ oder $r_2 > 0$ und $r_3 > 0$, also nur reducible Formen. Somit ist H_{ϑ} ein Reducent. Aber alle Charakterensysteme, bei denen $r_4 > 0$, führen auf Formen P , die diesen Factor haben.

§ 19.

Die Charaktere r_2 und r_3 .

Die Untersuchung der Formen P , bei denen $r_2 > 0$ ist, gestaltet sich etwas umständlicher. Die betr. Formen entstehen durch Faltung aus den Producten:

$$Q = \Theta^{\alpha}K^{\alpha_1}\varphi^{\beta_1}H^{\beta_2}L^{\beta_3},$$

indem man Factorenpaare $(abu)u_v$ in $a_vb_x - b_vax$ faltet.

Man beachte nun Folgendes:

1) Ist einer der Charaktere $r_1, r_3, r_4 > 0$, so entstehen nach § 17. u. 18. reducible Formen.

2) Die Quadrate K^2 und L^2 sind nach § 3. ganze Functionen anderer Formen.

3) Ebenso sind die Fälle wegzulassen, in denen:

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 > 1,$$

oder

$$\alpha_2 > 3,$$

oder gleichzeitig

$$\alpha_2 + \alpha_3 > 2, \quad \beta_1 + \beta_2 > 1$$

ist. Denn dann entstehen P , welche die Factoren haben:

$$\varphi, H, L, \Theta, K, (\varphi\Theta x)^2, (H\Theta x)^2, (\Theta^2\varphi x)^4, (\Theta^2Hx)^4, (L\Theta^3x)^6.$$

Somit dürfen wir $r_1 = 0$, $r_3 = 0$, $r_4 = 0$ nehmen und uns auf folgende Producte Q beschränken:

$$\Theta \varphi, \Theta^2 \varphi, \Theta H, \Theta^2 H, \Theta L, \Theta^2 L, \Theta^3 L, K\varphi, KH, KL, \Theta K\varphi, \\ \Theta KH, \Theta KL.$$

Aus ihnen entstehen durch Faltung die Formen:

$$(\Theta \varphi x), (\Theta \varphi x)^2, (\Theta^2 \varphi x)^3, (\Theta^2 \varphi x)^4, (\Theta Hx), (\Theta Hx)^2, (\Theta^2 Hx)^3, (\Theta^2 Hx)^4, \\ (\Theta Lx), (\Theta Lx)^2, (\Theta^2 Lx)^3, (\Theta^2 Lx)^4, (\Theta^3 Lx)^5, (\Theta^3 Lx)^6, \\ (K\varphi x), (K\varphi x)^2, (K\varphi x)^3, (KHx), (KHx)^2, (KHx)^3, (KLx), \\ (KLx)^2, (KLx)^3, \\ (\Theta K, \varphi, x)^1, (\Theta K, H, x)^4, (\Theta K, L, x)^1, (\Theta K, L, x)^5.$$

Aber viele unter diesen Formen sind noch reducibel. Nach § 3. lassen sich

$$(\Theta Lx), (\Theta^2 Lx)^3, (\Theta^3 Lx)^5, (K\varphi x), (KHx), (KLx), \\ (\Theta K, L, x)^4, (KLx)^2$$

durch andere Formen ausdrücken. Ferner ist nach § 8.:

$$(\Theta^2 \varphi x)^4 = 3\Delta^2 - 4if^3$$

also auch $(\Theta^2 \varphi x)^4$ und $(K\Theta, \varphi, x)^4$ reducibel.

Von den P , bei denen $r_2 > 0$ ist, sind also nur folgende in das System S_3 aufzunehmen:

$$(\Theta \varphi x), (\Theta \varphi x)^2, (\Theta^2 \varphi x)^3, (\Theta Hx), \Theta(Hx)^2, (\Theta^2 Hx)^3, (\Theta^2 Hx)^4, \\ (\Theta Lx)^2, (\Theta^2 Lx)^4, (\Theta^3 Lx)^6, \\ (K\varphi x)^2, (K\varphi x)^4, (KHx)^2, (KHx)^3, (KLx)^3, (\Theta K, H, x)^4, \\ (\Theta K, L, x)^5.$$

Aus ihnen erhält man durch Vertauschung die neuen Formen:

$$(fHu), (fHu)^2, (fH^2u)^3, (\Theta Hu), (\Theta Hu)^2, (\Theta H^2u)^4, (\Theta H^2u)^4, \\ (HKu)^2, (H^2Ku)^4, (H^3Ku)^6, \\ (fLu)^2, (fLu)^3, (\Theta Lu)^2, (\Theta Lu)^3, (KLu)^3, (\Theta, HL, u)^4, (K, HL, u)^5.$$

Dies sind die Formen von S_3 bei denen $r_3 > 0$ ist.

§ 20.

Das volle System S von f .

Das System S_3 von f wurde in den letzten Paragraphen vollständig aufgestellt. Es umfasst die Formen der §§ 17. und 19. Das volle System S von f besteht aus S_3 und den in § 10. bez. § 12. aufgestellten S_1 und S_2 . Wir erhalten somit für S eine Tabelle, die hier beigegeben ist und den Abschluss meiner diesmaligen Untersuchungen bildet.

Erlangen im August 1880.