BEITRÄGE ZUR ANALYTISCHEN ZAHLENTHEORIE.

Von **Edmund Landau** (Berlin).

Adunanza del 26 gennaio 1908.

EINLEITUNG.

Die Herren HADAMARD ¹⁾ und DE LA VALLÉE POUSSIN ²⁾ haben zuerst unabhängig bewiesen, dass die RIEMANN'sche Funktion $\zeta(s)$ für kein s mit dem reellen Teil 1 verschwindet:

$$(1) \quad \zeta(1 + ti) \neq 0 \quad (t \geq 0).$$

Herr MERTENS ³⁾ hat den Beweis von (1) derart verschärft, dass sich zugleich eine obere Schranke für

$$\frac{1}{|\zeta(1 + ti)|}$$

ergibt, in der Gestalt einer Funktion von t , welche für alle hinreichend grossen positiven t kleiner als $e^{a_1 t}$ ist [wo a_1 eine positive Konstante ⁴⁾ bezeichnet]; die Unter-

¹⁾ *Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et ses conséquences arithmétiques* [Bulletin de la Société Mathématique de France, Bd. XXIV (1896), S. 199-220], S. 200-202.

²⁾ *Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers* [Annales de la Société Scientifique de Bruxelles, Bd. XX, Teil II (1896), S. 183-256 und 281-397], S. 224-242 und 395-397.

³⁾ *Über eine Eigenschaft der RIEMANN'schen ζ -Function* [Sitzungsberichte der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien, mathematisch-naturwissenschaftliche Classe, Bd. CVII (1898), Abt. IIa, S. 1431-1436].

⁴⁾ Im Folgenden bezeichne ich mit $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{1,2}$ positive Grössen, die in Bezug auf die Variablen in den betreffenden Relationen konstant sind. Die Bezeichnung ist stets so gewählt, dass jede Ungleichung bestehen bleibt, wenn die betreffende Konstante durch irgend eine grössere Zahl ersetzt wird; d. h. ich würde z. B. nicht

$$t^2 + t > a e^{\sqrt[3]{\log t}} \quad (t \geq 1),$$

sondern

$$t^2 + t > \frac{1}{a} e^{\sqrt[3]{\log t}} \quad (t \geq 1)$$

schreiben.

suchung darf auf positive t beschränkt werden, da

$$|\zeta(1+ti)| = |\zeta(1-ti)|$$

ist. In Herrn MERTENS' Formel

$$\frac{1}{|\zeta(1+ti)|} < f(t) \quad (t > 0)$$

ist tatsächlich $f(t)$ eine Funktion, für welche

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{e^{\frac{5}{2}\pi t} t^{-2}}$$

existiert; d. h. es ist ⁵⁾

$$(2) \quad \frac{1}{\zeta(1+ti)} = O\left(\frac{e^{\frac{5}{2}\pi t}}{t^2}\right),$$

also a fortiori

$$\frac{1}{\zeta(1+ti)} = O(e^{\frac{5}{2}\pi t}).$$

Es ist daher für alle $t \geq a_2$

$$\left| \frac{1}{\zeta(1+ti)} \right| < a_3 e^{\frac{5}{2}\pi t};$$

wegen

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\zeta(1+ti)} = 0$$

ist übrigens für alle $t > 0$

$$\left| \frac{1}{\zeta(1+ti)} \right| < a_4 e^{\frac{5}{2}\pi t}.$$

Für die Anwendungen, welche ich in der Primzahltheorie ⁶⁾ von Abschätzungen der Gestalt

$$\frac{1}{\zeta(1+ti)} = O(g(t))$$

⁵⁾ Unter dem Zeichen $O(g(t))$ verstehe ich in (2) und später folgendes. Es sei $g(t)$ eine Funktion, welche mindestens für alle positiven t von einer gewissen Stelle an definiert und positiv ist, und $f(t)$ eine reelle oder komplexe Funktion der positiven Variablen t , welche gleichfalls für alle t von einer gewissen Stelle an definiert ist. Dann bedeutet die Gleichung

$$f(t) = O(g(t)),$$

dass

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{|f(t)|}{g(t)}$$

endlich ist; d. h. es gibt zwei Konstanten t_0 und A derart, dass für alle $t \geq t_0$

$$|f(t)| < A g(t)$$

ist.

⁶⁾ Zuerst in meiner Arbeit: *Neuer Beweis des Primzahlsatzes und Beweis des Primidealsatzes* [Mathematische Annalen, Bd. LVI (1903), S. 645-670] und später in einer Reihe anderer Abhandlungen.

gemacht habe, musste ich die MERTENS'sche obere Schranke durch eine andere Funktion $g(t)$ ersetzen, für welche

$$\int_1^{\infty} \frac{\log^2 t}{t^2} g(t) dt$$

konvergiert; der springende Punkt bei meinen vereinfachten Beweisen der HADAMARD-DE LA VALLÉE POUSSIN'schen Hauptsätze über Primzahlen und bei den Beweisen meiner neuen Sätze war nämlich, dass ich die absolute Konvergenz des Integrals

$$\int_1^{\infty} \frac{\log^2 t}{t^2} \frac{1}{\zeta(1+ti)} dt$$

auf relativ elementarem Wege zeigen und nutzbar machen konnte. In der Tat bewies ich ⁷⁾, dass

$$(3) \quad \frac{1}{\zeta(1+ti)} = O(\log^7 t)$$

ist. D. h. es ist für $t \geq a$,

$$\frac{1}{|\zeta(1+ti)|} < a_6 \log^7 t,$$

also, einfacher ausgedrückt, für $t \geq 2$

$$\frac{1}{|\zeta(1+ti)|} < a_7 \log^7 t,$$

$$(4) \quad |\zeta(1+ti)| > \frac{1}{a_7} \frac{1}{\log^7 t}.$$

Die Relationen ⁸⁾ (3) und (4) lassen sich auch so interpretieren: es ist

$$(5) \quad \liminf_{t \rightarrow \infty} \log^7 t |\zeta(1+ti)| > 0.$$

Hierüber hinaus konnte ich erst später ⁹⁾ durch Kombination eines neueren Satzes von Herrn HADAMARD über DIRICHLET'sche Reihen mit meinen früheren Methoden gelangen, und ich bewies, dass für $t \geq 2$

$$(6) \quad |\zeta(1+ti)| > \frac{1}{a_8} \frac{1}{\log^6 t},$$

⁷⁾ Vergl. S. 654 meiner in Anm. ⁶⁾ genannten Arbeit; die Relation (3) hatte ich übrigens — ohne damals ihre Anwendungen auf die Primzahltheorie bereits entdeckt zu haben — schon in der Abhandlung bewiesen: *Ueber die zu einem algebraischen Zahlkörper gehörige Zetafunction und die Ausdehnung der TSCHEBYSCHEF'schen Primzahlentheorie auf das Problem der Vertheilung der Primideale* [Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. CXXV (1903), S. 64-188], S. 96.

⁸⁾ Alle diese für $t \geq t_0$ giltigen Relationen lassen sich, da $\zeta(1+ti)$ für $t > 0$ definiert ist, natürlich auch in eine Form setzen, welche für alle $t > 0$ giltig ist; statt (4) kann man z. B. schreiben:

$$|\zeta(1+ti)| > \frac{1}{a} \frac{1}{\log^7(2+t)} \quad (t > 0).$$

Aber es ist übersichtlicher, jene Sätze in der Gestalt des Textes zu schreiben.

⁹⁾ *Sur une inégalité de M. HADAMARD* [Nouvelles Annales de Mathématiques, Ser. IV, Bd. VI (1906), S. 135-140].

d. h.

$$\liminf_{t=\infty} \log^6 t |\zeta(1+ti)| > 0$$

ist, womit natürlich festgestellt war, dass die linke Seite von (5) $\neq 0$ ist.

Inzwischen ist es mir gelungen, dies Resultat (6) auch ohne jene neuere HADAMARD'sche Hilfsbetrachtung ¹⁰⁾ zu erreichen, und ich will die vorliegende Arbeit damit beginnen, jenen einfacheren Beweis mitzuteilen. Im § 1 schicke ich einige bekannte Hilfssätze mit Beweisen voraus, damit dem Leser das Nachschlagen in der etwas umfangreich gewordenen Literatur ganz erspart bleibt; der Leser braucht von der RIEMANN'schen Zetafunktion noch nichts zu wissen. Im § 2 beweise ich dann den Satz (6) auf dem vereinfachten Wege. Im § 3 werde ich durch Weiterbildung des Verfahrens den Nachweis führen, dass für $t \geq 2$

$$|\zeta(1+ti)| > \frac{1}{a_9} \frac{1}{\log^5 t}$$

ist. Im § 4 gebe ich den allgemeinen Ansatz an, der mich zu der Wahl der benutzten elementar-trigonometrischen Ungleichungen geführt hat.

Im § 5 werde ich für die nachfolgenden Anwendungen einen Gedankengang allgemein-funktionentheoretischer Art von Herrn CARATHÉODORY etwas weiter ausführen, als ich dies bei anderer Gelegenheit schon getan habe ¹¹⁾. Im § 6 werde ich nur Bekanntes über die RIEMANN'sche Zetafunktion mit bekannten Beweisen reproduzieren. Ich finde es auch für solche Leser, denen diese Sätze schon geläufig sind, nützlich, einmal im Zusammenhang zu sehen, wie sich der in Betracht kommende HADAMARD'sche Satz über ganze transzendente Funktionen (unter Ausschaltung alles für die vorliegenden Zwecke Unnötigen) zur Zeit am einfachsten beweisen lässt, und wie daraus möglichst schnell das grundlegende HADAMARD'sche Ergebnis über die Gestalt der WEIERSTRASS'schen Produktzerlegung der ganzen transzendenten Funktion $(s-1)\zeta(s)$ erschlossen werden kann. Auch beweise ich alsdann nach Herrn DE LA VALLÉE POUSSIN ¹²⁾, dass

$$\zeta(s) \neq 0$$

für

$$s = \sigma + ti, \quad t \geq 2, \quad \sigma \geq 1 - \frac{1}{a_{10}} \frac{1}{\log t}$$

ist. Da ich für meine Zwecke viele seiner Betrachtungen fortlassen kann, wird Herrn

¹⁰⁾ Jene Hilfsbetrachtung bestand in der Anwendung einer quadratischen Ungleichung, deren Koeffizienten von den Variablen des Problems abhängen. Ich verwende jetzt mit gleichem Erfolg eine quadratische Ungleichung mit konstanten Koeffizienten.

¹¹⁾ Vergl. meine Arbeit *Über den PICARD'schen Satz* [Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich, Bd. LI (1906), S. 252-318], S. 275-277.

¹²⁾ *Sur la fonction $\zeta(s)$ de RIEMANN et le nombre des nombres premiers inférieurs à une limite donnée* [Mémoires couronnés et autres Mémoires publiés par l'Académie Royale de Belgique, Bd. LIX (1899), S. 1-74], S. 7-29.

DE LA VALLÉE POUSSIN's berühmter Beweis dem Leser dadurch in einer relativ einfachen Gestalt vorgeführt ¹³⁾).

Im § 7 wende ich die in den §§ 5-6 bewiesenen bekannten Sätze und andere neu zu entwickelnde Kunstgriffe an, um den Nachweis des Satzes zu führen: es existiert für jedes gegebene $\varepsilon > 0$ eine positive Konstante ¹⁴⁾ a_{11} , so dass für $t \geq 2$

$$|\zeta(1 + ti)| > \frac{1}{a_{11}} \frac{1}{(\log t)^{1+\varepsilon}}$$

ist. Im § 8 werde ich sogar beweisen ¹⁵⁾, dass für $t \geq 3$

$$|\zeta(1 + ti)| > \frac{1}{a_{12}} \frac{1}{\log t \cdot \log \log t},$$

d. h., dass

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \log t \cdot \log \log t |\zeta(1 + ti)| > 0$$

ist.

Im bisher angekündigten ersten Teil der vorliegenden Arbeit war nur von der Funktion $\zeta(s)$ die Rede; im zweiten Teil handelt es sich um ihre Anwendungen auf das Problem von der Verteilung der Primzahlen und allgemeiner um die Folgerungen, welche man aus den Eigenschaften der durch eine DIRICHLET'sche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s}$$

definierten analytischen Funktion über die Grössenordnung der summatorischen Funktion

$$\sum_{n=1}^x b_n$$

ihrer Koeffizienten ziehen kann.

Es werde

$$s(x) = \sum_{p \leq x} \log p$$

gesetzt, wo, wie stets in dieser Arbeit, der Summationsbuchstabe p alle Primzahlen des betreffenden Intervalls durchläuft; es bezeichne $\pi(x)$ die Anzahl der Primzahlen $\leq x$, d. h. es sei

$$\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1.$$

Die Herren HADAMARD ¹⁶⁾ und DE LA VALLÉE POUSSIN ¹⁷⁾ haben zuerst (unabhängig)

¹³⁾ Natürlich hätte Herr DE LA VALLÉE POUSSIN ihm, wenn er nicht andere Zwecke mitverfolgt hätte, auch ungefähr diese Gestalt gegeben.

¹⁴⁾ a_{11} ist konstant, wenn ε als konstant angesehen wird; andernfalls hängt a_{11} von ε ab, aber nicht von t .

¹⁵⁾ Den § 7 schicke ich voraus, damit der neue Weg deutlicher wird. Überhaupt liegt mir in dieser schwierigen Materie viel daran, die Brücken nicht abzubringen, die zu den Methoden geführt haben. Vielleicht wird dadurch der eine oder andere Leser zur Mitarbeit herangezogen werden.

¹⁶⁾ Vergl. S. 217-218 der in Anm. 1) zitierten Arbeit.

¹⁷⁾ Vergl. S. 251 der in Anm. 2) zitierten Arbeit.

bewiesen, dass

$$(7) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\vartheta(x)}{x} = 1$$

ist. Aus (7) folgte unmittelbar, wie Herr DE LA VALLÉE POUSSIN ¹⁸⁾ besonders hervorhob, der Satz

$$(8) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x) \log x}{x} = 1.$$

Übrigens hatte schon SYLVESTER ¹⁹⁾ diesen einfachen Übergang gekannt, indem er bewiesen hatte, dass im Falle der Richtigkeit von (7) auch (8) richtig ist. Man kann sogar a priori, ohne (7) vorauszusetzen, die Gleichung

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi(x) \log x}{x} - \frac{\vartheta(x)}{x} \right) = 0,$$

selbst in der schärferen Form

$$\frac{\pi(x) \log x}{x} - \frac{\vartheta(x)}{x} = O\left(\frac{1}{\log x}\right),$$

leicht durch partielle Summation beweisen: Es ist ²⁰⁾

$$\begin{aligned} \pi(x) &= \sum_{p \leq x} 1 \\ &= \sum_{n=2}^x \frac{\vartheta(n) - \vartheta(n-1)}{\log n} \\ &= \sum_{n=2}^x \vartheta(n) \left(\frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log(n+1)} \right) + \frac{\vartheta(x)}{\log([x]+1)} \\ &= \sum_{n=2}^x \frac{\vartheta(n) \log \left(1 + \frac{1}{n} \right)}{\log n \cdot \log(n+1)} + \frac{\vartheta(x)}{\log([x]+1)}. \end{aligned}$$

Nun ist

$$\vartheta(x) = O(x);$$

dies ist schon von TSCHEBYSCHEF ²¹⁾ elementar und später von Herrn MERTENS ²²⁾

¹⁸⁾ Vergl. S. 360-361 der in Anm. ²⁾ zitierten Arbeit.

¹⁹⁾ *On Arithmetical Series* [The Messenger of Mathematics, Ser. II, Bd. XXI (1891), S. 1-19, 87-120], S. 9.

²⁰⁾ x braucht keine ganze Zahl zu sein. Eine Summe mit einer nicht ganzzahligen unteren bzw. oberen Grenze y bedeute, dass der Summationsbuchstabe von $[y]$ an bzw. bis $[y]$ läuft, wo $[y]$ die grösste ganze Zahl $\leq y$ bezeichnet.

²¹⁾ *Mémoire sur les nombres premiers* [Journal de Mathématiques pures et appliquées, Ser. I, Bd. XVII (1852), S. 366-390; Mémoires présentés à l'Académie Impériale de St.-Petersbourg par divers savants, Bd. VII (1854), S. 17-33; *Œuvres*, Bd. I (1899), S. 49-70], S. 379 bzw. S. 26 bzw. S. 61.

²²⁾ *Ein Beitrag zur analytischen Zahlentheorie* [Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. LXXVIII (1874), S. 46-62], S. 47-48. Der MERTENS'sche Beweis lautet kurz so: Wenn

$$\vartheta(x) + \vartheta(\sqrt{x}) + \vartheta(\sqrt[3]{x}) + \dots = \psi(x)$$

noch einfacher bewiesen worden und folgt auch, wenn man (8) aus (7) herleiten will, unmittelbar aus (7). Daher ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \pi(x) &= O \sum_{n=2}^x \frac{n \cdot \frac{1}{n}}{\log^2 n} + \frac{\mathfrak{z}(x)}{\log x} + \mathfrak{z}(x) \left(\frac{1}{\log([x] + 1)} - \frac{1}{\log x} \right) \\
 &= O \sum_{n=2}^x \frac{1}{\log^2 n} + \frac{\mathfrak{z}(x)}{\log x} + O \left(x \cdot \frac{1}{x \log^2 x} \right), \\
 \pi(x) - \frac{\mathfrak{z}(x)}{\log x} &= O \sum_{n=2}^{\sqrt{x}} \frac{1}{\log^2 n} + O \sum_{n=\sqrt{x}+1}^x \frac{1}{\log^2 n} + O \left(\frac{1}{\log^2 x} \right) \\
 &= O \left(\frac{1}{\log^2 2} \sum_{n=2}^{\sqrt{x}} 1 \right) + O \left(\frac{1}{\log^2(\sqrt{x})} \sum_{n=\sqrt{x}+1}^x 1 \right) + O \left(\frac{1}{\log^2 x} \right) \\
 &= O(\sqrt{x}) + O \left(\frac{x}{\log^2 x} \right) + O \left(\frac{1}{\log^2 x} \right) \\
 &= O \left(\frac{x}{\log^2 x} \right), \\
 \frac{\pi(x) \log x}{x} - \frac{\mathfrak{z}(x)}{x} &= O \left(\frac{1}{\log x} \right).
 \end{aligned}$$

Die späteren Versuche, den Satz (8) auf kürzerem Wege zu beweisen, brauchten also nur auf die schnellere Erreichung des Zieles (7) gerichtet zu sein.

gesetzt wird, so ist

$$\begin{aligned}
 \psi(x) + \psi\left(\frac{x}{2}\right) + \psi\left(\frac{x}{3}\right) + \psi\left(\frac{x}{4}\right) + \dots &= \log([x]!), \\
 \psi(x) - \psi\left(\frac{x}{2}\right) + \psi\left(\frac{x}{3}\right) - \psi\left(\frac{x}{4}\right) + \dots &= \log([x]!) - 2 \log\left(\left[\frac{x}{2}\right]!\right) \\
 &= x \log x + O(x) - 2 \left(\frac{x}{2} \log x + O(x) \right) \\
 &= O(x),
 \end{aligned}$$

also wegen

$$\begin{aligned}
 \psi(x) - \psi\left(\frac{x}{2}\right) &\leq \psi(x) - \psi\left(\frac{x}{2}\right) + \psi\left(\frac{x}{3}\right) - \psi\left(\frac{x}{4}\right) + \dots \\
 \psi(x) - \psi\left(\frac{x}{2}\right) &= O(x),
 \end{aligned}$$

d. h. für alle $x > 0$

$$\psi(x) - \psi\left(\frac{x}{2}\right) < Ax,$$

also auch

$$\begin{aligned}
 \psi\left(\frac{x}{2}\right) - \psi\left(\frac{x}{4}\right) &< A \frac{x}{2}, \\
 \psi\left(\frac{x}{4}\right) - \psi\left(\frac{x}{8}\right) &< A \frac{x}{4}
 \end{aligned}$$

u. s. f., folglich für alle $x > 0$

$$\mathfrak{z}(x) \leq \psi(x) < 2Ax.$$

Im Jahre 1903 gab ich ²³⁾ einen Beweis von (7) und damit auch von (8) an, der wesentlich einfacher war als die beiden bekannten Beweise. Ich bewies zugleich mit (8) durch meine Methode für jedes konstante m die schärfere Relation

$$(9) \quad \pi(x) = \int_2^x \frac{du}{\log u} + O\left(\frac{x}{\log^m x}\right),$$

welche zuerst im Jahre 1899 von Herrn DE LA VALLÉE POUSSIN ²⁴⁾ bewiesen worden war. Hätte ich damals nur (7) und (8) beweisen wollen, so hätte ich mich zwar etwas kürzer fassen können, aber doch in keinem wesentlichen Punkte anders, als ich es tat. Der springende Punkt, dem meine Beweismethode von (7) ihr Gelingen verdankte, bestand darin, dass ich imstande war, mit einfachen Hilfsmitteln [namentlich ohne Benutzung der HADAMARD'schen Sätze über ganze transzendente Funktionen überhaupt und über $(s-1)\zeta(s)$ im Besonderen] zu beweisen: Für ²⁵⁾

$$s = \sigma + ti, \quad t \geq 2, \quad 1 - \frac{1}{a_{13}} \frac{1}{\log^9 t} \leq \sigma \leq 2$$

ist

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$$

regulär und

$$(10) \quad \left| \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right| < a_{14} \log^9 t.$$

Das über die Kurve

$$\sigma = 1 - \frac{1}{a_{13}} \frac{1}{\log^9 t}$$

von $t = 2$ bis $t = \infty$ erstreckte Integral

$$\int \frac{x^s}{s^2} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds$$

war dadurch als absolut konvergent erwiesen, da

$$\int_2^\infty \frac{\log^9 t}{t^2} dt$$

konvergiert. Mein Beweis von (7) wäre auch zustandegekommen, wenn auf der rechten Seite von (10) statt $\log^9 t$ etwa $\log^{100} t$ oder $t^{\frac{3}{4}}$ oder überhaupt eine positive Funktion $g(t)$ gestanden hätte, für welche

$$(11) \quad \int_2^\infty \frac{g(t)}{t^2} dt$$

konvergiert, und es wäre überflüssig auf jenen Beweis zurückzukommen, nur um dies zu betonen oder noch hinzuzufügen: der Satz (7) gilt auch für Zahlklassen p (an Stelle

²³⁾ Vergl. meine in Anm. ⁶⁾ genannte Arbeit, S. 648-663.

²⁴⁾ Es ist das wichtigste Ergebnis seiner in Anm. ¹²⁾ genannten Arbeit; vergl. S. 5-6 derselben.

²⁵⁾ Es ist durchweg $s = \sigma + ti$ gesetzt; ich bemerke also nicht immer besonders, dass σ den reellen Teil von s bezeichnet.

der Primzahlen), bei welchen die durch

$$\sum_p \frac{\log p}{p^s}$$

für $\Re(s) > 1$ definierte Funktion $f(s)$ im Punkte $s = 1$ einen Pol erster Ordnung mit dem Residuum 1 hat, sonst für $\sigma = 1$ regulär ist und dieselbe Ungleichung in demselben Gebiete erfüllt als die dem Fall der Primzahlen entsprechende [welche wegen

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_p \frac{\log p}{p^s} + \sum_p \frac{\log p}{p^s(p^s - 1)}$$

sich von $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ nur um eine im Gebiete $\Re(s) > \frac{3}{4}$ absolut genommen unter einer endlichen Schranke verbleibende Funktion unterscheidet, also auch eine Relation von der Form (10) erfüllt]. Aber ich lege Wert darauf, zwei Momente hervorzuheben, auf welche mich das genaue Studium meines damaligen Beweises geführt hat. Ich habe erstens erkannt, dass die Konvergenz des Integrals (11) entbehrt werden kann, wenn nur überhaupt für ein konstantes ν

$$\int_2^\infty \frac{g(t)}{t^\nu} dt$$

konvergiert, und ich habe zweitens gefunden, dass die der Ungleichung (10) entsprechende Ungleichung

$$\left| \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right| < g(t)$$

bezw. im allgemeinen Fall

$$|f(s)| < g(t)$$

nur für $t \geq 2$, $\sigma \geq 1$ erfüllt zu sein braucht. Jenseits der Geraden $\Re(s) = 1$ braucht über $f(s)$ gar nichts bekannt zu sein, ausser der [da nach Voraussetzung $f(s)$ für $t \geq 2$, $\sigma = 1$ regulär ist] trivialen Tatsache, dass es überhaupt ein sich nach oben unendlich verschmälernendes Gebiet $1 - \frac{1}{\psi(t)} < \sigma < 1$ links von der Geraden $\Re(s) = 1$ gibt, in welchem $f(s)$ noch regulär ist; ich habe gefunden, dass—kurz gesagt—über die Grössenordnung der Dicke dieses eo ipso vorhandenen Gebietes für grosse t nichts vorausgesetzt zu werden braucht. Ich werde nun, nachdem ich im § 9 einige allgemeine Hilfsätze über reelle Funktionen und komplexe Integrale vorausgeschickt habe (welche mir auch an sich von Interesse erscheinen), im § 10 den hier skizzierten Satz über DIRICHLET'sche Reihen entwickeln, welcher folgenden präzisen Wortlaut hat:

Es habe die DIRICHLET'sche Reihe

$$(12) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s}$$

mit reellen Koeffizienten b_n ein Konvergenzgebiet, d. h. es sei

$$b_n = O(x^c) \quad (c \text{ konstant}).$$

Es sei ferner die untere Grenze von b_n endlich, d. h. für alle n

$$b_n \geq -g \quad (g \text{ konstant}).$$

Es sei die im Konvergenzgebiet durch (12) definierte Funktion $f(s)$ für $\Re(s) \geq 1$ regulär und erfülle für $t \geq 1$, $\sigma \geq 1$ die Ungleichung

$$|f(s)| < B t^k \quad (B \text{ und } k \text{ konstant}).$$

Dann existiert der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_x}{x},$$

und es ist

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_x}{x} = 0.$$

Der Satz (7) ist, wie sich an der betreffenden Stelle zeigen wird, als Spezialfall hierin enthalten, wenn

$$b_n = \begin{cases} \log n - 1 & \text{für Primzahlen,} \\ -1 & \text{für alle anderen Zahlen} \end{cases}$$

ist; übrigens soll der Beweis jenes allgemeinen Satzes nicht etwa einen vereinfachten Weg zum Satz (7) darstellen. Im Gegenteil: Bei der Funktion $\zeta(s)$ kann man gerade ohne Mühe von vornherein mehr beweisen, als die Voraussetzungen des allgemeinen Satzes verlangen, und es treten daher beim Beweis des Satzes (7) manche Schwierigkeiten gar nicht auf, welche ich zum Beweise des allgemeinen Satzes erst überwinden musste. Es zeigt sich dadurch eben, dass der Satz (7) [also auch der Satz (8), da der Übergang durch partielle Summation gültig bleibt] für jede Zahlklasse p gilt, die so beschaffen ist, dass die DIRICHLET'sche Reihe

$$\sum_p \frac{\log p}{p^s}$$

eine Funktion definiert, welche im Punkt $s = 1$ einen Pol erster Ordnung mit dem Residuum 1 hat, sonst für $\sigma = 1$ regulär ist und für $t \geq 1$, $\sigma \geq 1$ höchstens von endlicher Grössenordnung in t (gleichmässig für alle jene σ) unendlich wird.

Herr DE LA VALLÉE POUSSIN ²⁶⁾ hatte mit Hilfe seines schon oben erwähnten Satzes (13)

$$\zeta(s) \neq 0$$

für

$$t \geq 2, \quad \sigma \geq 1 - \frac{1}{a_{10}} \frac{1}{\log t}$$

bewiesen, dass

$$(14) \quad \pi(x) = \int_2^x \frac{du}{\log u} + O(x e^{-\frac{1}{a_{15}} \sqrt[13]{\log x}})$$

ist. Dies ist das schärfste bekannte Resultat über die Primzahlmenge; ich hatte mit meinen elementaren Methoden wenigstens zeigen können, dass

$$(15) \quad \pi(x) = \int_2^x \frac{du}{\log u} + O(x e^{-\frac{13}{\sqrt[13]{\log x}}})$$

ist, wo die Zahl 13 noch etwas, aber nicht bis zu 2 hin, hätte verkleinert werden

²⁶⁾ Vergl. die in Anm. ¹²⁾ genannte Arbeit, S. 63.

können. Dieser Satz (15) genügte aber für die Folgerung (9), welche Herr DE LA VALLÉE POUSSIN selbst mit Recht als die wichtigste seiner Entdeckungen im Gebiete der Primzahltheorie hervorgehoben hat ²⁷⁾. Ohne Benutzung der HADAMARD'schen Theorie kann ich auch heute nicht zu (14) gelangen; aber es ist mir jetzt gelungen, unter ausschliesslicher Benutzung des DE LA VALLÉE POUSSIN'schen Satzes (13) den Satz (14) mit meinen Methoden herzuleiten, ohne nochmals die HADAMARD'schen Sätze über die Existenz und Dichtigkeit der komplexen Nullstellen von $\zeta(s)$ oder auch nur die Tatsache, dass $(s-1)\zeta(s)$ in der ganzen Ebene existiert, anzuwenden ²⁸⁾. Ich werde diese neue Beweisordnung von (14) im § 11 ausführen.

Im § 12 werde ich auf analogem Wege über

$$\sum_{n=1}^x \mu(n),$$

wo $\mu(n)$ die bekannte MÖBIUS'sche Funktion ist, schärfere Abschätzungen erhalten, als bisher bekannt waren; ich werde nämlich die Relation

$$\sum_{n=1}^x \mu(n) = O(x e^{-\frac{1}{a_{16}} \sqrt{\log x}})$$

beweisen.

Der § 13 verdankt seine Entstehung einer bekannten Untersuchung der Herren FRANEL ²⁹⁾, VON KOCH ³⁰⁾ und HOLMGREN ³¹⁾. Letztere hatten bewiesen: Unter der Annahme der Richtigkeit der RIEMANN'schen Vermutung

$$\zeta(s) \neq 0$$

für $\Re(s) > \frac{1}{2}$ würde

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{du}{\log u} + O(\sqrt{x} \log x)$$

sein. Der im § 13 zunächst bewiesene Satz (IX) steht auf sicherem Fundament und besagt: Aus der Existenz der durch eine DIRICHLET'sche Reihe

$$(16) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s},$$

bei der für alle $\delta > 0$

$$b_n = O(n^\delta)$$

ist, definierten Funktion $f(s)$ für $\Re(s) \geq \eta$, wo $\eta < 1$ ist, und aus der Annahme, dass $|f(s)|$ für $\sigma \geq \eta$ in Bezug auf $|t|$ nur von endlicher Grössenordnung ist, folgt die Konvergenz der Reihe (16) über $\Re(s) = 1$ hinaus. Dies bedeutet für die Prim-

²⁷⁾ Vergl. S. 6 seiner in Anm. ¹²⁾ genannten Arbeit oder S. 664 meiner in Anm. ⁶⁾ erwähnten Arbeit.

²⁸⁾ Was Herr DE LA VALLÉE POUSSIN mit seiner Methode zu tun gezwungen ist.

²⁹⁾ *Sur la fonction $\xi(t)$ de RIEMANN et son application à l'arithmétique* [Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich, Bd. XLI (1896), S. 7-19].

³⁰⁾ *Sur la distribution des nombres premiers* [Acta Mathematica, Bd. XXIV (1901), S. 159-182].

³¹⁾ *Om primalens fördelning* [Öfversigt af Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, Bd. LIX (1902), S. 221-225].

zahlmenge, wie sich im Text zeigen wird, nur, dass im Falle der Richtigkeit der RIEMANN'schen Vermutung für alle $\delta > 0$

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{du}{\log u} + O(x^{\frac{1}{4}+\delta})$$

ist; aber der neue Satz gilt eben auch für DIRICHLET'sche Reihen, bei denen nicht bekannt ist, ob die durch sie definierte Funktion in der ganzen Ebene existiert, und er ist der erste Satz seiner Art. Er liefert auch für das Primzahlproblem, wie am Ende des § 13 ausgeführt wird, ein neues Ergebnis: Wenn die RIEMANN'sche Vermutung richtig ist und bereits, wenn die obere Grenze der reellen Teile der Nullstellen von $\zeta(s)$ kleiner als 1 ist, so ist

$$\sum_{n=1}^x \mu(n) = O(x^\Theta),$$

wo $\Theta < 1$ ist, d. h. es konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$$

über $\Re(s) = 1$ hinaus; bekannt (und trivial) war nur das Umgekehrte: Wenn die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$$

über $\Re(s) = 1$ hinaus konvergiert, so ist die obere Grenze der reellen Teile der Nullstellen von $\zeta(s)$ kleiner als 1. Da ich nun in einer anderen Arbeit ³²⁾ bewiesen hatte, dass eine von Herrn CAHEN ³³⁾ ausgesprochene Vermutung (« Das formal gebildete Produkt zweier für $\Re(s) > \alpha$ konvergenter DIRICHLET'scher Reihen ist für $\Re(s) > \alpha$ konvergent ») mit der etwaigen Tatsache in Widerspruch steht, dass die Konvergenzabzisse von

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$$

kleiner als 1 ist, so steht nunmehr fest, dass die CAHEN'sche Vermutung der RIEMANN'schen Vermutung widerspricht. Ein nochmaliger Versuch, die CAHEN'sche Vermutung zu widerlegen, hat mich zu dem im § 14 angegebenen Beweise des Gegenteils geführt, womit eine in meiner früheren Arbeit gestellte Frage beantwortet ist. Im § 15 verfolge ich die hierbei verwendete Methode weiter und zeige, dass ein von Herrn HADAMARD ³⁴⁾ entdeckter allgemeiner Satz über DIRICHLET'sche Reihen im absoluten Konvergenzbereich auch in einem gewissen Teile des Bereiches bedingter Konvergenz gilt. Dadurch bin

³²⁾ *Über die Multiplikation DIRICHLET'scher Reihen* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Bd. XXIV (2. Semester 1907), S. 81-160], S. 123-125.

³³⁾ *Sur la fonction $\zeta(s)$ de RIEMANN et sur des fonctions analogues* [Annales Scientifiques de l'École Normale supérieure, Ser. III, Bd. XI (1894), S. 75-164], S. 100.

³⁴⁾ *Théorème sur les séries entières* [Acta Mathematica, Bd. XXII (1899), S. 55-63], S. 60-63.

ich imstande, für die RIEMANN'sche Zetafunktion eine bestimmte von Herrn HADAMARD aufgeworfene Frage zu beantworten.

Der Schlussparagraph (§ 16) der vorliegenden Arbeit behandelt einfachere Dinge als das Vorangehende; ich gebe einige neue Beweisordnungen für das Nichtverschwinden der einem reellen Charakter modulo k entsprechenden Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n},$$

welche beim Beweise des DIRICHLET'schen Satzes von der arithmetischen Progression auftritt.

§ 1.

Es werde für jedes positive konstante x und komplexes s unter x^s die ganze transzendente Funktion $e^{s \log x}$ verstanden, wo $\log x$ den reellen Wert des Logarithmus bezeichnet. Dann ist speziell $\frac{1}{n^s}$ für jedes ganzzahlige positive n eine ganze transzendente Funktion von s .

Die unendliche Reihe

$$(17) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

konvergiert für $\Re(s) > 1$, und zwar, wenn δ eine feste positive Grösse ist, für $\Re(s) > 1 + \delta$ gleichmässig, wie aus

$$\left| \frac{1}{n^s} \right| = \frac{1}{n^{\Re(s)}}$$

hervorgeht. (17) definiert also eine für $\Re(s) > 1$ reguläre Funktion, die mit $\zeta(s)$ bezeichnet werden möge.

Andererseits ist die Doppelreihe

$$\sum_{p,m} \frac{1}{m} \frac{1}{p^{ms}},$$

in der p alle Primzahlen, m alle positiven ganzen Zahlen durchläuft, für $\Re(s) > 1$ absolut konvergent, wie aus

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left| \frac{1}{p^{ms}} \right| &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{1}{p^{m\Re(s)}} \\ &= \log \frac{1}{1 - \frac{1}{p^{\Re(s)}}} \end{aligned}$$

mit Rücksicht auf die Konvergenz von

$$\sum_p \frac{1}{p^{\Re(s)}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\Re(s)}}$$

hervorgeht. Für $\Re(s) > 1$ ist also

$$\begin{aligned}
 e^{\sum_{p,m} \frac{1}{m} \frac{1}{p^{ms}}} &= \prod_p e^{\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{1}{p^{ms}}} \\
 &= \prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} \\
 &= \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \cdots \right) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \\
 (18) \qquad &= \zeta(s),
 \end{aligned}$$

so dass $\zeta(s)$ für $\Re(s) > 1$ nicht verschwindet.

Wie schon RIEMANN ³⁵⁾ bewiesen hat, hat $\zeta(s)$ im Punkte $s=1$ einen Pol erster Ordnung mit dem Residuum 1 und ist im Übrigen auf der Geraden $\Re(s)=1$ regulär;

$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$$

ist sogar für $\Re(s) > 0$ regulär ³⁶⁾, wie schon RIEMANN ³⁷⁾ festgestellt hatte und Herr DE LA VALLÉE POUSSIN ³⁸⁾ durch folgende besonders elegante und für viele Zwecke nützliche Transformation von Neuem bewiesen hat: Es ist für $n > 0$, $s \neq 1$

$$\begin{aligned}
 -s \int_0^1 \frac{u du}{(n+u)^{s+1}} &= \frac{1}{(n+1)^s} - \int_0^1 \frac{du}{(n+u)^s} \\
 (19) \qquad &= \frac{1}{s-1} \left(\frac{1}{(n+1)^{s-1}} - \frac{1}{n^{s-1}} \right) + \frac{1}{(n+1)^s},
 \end{aligned}$$

also für $\Re(s) > 1$, da die über $n=1, 2, 3, \dots$ erstreckte Summe der rechten Seite von (19) konvergiert,

$$\begin{aligned}
 -s \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{u du}{(n+u)^{s+1}} &= \frac{1}{s-1} \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n^{s-1}} + \frac{1}{(n+1)^{s-1}} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^s} \\
 &= -\frac{1}{s-1} + \zeta(s) - 1, \\
 (20) \qquad \zeta(s) &= 1 + \frac{1}{s-1} - s \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{u du}{(n+u)^{s+1}}.
 \end{aligned}$$

³⁵⁾ Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse [Monatsbericht der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1859, S. 671-680; *Werke*, 2. Aufl. (1892), S. 145-155], S. 672 bzw. 146.

³⁶⁾ Über die Achse des Imaginären brauche ich zunächst nicht hinauszugehen.

³⁷⁾ Vergl. die in Anm. ³⁵⁾ zitierten Stellen.

³⁸⁾ *Démonstration simplifiée du théorème de DIRICHLET sur la progression arithmétique* [Mémoires couronnés et autres Mémoires publiés par l'Académie Royale de Belgique, Bd. LIII (1896), S. 1-32], S. 6-8.

Nun ist die unendliche Reihe auf der rechten Seite von (20) für $\Re(s) > 0$ konvergent, wie aus

$$(21) \quad \left| \int_0^1 \frac{u du}{(n+u)^{s+1}} \right| \leq \frac{1}{n^{1+\Re(s)}}$$

hervorgeht, und zwar, wenn $\delta > 0$ gegeben ist, für $\Re(s) > \delta$ gleichmässig, wie ebenfalls aus (21) ersichtlich ist; die Summe stellt also eine für $\Re(s) > 0$ reguläre Funktion dar. Nach (20) ist demnach

$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$$

für $\Re(s) > 0$ regulär, d. h. $\zeta(s)$ bis auf den Pol erster Ordnung $s=1$ mit dem Residuum 1 für $\Re(s) > 0$ regulär.

Daraus, dass $s=1$ ein Pol erster Ordnung ist, folgt, dass für $0 < \varepsilon \leq 1$

$$|\zeta(1+\varepsilon)| < \frac{a_{17}}{\varepsilon}$$

ist, also, da $\zeta(1+\varepsilon)$ positiv ist,

$$(22) \quad \zeta(1+\varepsilon) < \frac{a_{17}}{\varepsilon}.$$

Ich behaupte ferner, dass für $0 \leq \varepsilon \leq 1$, $t \geq 2$

$$(23) \quad |\zeta(1+\varepsilon+ti)| < a_{18} \log t$$

ist ³⁹⁾. Dies lässt sich wohl am einfachsten unter Benutzung von (19) folgendermassen beweisen. Es ist im Gebiet $\Re(s) > 1$ für jedes ganzzahlige $m \geq 0$

$$\begin{aligned} -s \sum_{n=m+1}^{\infty} \int_0^1 \frac{u du}{(n+u)^{s+1}} &= \frac{1}{s-1} \sum_{n=m+1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n^{s-1}} + \frac{1}{(n+1)^{s-1}} \right) + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^s} \\ &= -\frac{1}{s-1} \frac{1}{(m+1)^{s-1}} + \zeta(s) - \sum_{n=1}^{m+1} \frac{1}{n^s}; \end{aligned}$$

im Gebiet $\Re(s) > 1$ ist also

$$(24) \quad \zeta(s) = \sum_{n=1}^{m+1} \frac{1}{n^s} + \frac{1}{s-1} \frac{1}{(m+1)^{s-1}} - s \sum_{n=m+1}^{\infty} \int_0^1 \frac{u du}{(n+u)^{s+1}},$$

und (24) gilt auch für $\Re(s) > 0$ (exkl. $s=1$). In (24) setze ich $s=1+\varepsilon+ti$, nehme $0 \leq \varepsilon \leq 1$, $t \geq 2$ an und verstehe unter m die ganze Zahl $[t]$. Dann erhalte ich

$$\begin{aligned} |\zeta(1+\varepsilon+ti)| &< \sum_{n=1}^{t+1} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}} + \frac{1}{t-1} \frac{1}{([t]+1)^{\varepsilon}} + (1+\varepsilon+t) \sum_{n=[t]+1}^{\infty} \frac{1}{n^{2+\varepsilon}} \\ &< \sum_{n=1}^{t+1} \frac{1}{n} + \frac{1}{t-1} + (2+t) \sum_{n=[t]+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \\ &= O(\log t) + O\left(\frac{1}{t}\right) + O\left(t \cdot \frac{1}{t}\right) \\ &= O(\log t), \end{aligned}$$

³⁹⁾ Herr MELLIN hat zuerst bewiesen, dass

$$\zeta(1+ti) = O(\log t)$$

ist; vergl. seine Arbeit: *Eine Formel für den Logarithmus transzendenter Funktionen von endlichem Geschlecht* [Acta societatis scientiarum Fennicae, Bd. XXIX (1900), N° 4, S. 1-50], S. 48-49.

womit (23) bewiesen ist, da die Abschätzung gleichmässig für alle ε des Intervalles $(0 \dots 1)$ galt ⁴⁰⁾.

Aus (23) folgt noch für $0 \leq \varepsilon \leq 1$, $t \geq 2$

$$(25) \quad \begin{aligned} |\zeta(1 + \varepsilon + 2ti)| &< a_{18} \log(2t) \\ &< a_{19} \log t \end{aligned}$$

und überhaupt bei festem ν für $0 \leq \varepsilon \leq 1$, $t \geq 2$

$$(26) \quad \begin{aligned} |\zeta(1 + \varepsilon + \nu ti)| &< a_{18} \log(\nu t) \\ &< a_{20} \log t. \end{aligned}$$

Analog zu (23) lässt sich zeigen, dass für

$$(27) \quad \begin{aligned} s = 1 + \varepsilon + ti, \quad 0 \leq \varepsilon \leq 1, \quad t \geq 2 \\ |\zeta'(s)| < a_{21} \log^2 t \end{aligned}$$

ist. Denn aus (24) folgt für jedes ganzzahlige $m \geq 0$ im Gebiet $\Re(s) > 0$ (exkl. $s = 1$) durch Differentiation

$$\begin{aligned} \zeta'(s) = & - \sum_{n=1}^{m+1} \frac{\log n}{n^s} - \frac{1}{(s-1)^2} \frac{1}{(m+1)^{s-1}} - \frac{1}{s-1} \frac{\log(m+1)}{(m+1)^{s-1}} \\ & - \sum_{n=m+1}^{\infty} \int_0^1 \frac{u du}{(n+u)^{s+1}} + s \sum_{n=m+1}^{\infty} \int_0^1 \frac{u \log(n+u) du}{(n+u)^{s+1}}, \end{aligned}$$

also für $s = 1 + \varepsilon + ti$, $0 \leq \varepsilon \leq 1$, $t \geq 2$, wenn

$$m = [t]$$

gesetzt wird,

$$\begin{aligned} |\zeta'(s)| &< \sum_{n=1}^{t+1} \frac{\log n}{n} + \frac{1}{(t-1)^2} + \frac{1}{t-1} \log([t] + 1) \\ &+ \sum_{n=[t]+1}^{\infty} \int_0^1 \frac{du}{(n+u)^2} + (2+t) \sum_{n=[t]+1}^{\infty} \int_0^1 \frac{\log(n+u) du}{(n+u)^2} \\ &= O(\log^2 t) + O\left(\frac{1}{t^2}\right) + O\left(\frac{\log t}{t}\right) + \int_{[t]+1}^{\infty} \frac{du}{u^2} + (2+t) \int_{[t]+1}^{\infty} \frac{\log u du}{u^2} \\ &= O(\log^2 t) + O\left(\frac{1}{t^2}\right) + O\left(\frac{\log t}{t}\right) + O\left(\frac{1}{t}\right) + O\left(t \cdot \frac{\log t}{t}\right) \\ &= O(\log^2 t), \end{aligned}$$

womit (27) bewiesen ist.

⁴⁰⁾ Übrigens ist infolgedessen für alle $\varepsilon \geq 0$ und $t \geq 2$ der Quotient

$$\frac{|\zeta(1 + \varepsilon + ti)|}{\log t}$$

unterhalb einer endlichen Schranke gelegen, da für $\varepsilon \geq 1$ und alle t

$$\begin{aligned} |\zeta(1 + \varepsilon + ti)| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varepsilon+ti}} \right| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

ist.

Aus (27) ergibt sich weiter für $0 \leq \varepsilon \leq 1$, $t \geq 2$

$$(28) \quad |\zeta(1 + \varepsilon + ti) - \zeta(1 + ti)| \leq a_{21} \varepsilon \log^2 t;$$

denn bei geradlinigem Integrationsweg ist

$$\zeta(1 + \varepsilon + ti) - \zeta(1 + ti) = \int_{1+ti}^{1+\varepsilon+ti} \zeta'(s) ds,$$

und die Länge des Integrationsweges ist ε , das Maximum des absoluten Betrages des Integranden nach (27) kleiner als $a_{21} \log^2 t$.

§ 2.

Es ist für alle reellen x

$$\begin{aligned} 0 &\leq (3 + 4x)^2 \\ &= 9 + 24x + 16x^2, \end{aligned}$$

also für alle reellen φ

$$(29) \quad \begin{aligned} 0 &\leq 9 + 24 \cos \varphi + 16 \cos^2 \varphi \\ &= 17 + 24 \cos \varphi + 8 \cos 2\varphi. \end{aligned}$$

Nun ist nach (18) für $\varepsilon > 0$, $t \geq 0$

$$\zeta(1 + \varepsilon + ti) = e^{\sum_{p,m} \frac{1}{m} \frac{1}{p^{m(1+\varepsilon+ti)}}},$$

also

$$\begin{aligned} |\zeta(1 + \varepsilon + ti)| &= e^{\Re \sum_{p,m} \frac{1}{m} \frac{1}{p^{m(1+\varepsilon+ti)}}} \\ &= e^{\sum_{p,m} \frac{1}{m} \frac{\cos(mt \log p)}{p^{m(1+\varepsilon)}}}, \end{aligned}$$

(30)
ebenso

$$(31) \quad |\zeta(1 + \varepsilon + 2ti)| = e^{\sum_{p,m} \frac{1}{m} \frac{\cos(2mt \log p)}{p^{m(1+\varepsilon)}}}$$

und schliesslich für $\varepsilon > 0$

$$(32) \quad \zeta(1 + \varepsilon) = e^{\sum_{p,m} \frac{1}{m} \frac{1}{p^{m(1+\varepsilon)}}}.$$

Aus (30), (31) und (32) ergibt sich für $\varepsilon > 0$, $t \geq 0$

$$\begin{aligned} &(\zeta(1 + \varepsilon))^{17} |\zeta(1 + \varepsilon + ti)|^{24} |\zeta(1 + \varepsilon + 2ti)|^8 \\ &= e^{\sum_{p,m} \frac{1}{m} \frac{1}{p^{m(1+\varepsilon)}} (17 + 24 \cos(mt \log p) + 8 \cos(2mt \log p))} \\ &\geq 1, \end{aligned}$$

da nach (29) jedes Glied im Exponenten ≥ 0 ist. Daher ist

$$(33) \quad \begin{aligned} |\zeta(1 + \varepsilon + ti)|^{24} &\geq \frac{1}{(\zeta(1 + \varepsilon))^{17} |\zeta(1 + \varepsilon + 2ti)|^8}, \\ |\zeta(1 + \varepsilon + ti)| &\geq \frac{1}{(\zeta(1 + \varepsilon))^{\frac{17}{24}} |\zeta(1 + \varepsilon + 2ti)|^{\frac{1}{3}}}. \end{aligned}$$

Aus (33) folgt mit Rücksicht auf (22) für $0 < \varepsilon \leq 1$, $t \geq 0$

$$(34) \quad \begin{aligned} |\zeta(1 + \varepsilon + ti)| &> \frac{\varepsilon^{\frac{17}{24}}}{a_{17}^{\frac{24}{24}} |\zeta(1 + \varepsilon + 2ti)|^{\frac{1}{3}}} \\ &= \frac{1}{a_{22}^{\frac{24}{24}} |\zeta(1 + \varepsilon + 2ti)|^{\frac{1}{3}}}. \end{aligned}$$

(34) lehrt zunächst, dass für $t \geq 0$

$$\zeta(1 + ti) \neq 0$$

ist; denn sonst würde bei positivem ε

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{|\zeta(1 + \varepsilon + ti)|}{\varepsilon} = |\zeta'(1 + ti)|$$

existieren, während die durch ε dividierte rechte Seite von (34) für zu 0 abnehmendes ε unendlich wird, mag $\zeta(1 + 2ti)$ von 0 verschieden oder $= 0$ sein.

Aus (34) folgt ferner in Verbindung mit (25) für $0 < \varepsilon \leq 1$, $t \geq 2$

$$\begin{aligned} |\zeta(1 + \varepsilon + ti)| &> \frac{1}{a_{22}^{\frac{1}{3}} a_{19}^{\frac{1}{3}} \log^{\frac{1}{3}} t} \frac{\varepsilon^{\frac{17}{24}}}{\varepsilon^{\frac{17}{24}}} \\ &= \frac{1}{a_{23} \log^{\frac{1}{3}} t} \frac{\varepsilon^{\frac{17}{24}}}{\varepsilon^{\frac{17}{24}}}, \end{aligned}$$

und hieraus erhalte ich mit Rücksicht auf (28) für $0 < \varepsilon \leq 1$, $t \geq 2$

$$(35) \quad \begin{aligned} |\zeta(1 + ti)| &\geq |\zeta(1 + \varepsilon + ti)| - |\zeta(1 + \varepsilon + ti) - \zeta(1 + ti)| \\ &> \frac{1}{a_{23} \log^{\frac{1}{3}} t} \frac{\varepsilon^{\frac{17}{24}}}{\varepsilon^{\frac{17}{24}}} - a_{21} \varepsilon \log^2 t \\ &= \frac{1}{a_{23} \log^{\frac{1}{3}} t} \frac{\varepsilon^{\frac{17}{24}}}{\varepsilon^{\frac{17}{24}}} (1 - a_{21} a_{23} \varepsilon^{\frac{7}{24}} \log^{\frac{7}{3}} t). \end{aligned}$$

Ich wähle jetzt für jedes t

$$\varepsilon = \frac{\alpha}{\log^8 t},$$

wo die von t unabhängige Konstante α den Bedingungen

$$0 < \alpha \leq \log^8 2$$

und

$$a_{21} a_{23} \alpha^{\frac{7}{24}} \leq \frac{1}{2}$$

genügt. Dann ist für jedes $t \geq 2$

$$0 < \varepsilon \leq 1,$$

also (35) anwendbar, und es ist

$$\begin{aligned} 1 - a_{21} a_{23} \varepsilon^{\frac{7}{24}} \log^{\frac{7}{3}} t &= 1 - a_{21} a_{23} \alpha^{\frac{7}{24}} \\ &\geq 1 - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}; \end{aligned}$$

daher ergibt sich für $t \geq 2$ aus (35)

$$\begin{aligned} |\zeta(1+ti)| &> \frac{1}{a_{23}} \frac{\alpha^{\frac{17}{24}}}{\log^{\frac{17}{3}} t \cdot \log^{\frac{1}{3}} t} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{a_{24}} \frac{\alpha^{\frac{17}{24}}}{\log^6 t} \\ (36) \quad &= \frac{1}{a_{25}} \frac{1}{\log^6 t}. \end{aligned}$$

Damit ist die Relation

$$(37) \quad \frac{1}{\zeta(1+ti)} = O(\log^6 t)$$

bewiesen.

§ 3.

Es ist für $-1 \leq x \leq 1$

$$\begin{aligned} 0 &\leq (1+x)(1+2x)^2 \\ &= 1 + 5x + 8x^2 + 4x^3, \end{aligned}$$

also für alle reellen φ

$$\begin{aligned} 0 &\leq 1 + 5 \cos \varphi + 8 \cos^2 \varphi + 4 \cos^3 \varphi \\ &= 5 + 8 \cos \varphi + 4 \cos 2\varphi + \cos 3\varphi. \end{aligned}$$

Nach (18) ist daher für $\varepsilon > 0$, $t \geq 0$

$$\begin{aligned} &(\zeta(1+\varepsilon))^5 |\zeta(1+\varepsilon+ti)|^8 |\zeta(1+\varepsilon+2ti)|^4 |\zeta(1+\varepsilon+3ti)| \\ &= \sum_{p, m} \frac{1}{p^m} \frac{1}{p^{m(1+\varepsilon)}} (5 + 8 \cos(m \log p) + 4 \cos(2m \log p) + \cos(3m \log p)) \\ &\geq 1, \end{aligned}$$

$$(38) \quad |\zeta(1+\varepsilon+ti)| \geq \frac{1}{(\zeta(1+\varepsilon))^{\frac{5}{8}} |\zeta(1+\varepsilon+2ti)|^{\frac{1}{2}} |\zeta(1+\varepsilon+3ti)|^{\frac{1}{8}}}.$$

Aus (22), (25), (26) und (38) folgt für $0 < \varepsilon \leq 1$, $t \geq 2$

$$\begin{aligned} |\zeta(1+\varepsilon+ti)| &> \frac{\varepsilon^{\frac{5}{8}}}{a_{17}^{\frac{8}{8}} a_{19}^{\frac{1}{2}} \log^{\frac{1}{2}} t \cdot a_{20}^{\frac{1}{8}} \log^{\frac{1}{8}} t} \\ &= \frac{1}{a_{26}} \frac{\varepsilon^{\frac{5}{8}}}{\log^{\frac{5}{8}} t}, \end{aligned}$$

also mit Rücksicht auf (28)

$$\begin{aligned} |\zeta(1+ti)| &> \frac{1}{a_{26}} \frac{\varepsilon^{\frac{5}{8}}}{\log^{\frac{5}{8}} t} - a_{21} \varepsilon \log^2 t \\ &= \frac{1}{a_{26}} \frac{\varepsilon^{\frac{5}{8}}}{\log^{\frac{5}{8}} t} (1 - a_{21} a_{26} \varepsilon^{\frac{5}{8}} \log^{\frac{21}{8}} t). \end{aligned}$$

Hierin setze ich

$$\varepsilon = \frac{\alpha}{\log^7 t},$$

wo

$$0 < \alpha \leq \log^7 2$$

und

$$a_{21} a_{26} \alpha^{\frac{3}{8}} \leq \frac{1}{2}$$

ist. Dann ist für $t \geq 2$

$$0 < \varepsilon = \varepsilon(t) \leq 1$$

und

$$1 - a_{21} a_{26} \varepsilon^{\frac{3}{8}} \log^{\frac{21}{8}} t \geq \frac{1}{2},$$

also

$$\begin{aligned} |\zeta(1+ti)| &> \frac{1}{a_{26}} \frac{\alpha^{\frac{5}{8}}}{\log^{\frac{35}{8}} t \cdot \log^{\frac{5}{8}} t} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{a_{27}} \frac{\alpha^{\frac{5}{8}}}{\log^5 t} \\ &= \frac{1}{a_{28}} \frac{1}{\log^5 t}, \end{aligned}$$

(39)

$$\frac{1}{\zeta(1+ti)} = O(\log^5 t).$$

§ 4.

Den speziellen Resultaten (37) und (39) liegt folgender allgemeiner Ansatz zu Grunde.

Es sei die ganze rationale Funktion

$$f(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n \geq 0$$

im Intervall $-1 \leq x \leq 1$, und sie habe ferner die Eigenschaft, dass die Koeffizienten der durch die Substitution

$$x = \cos \varphi$$

aus ihr entstehenden Funktion

$$g(\varphi) = f(\cos \varphi) = c_0 + c_1 \cos \varphi + c_2 \cos 2\varphi + \dots + c_n \cos n\varphi$$

den Ungleichungen

$$0 < c_0 < c_1, \quad c_2 \geq 0, \quad c_3 \geq 0, \quad \dots, \quad c_n \geq 0$$

genügen. Dann ist für $\varepsilon > 0$, $t \geq 0$

$$\begin{aligned} & (\zeta(1 + \varepsilon))^{c_0} |\zeta(1 + \varepsilon + ti)|^{c_1} \dots |\zeta(1 + \varepsilon + nti)|^{c_n} \\ &= e^{\frac{1}{p, m} \frac{1}{p^{m(1+\varepsilon)}} (c_0 + c_1 \cos(mt \log p) + \dots + c_n \cos(nmt \log p))} \\ &\geq 1, \end{aligned}$$

$$|\zeta(1 + \varepsilon + ti)|^{c_1} \geq \frac{1}{(\zeta(1 + \varepsilon))^{c_0} |\zeta(1 + \varepsilon + 2ti)|^{c_2} \dots |\zeta(1 + \varepsilon + nti)|^{c_n}},$$

also nach (22), (25) und (26) für $0 < \varepsilon \leq 1$, $t \geq 2$

$$|\zeta(1 + \varepsilon + ti)|^{c_1} > \frac{1}{a_{29}} \frac{\varepsilon^{c_0}}{\log^{c_2 + \dots + c_n} t},$$

$$|\zeta(1 + \varepsilon + ti)| > \frac{1}{a_{30}} \frac{\varepsilon^{\frac{c_0}{c_1}}}{\log^{\frac{c_2 + \dots + c_n}{c_1}} t},$$

folglich nach (28)

$$\begin{aligned} |\zeta(1 + ti)| &> \frac{1}{a_{30}} \frac{\varepsilon^{\frac{c_0}{c_1}}}{\log^{\frac{c_2 + \dots + c_n}{c_1}} t} - a_{21} \varepsilon \log^2 t \\ (40) \quad &= \frac{1}{a_{30}} \frac{\varepsilon^{\frac{c_0}{c_1}}}{\log^{\frac{c_2 + \dots + c_n}{c_1}} t} (1 - a_{21} a_{30} \varepsilon^{\frac{c_1 - c_0}{c_1}} \log^{2 + \frac{c_2 + \dots + c_n}{c_1}} t). \end{aligned}$$

Wird in (40)

$$\varepsilon = \frac{\alpha}{\log^{\frac{2c_1 + c_2 + \dots + c_n}{c_1 - c_0}} t}$$

gesetzt, wo

$$0 < \frac{\alpha}{\log^{\frac{2c_1 + c_2 + \dots + c_n}{c_1 - c_0}} t} \leq 1$$

und

$$a_{21} a_{30} \alpha^{\frac{c_1 - c_0}{c_1}} \leq \frac{1}{2}$$

ist, so erhält man für $t \geq 2$

$$\begin{aligned} |\zeta(1 + ti)| &> \frac{1}{a_{30}} \frac{\alpha^{\frac{c_0}{c_1}}}{\log^{\frac{c_0}{c_1}} t \cdot \log^{\frac{2c_1 + c_2 + \dots + c_n}{c_1 - c_0}} t} \left(1 - \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{a_{31}} \frac{\alpha^{\frac{c_0}{c_1}}}{\log^{\frac{2c_0 + c_2 + \dots + c_n}{c_1 - c_0}} t} \\ &= \frac{1}{a_{32}} \frac{1}{\log^{\frac{2c_0 + c_2 + \dots + c_n}{c_1 - c_0}} t}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\zeta(1+ti)} &= O\left(\log^{\frac{2c_0+c_2+\dots+c_n}{c_1-c_0}} t\right) \\ &= O\left(\log^{-1+\frac{c_0+c_1+\dots+c_n}{c_1-c_0}} t\right).\end{aligned}$$

Im Falle $n=2$ würde die genaue Diskussion ergeben, dass bei allen definiten Funktionen

für welche

$$c_0 + c_1 \cos \varphi + c_2 \cos 2\varphi,$$

ist, der Ausdruck

$$\frac{2c_0 + c_2}{c_1 - c_0}$$

niemals kleiner als 6 ist, und dass der Wert 6 für

$$c_0 = 17, \quad c_1 = 24, \quad c_2 = 8$$

erreicht wird ⁴¹⁾, so dass die in § 2 verwendete quadratische Funktion unter allen die grösste Ausnutzung meiner Hilfsbetrachtungen liefert.

Dasselbe ist im Falle $n=3$ für die in § 3 benutzte Funktion

der Fall, in welcher

$$c_0 + c_1 \cos \varphi + c_2 \cos 2\varphi + c_3 \cos 3\varphi$$

$$c_0 = 5, \quad c_1 = 8, \quad c_2 = 4, \quad c_3 = 1,$$

$$\frac{2c_0 + c_2 + c_3}{c_1 - c_0} = 5$$

ist.

Für höhere Werte von n führe ich die Diskussion nicht weiter aus; denn ich werde später mit transzendenten Methoden beweisen, dass für jedes $\varepsilon > 0$

$$\frac{1}{\zeta(1+ti)} = O(\log^{1+\varepsilon} t)$$

und sogar, dass

$$\frac{1}{\zeta(1+ti)} = O(\log t \cdot \log \log t)$$

ist, während folgende Überlegung ergibt, dass der durch die elementare Methode erreichte Exponent von $\log t$ in allen Fällen grösser als 3 ist, d. h. dass stets

$$\frac{2c_0 + c_2 + \dots + c_n}{c_1 - c_0} > 3$$

ist.

Es sei für alle reellen φ

$$\begin{aligned}g(\varphi) &= c_0 + c_1 \cos \varphi + \dots + c_n \cos n\varphi \geq 0, \\ 0 &< c_0 < c_1, \quad c_2 \geq 0, \dots, c_n \geq 0.\end{aligned}$$

⁴¹⁾ Und natürlich auch für

$$c_0 = 17\lambda, \quad c_1 = 24\lambda, \quad c_2 = 8\lambda,$$

wo $\lambda > 0$ beliebig ist.

Es ist

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\varphi) d\varphi,$$

$$c_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\varphi) \cos \varphi d\varphi,$$

also

$$(41) \quad c_1 - c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\varphi) (2 \cos \varphi - 1) d\varphi.$$

Wegen

$$g(\varphi) \geq 0$$

ist der Integrand auf der rechten Seite von (41) ≥ 0 im Intervall $-\frac{\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$, sonst ≤ 0 , also

$$\begin{aligned} c_1 - c_0 &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} g(\varphi) (2 \cos \varphi - 1) d\varphi \\ &< \frac{1}{2\pi} g(0) \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (2 \cos \varphi - 1) d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi} g(0) \left(4 \sin \frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} \right) \\ &= g(0) \frac{\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}}{\pi}, \\ \frac{2c_0 + c_2 + \dots + c_n}{c_1 - c_0} &= -1 + \frac{c_0 + c_1 + c_2 + \dots + c_n}{c_1 - c_0} \\ &= -1 + \frac{g(0)}{c_1 - c_0} \\ &> -1 + \frac{\pi}{\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}} \\ &= 3,587 \dots \\ &> 3. \end{aligned}$$

§ 5.

SATZ (I) ⁴²⁾. — *Es sei die analytische Funktion $F(s)$ für $|s - s_0| \leq r$ regulär, und es sei eine Konstante A so gewählt, dass für $|s - s_0| = r$ (also auch für $|s - s_0| \leq r$)*

$$\Re F(s) \leq A$$

⁴²⁾ Dieser Satz ist in veränderter Formulierung derjenige, welchen ich an der in Anm. ¹¹⁾ zitierten Stelle einer früheren Arbeit im Anschluss an eine schriftliche Mitteilung von Herrn CARATHÉODORY bewiesen habe. Hier habe ich die damals gemachte Voraussetzung $A \geq 0$ als entbehrlich fallen gelassen. Für die meisten Anwendungen, welche ich vom Satz (I) mache, würden die älteren, weniger präzisen HADAMARD-BOREL'schen Ungleichungen genügen. Aber ich berufe mich doch stets auf den Satz (I), da sein Beweis einfacher ist als die älteren Beweise jener Ungleichungen.

ist. Es werde

$$F(s_0) = \beta + \gamma i$$

gesetzt, also

$$\beta = \Re F(s_0).$$

Es sei $0 < \rho < r$. Alsdann ist für $|s - s_0| \leq \rho$

$$(42) \quad |F(s)| \leq |\gamma| + |\beta| \frac{r + \rho}{r - \rho} + 2A \frac{\rho}{r - \rho}$$

und

$$(43) \quad |\Re F(s)| \leq |\beta| \frac{r + \rho}{r - \rho} + 2A \frac{\rho}{r - \rho}.$$

Beweis: Wenn $F(s)$ konstant ist, ist die Behauptung trivial, da

$$\beta \leq A,$$

also

$$-|\beta| \leq A,$$

$$\begin{aligned} |\Re F(s)| &= |\beta| \\ &= |\beta| \frac{r + \rho}{r - \rho} - |\beta| \frac{2\rho}{r - \rho} \\ &\leq |\beta| \frac{r + \rho}{r - \rho} + 2A \frac{\rho}{r - \rho}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |F(s)| &\leq |\gamma| + |\Re F(s)| \\ &\leq |\gamma| + |\beta| \frac{r + \rho}{r - \rho} + 2A \frac{\rho}{r - \rho} \end{aligned}$$

ist. $F(s)$ darf also als nicht konstant angenommen werden; alsdann ist

$$\beta < A,$$

und es ist die Funktion

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{F(s) - \beta - \gamma i}{F(s) + \beta - \gamma i - 2A} \\ &= \frac{F(s) - A - (\beta + \gamma i - A)}{F(s) - A + (\beta - \gamma i - A)} \end{aligned}$$

für $|s - s_0| \leq r$ regulär; ferner ist

$$H(s_0) = 0$$

und ⁴³⁾ für $|s - s_0| \leq r$

$$|H(s)| \leq 1.$$

Folglich ist $\frac{H(s)}{s - s_0}$ für $|s - s_0| \leq r$ regulär. Nun ist für $|s - s_0| = r$

$$\left| \frac{H(s)}{s - s_0} \right| \leq \frac{1}{r};$$

⁴³⁾ Denn, wenn $\bar{z}_0$ die zu z_0 konjugierte Zahl bezeichnet, bildet die Funktion

$$y = \frac{(z - A) - (z_0 - A)}{(z - A) + (\bar{z}_0 - A)}$$

die Halbebene $\Re(z) \leq A$ so auf den Kreis $|y| \leq 1$ ab, dass dem Punkt $z = z_0$ der Punkt $y = 0$ entspricht.

wenn $0 < \rho < r$ ist, ist also für $|s - s_0| = \rho$

$$\left| \frac{H(s)}{s - s_0} \right| \leq \frac{1}{r},$$

$$|H(s)| \leq \frac{\rho}{r};$$

diese Relation gilt infolgedessen auch für $|s - s_0| \leq \rho$.

Nun ist nach der Definition von $H(s)$

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{\beta + \gamma i + (\beta - \gamma i - 2A)H(s)}{1 - H(s)} \\ (44) \quad &= \beta + \gamma i - \frac{2(A - \beta)H(s)}{1 - H(s)}. \end{aligned}$$

Wegen

$$A - \beta > 0$$

erhält man aus (44) für $|s - s_0| \leq \rho$

$$\begin{aligned} |F(s)| &\leq |\beta| + |\gamma| + \frac{2(A - \beta)\frac{\rho}{r}}{1 - \frac{\rho}{r}} \\ &\leq |\beta| + |\gamma| + \frac{2A\rho}{r - \rho} + \frac{2|\beta|\rho}{r - \rho} \\ (42) \quad &= |\gamma| + |\beta|\frac{r + \rho}{r - \rho} + 2A\frac{\rho}{r - \rho}. \end{aligned}$$

Andererseits ergibt sich aus (44)

$$\Re F(s) = \beta - 2(A - \beta)\Re\left(\frac{H(s)}{1 - H(s)}\right),$$

also

$$\begin{aligned} |\Re F(s)| &\leq |\beta| + 2(A - \beta)\left|\frac{H(s)}{1 - H(s)}\right| \\ &\leq |\beta| + 2(A + |\beta|)\frac{\frac{\rho}{r}}{1 - \frac{\rho}{r}} \\ (43) \quad &= |\beta|\frac{r + \rho}{r - \rho} + 2A\frac{\rho}{r - \rho}, \end{aligned}$$

womit der Satz (I) vollständig bewiesen ist.

Falls übrigens $\beta \geq 0$ ist, lässt sich aus (44) so weiterschliessen:

$$\begin{aligned} |F(s)| &\leq \beta + |\gamma| + \frac{2(A - \beta)\frac{\rho}{r}}{1 - \frac{\rho}{r}} \\ &= |\gamma| + \beta\frac{r - 3\rho}{r - \rho} + 2A\frac{\rho}{r - \rho}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |\Re F(s)| &\leq \beta + \frac{2(A - \beta) \frac{\rho}{r}}{1 - \frac{\rho}{r}} \\
 &= \beta \frac{r - 3\rho}{r - \rho} + 2A \frac{\rho}{r - \rho}.
 \end{aligned}$$

§ 6.

Im § 1 war bewiesen worden, dass $(s - 1)\zeta(s)$ für $\Re(s) > 0$ regulär ist. Ich beweise jetzt nach RIEMANN ⁴⁴⁾, dass $\zeta(s)$ bis auf den Pol $s = 1$ in der ganzen Ebene regulär ist und die Funktionalgleichung

$$(45) \quad \zeta(1 - s) = \frac{2}{(2\pi)^s} \cos \frac{s\pi}{2} \Gamma(s) \zeta(s)$$

erfüllt.

Beim Beweise von (45) werde ich ausser den Eigenschaften der Γ -Funktion eine Identität aus der Theorie der elliptischen Funktionen als bekannt voraussetzen, nämlich die CAUCHY'sche Gleichung ⁴⁵⁾

$$(46) \quad 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \frac{\pi}{x}} \right)$$

für $x > 0$.

Für ⁴⁶⁾ $s > 1$ ist

$$(47) \quad \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \int_0^{\infty} e^{-y} y^{\frac{s}{2}-1} dy,$$

also, wenn

$$y = n^2 \pi x \quad (n > 0)$$

gesetzt wird,

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \int_0^{\infty} e^{-n^2 \pi x} (n^2 \pi x)^{\frac{s}{2}-1} n^2 \pi dx,$$

$$\frac{1}{n^s} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \pi^{-\frac{s}{2}} = \int_0^{\infty} e^{-n^2 \pi x} x^{\frac{s}{2}-1} dx.$$

Wird diese Gleichung für $n = 1, 2, \dots$ angesetzt und über alle diese Werte summiert, so ergibt sich, da die links entstehende Reihe konvergiert und rechts alle Elemente positiv sind,

$$\begin{aligned}
 \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \pi^{-\frac{s}{2}} \zeta(s) &= \int_0^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi x} dx \\
 (48) \quad &= \int_0^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1} \psi(x) dx,
 \end{aligned}$$

⁴⁴⁾ Ich schliesse mich dem zweiten von RIEMANN gegebenen Beweise an; vergl. die in Anm. ³⁵⁾ zitierte Arbeit, S. 673 bzw. S. 147.

⁴⁵⁾ Vergl. z. B. BACHMANN, *Die analytische Zahlentheorie* [Leipzig, 1894], S. 169-170 und S. 187, Fussnote.

⁴⁶⁾ Dass (47) auch für andere s , nämlich für $\Re(s) > 0$, giltig ist, gebrauche ich nicht.

wo

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi x} = \psi(x)$$

gesetzt wird. Nach (46) ist für $x > 0$

$$1 + 2\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \left(1 + 2\psi\left(\frac{1}{x}\right) \right),$$

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \psi\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Für $s > 1$ ergibt sich also aus (48)

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \pi^{-\frac{s}{2}} \zeta(s) &= \int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1} \psi(x) dx + \int_1^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1} \psi(x) dx \\ &= \int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \psi\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) dx + \int_1^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1} \psi(x) dx \\ &= \int_0^1 x^{\frac{s}{2}-\frac{3}{2}} \psi\left(\frac{1}{x}\right) dx - \frac{1}{2} \int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1} dx + \frac{1}{2} \int_0^1 x^{\frac{s}{2}-\frac{3}{2}} dx + \int_1^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1} \psi(x) dx \\ &= - \int_{\infty}^1 y^{\frac{3}{2}-\frac{s}{2}} \psi(y) \frac{dy}{y^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{s}{2}} + \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{s}{2} - \frac{1}{2}} + \int_1^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1} \psi(x) dx \\ &= \int_1^{\infty} x^{-\frac{1+s}{2}} \psi(x) dx - \frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} + \int_1^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1} \psi(x) dx \\ (49) \quad &= \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^{\infty} \left(x^{\frac{s}{2}-1} + x^{-\frac{1+s}{2}} \right) \psi(x) dx. \end{aligned}$$

Das Integral auf der rechten Seite von (49) ist nun für alle komplexen s konvergent und zwar gleichmässig in jedem endlichen Gebiete. Denn, wenn ein endliches Gebiet der s -Ebene gegeben ist, so ist für alle $x \geq 1$ in ihm gleichmässig

$$\begin{aligned} |x^{\frac{s}{2}-1} + x^{-\frac{1+s}{2}}| &\leq x^{\frac{\Re(s)}{2}-1} + x^{-\frac{1}{2}-\frac{\Re(s)}{2}} \\ &< 2x^{\alpha_{33}}, \end{aligned}$$

und es ist andererseits

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi x} \\ &< \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n \pi x} \\ &= \frac{e^{-\pi x}}{1 - e^{-\pi x}} \\ &= \frac{1}{e^{\pi x} - 1}, \end{aligned}$$

also

$$|(x^{\frac{s}{2}-1} + x^{-\frac{1+s}{2}}) \psi(x)| < 2 \frac{x^{\alpha_{33}}}{e^{\pi x} - 1},$$

woraus die gleichmässige Konvergenz des Integrals folgt. (49) lehrt also, dass

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s) - \frac{1}{s(s-1)}$$

eine ganze transzendente Funktion ist. Da

$$\frac{1}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}}}$$

auch eine ganze transzendente Funktion ist, ist $s(s-1)\zeta(s)$ gleichfalls eine solche, also $\zeta(s)$ überall regulär mit Ausnahme von $s=1$ und etwaiger Ausnahme von $s=0$. Nun ändert sich die rechte Seite von (49) nicht, wenn s durch $1-s$ ersetzt wird; also genügt $\zeta(s)$ der Funktionalgleichung

$$(50) \quad \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s) = \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\pi^{-\frac{1-s}{2}}\zeta(1-s);$$

(50) lehrt noch, dass $\zeta(s)$ auch für $s=0$ regulär ist; in der Tat hat im Punkte $s=0$ nach dem Früheren $\zeta(1-s)$ einen Pol erster Ordnung und bekanntlich $\frac{1}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}$

eine Nullstelle erster Ordnung. $(s-1)\zeta(s)$ ist also eine ganze transzendente Funktion ⁴⁷⁾.

Die Funktionalgleichung (50) lässt sich nun leicht in die Form (45) überführen ⁴⁸⁾. Denn mit Rücksicht auf die bekannten Funktionalgleichungen der Gammafunktion

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}$$

und

$$\Gamma(s)\Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{\pi} \cdot 2^{-2s} \Gamma(2s)$$

ergibt sich aus (50)

$$\begin{aligned} \zeta(1-s) &= \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)} \pi^{\frac{1}{2}-s} \zeta(s) \\ &= \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1+s}{2}\right) \frac{\sin\left(\pi \frac{1-s}{2}\right)}{\pi} \pi^{\frac{1}{2}-s} \zeta(s) \\ &= 2\sqrt{\pi} \cdot 2^{-s} \Gamma(s) \frac{\cos \frac{s\pi}{2}}{\pi} \pi^{\frac{1}{2}-s} \zeta(s) \\ (45) \quad &= \frac{2}{(2\pi)^s} \cos \frac{s\pi}{2} \Gamma(s) \zeta(s). \end{aligned}$$

⁴⁷⁾ Hierfür gibt es direktere Beweise; aber die Relation (49) musste ich ohnehin zur Begründung der RIEMANN'schen Funktionalgleichung (45) (welche aus ihr am schnellsten folgt) ableiten.

⁴⁸⁾ Übrigens genügt es festzustellen, dass $(s-1)\zeta(s)$ für $\Re(s) > 0$ regulär ist und dass für reelle s zwischen 0 und 1 die Funktionalgleichung (45) gilt, um nach den Grundprinzipien der Funktionentheorie schliessen zu dürfen, dass $\zeta(s)$ auch für $\Re(s) \leq 0$ existiert und überall die Funktionalgleichung (45) erfüllt.

Da $\frac{1}{\Gamma(s)}$ eine ganze transzendente Funktion mit den Nullstellen erster Ordnung $0, -1, -2, -3, \dots$ ist, lehrt (45), dass $\zeta(s)$ für $s = -2, -4, -6, \dots$ von der ersten Ordnung verschwindet und für kein anderes reelles $s \leq 0$ verschwindet; in der Tat hat für $s=0$ die linke Seite von (45) auch einen Pol, so dass

$$\zeta(0) \neq 0$$

ist, und für $s = -1, -3, -5, \dots$ hebt sich der Pol von $\Gamma(s)$ gegen die Nullstelle von $\cos \frac{s\pi}{2}$ fort.

Ferner ist nach der für $\Re(s) > 1$ giltigen Gleichung

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}$$

klar, dass für $\Re(s) > 1$

$$\zeta(s) \neq 0$$

ist; (45) lehrt also, dass abgesehen von den Punkten $-2, -4, -6, \dots$ für $\Re(s) < 0$

$$\zeta(s) \neq 0$$

ist.

Endlich erwähne ich noch, dass nach der für $\Re(s) > 0$ giltigen Gleichung

$$\begin{aligned} (20) \quad \zeta(s) &= 1 + \frac{1}{s-1} - s \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{u du}{(n+u)^{s+1}} \\ &= -\frac{s}{1-s} - s \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{u du}{(n+u)^{s+1}} \end{aligned}$$

$\zeta(s)$ für $0 < s < 1$ negativ, also dort

$$\zeta(s) \neq 0$$

ist.

Alle von $-2, -4, -6, \dots$ verschiedenen etwaigen Nullstellen von $\zeta(s)$ sind also nicht reell und dem Streifen

$$0 \leq \Re(s) \leq 1$$

angehörig ⁴⁹⁾.

Die Funktionalgleichung (50) macht es empfehlenswert, statt $\zeta(s)$ eine neue Funktion durch die Gleichung

$$\frac{s(s-1)}{2} \zeta(s) \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \pi^{-\frac{s}{2}} = \chi(s)$$

einzuführen. Nach (50) genügt $\chi(s)$ der Funktionalgleichung

$$\chi(1-s) = \chi(s);$$

da $\chi(s)$ für $\Re(s) \geq \frac{1}{2}$ regulär ist, ist $\chi(s)$ überall regulär, also eine ganze transzen-

⁴⁹⁾ In § 2 war schon bewiesen, dass keine Nullstelle auf der Geraden $\Re(s) = 1$ liegt; daraus folgt natürlich nach (45), dass die nicht reellen Nullstellen von $\zeta(s)$ der Ungleichung

$$0 < \Re(s) < 1$$

genügen; aber für die nächsten Betrachtungen ist dies unerheblich.

dente Funktion. $\chi(s)$ hat keine Nullstelle ausserhalb des Streifens

$$0 \leq \Re(s) \leq 1.$$

Wird noch statt s eine neue komplexe Variable z durch die Substitution

$$s = \frac{1}{2} + zi$$

eingeführt und

$$\chi(s) = \chi\left(\frac{1}{2} + zi\right) = \xi(z)$$

gesetzt, so ist für jedes komplexe z wegen

$$\chi\left(\frac{1}{2} + zi\right) = \chi\left(\frac{1}{2} - zi\right)$$

$$\xi(z) = \xi(-z),$$

d. h. $\xi(z)$ ist eine ganze transzendente gerade Funktion von z , also durch eine beliebig konvergente Potenzreihe

$$\xi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{2n}$$

darstellbar. Da

$$\zeta\left(\frac{1}{2}\right) \neq 0$$

ist, ist

$$b_0 = \xi(0) = \chi\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8} \zeta\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \pi^{-\frac{1}{4}} \neq 0.$$

Wird schliesslich

$$z^2 = x,$$

$$\xi(z) = g(x)$$

gesetzt, so ist

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

eine ganze transzendente Funktion von x , die für $x = 0$ nicht verschwindet. Hierbei ist vorläufig noch denkbar, dass $g(x)$ eine ganze rationale Funktion oder gar konstant ist; aber es ist leicht einzusehen, dass dies nicht der Fall ist. Denn sonst wäre $\chi(s)$ eine ganze rationale Funktion von s , also a fortiori für ein gewisses m , wenn s positiv ist,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\chi(s)}{s^m} = 0.$$

Nun ist aber für $s > 1$

$$\zeta(s) > 1,$$

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) &= \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\frac{s}{2}-1} dx \\ &> \int_s^{\infty} e^{-x} x^{\frac{s}{2}-1} dx \\ &> s^{\frac{s}{2}-1} \int_s^{\infty} e^{-x} dx \\ &= s^{\frac{s}{2}-1} e^{-s}, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}\chi(s) &> \frac{s(s-1)}{2} s^{\frac{s-1}{2}} e^{-s} \pi^{-\frac{s}{2}} \\ &= \frac{s-1}{2} e^{\frac{s}{2} \log s - s - \frac{s}{2} \log \pi},\end{aligned}$$

was stärker unendlich wird als jede endliche Potenz

$$s^m = e^{m \log s}.$$

Herr HADAMARD ⁵⁰⁾ hat zuerst bewiesen, dass $g(x)$ unendlich viele Nullstellen besitzt und dass die WEIERSTRASS'sche Produktzerlegung dieser Funktion die Gestalt

$$g(x) = b_0 \prod_{v=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{\xi_v}\right)$$

hat, d. h. dass weder konvergenzerzeugende Exponentialfaktoren erforderlich sind, noch vor dem Produkt eine Exponentialfunktion auftritt ⁵¹⁾. Aus der HADAMARD'schen Theorie der ganzen transzendenten Funktionen gebraucht man zu diesem Zweck nur folgenden Satz, den ich auf dem zur Zeit einfachsten bekannten Wege beweisen werde:

SATZ (II). — Es sei $g(x)$ eine ganze transzendente Funktion, welche für $x=0$ nicht verschwindet. Es existiere ein ϖ zwischen 0 und 1 ($0 < \varpi < 1$), so dass für alle $r \geq 0$ und alle Amplituden φ ($0 \leq \varphi < 2\pi$)

$$(51) \quad |g(re^{i\varphi})| < B e^{r^{\varpi}} \quad (B \text{ konstant})$$

ist. Dann ist entweder $g(x)$ eine ganze rationale Funktion, oder $g(x)$ hat unendlich viele Nullstellen $\xi_1, \xi_2, \dots$, für welche

$$\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{|\xi_v|}$$

konvergiert, und es ist überdies

$$g(x) = g(0) \prod_{v=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{\xi_v}\right).$$

Beweis ⁵²⁾: Ich zeige zunächst, dass, wenn $g(x)$ unendlich viele Nullstellen hat,

$$(52) \quad \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{|\xi_v|}$$

konvergiert. Es seien die Nullstellen nach wachsenden absoluten Beträgen geordnet, also,

⁵⁰⁾ Étude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par RIEMANN [Journal de Mathématiques pures et appliquées, Ser. IV, Bd. IX (1893), S. 171-215], S. 210-215.

⁵¹⁾ Übrigens ergibt sich gleichzeitig bei ihm die absolute Konvergenz von

$$\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{|\xi_v|^{\rho}}$$

für gewisse $\rho < 1$.

⁵²⁾ Bei dieser Darstellung benutze ich Vereinfachungen des ursprünglichen HADAMARD'schen Beweises, welche von anderen Autoren angebracht worden sind. Literaturangaben vergl. z.B. bei VIVANTI-GUTZMER, Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen [Leipzig, 1906], S. 228.

wenn

$$|\xi_v| = r_v$$

gesetzt wird,

$$r_1 \leq r_2 \leq \dots$$

Mehrfache Nullstellen sind dabei selbstverständlich mehrfach gezählt. Wird

$$\left(1 - \frac{x}{\xi_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{x}{\xi_n}\right) = h(x)$$

gesetzt, so ist $\frac{g(x)}{h(x)}$ eine ganze transzendente Funktion von x . Auf dem Kreise $|x| = 3r_n$ ist nach der Voraussetzung (51)

$$|g(x)| < B e^{(3r_n)^3}$$

und wegen

$$\left|\frac{x}{\xi_1}\right| \geq 3, \dots, \left|\frac{x}{\xi_n}\right| \geq 3$$

$$|h(x)| \geq 2^n,$$

also

$$\left|\frac{g(x)}{h(x)}\right| < B \frac{e^{(3r_n)^3}}{2^n}.$$

Nun ist die Grösse

$$|g(0)| = \left|\frac{g(0)}{h(0)}\right|$$

höchstens gleich dem Maximum von $\left|\frac{g(x)}{h(x)}\right|$ für $|x| = 3r_n$, also

$$|g(0)| < B \frac{e^{(3r_n)^3}}{2^n},$$

$$n \log 2 + \log |g(0)| - \log B < (3r_n)^3.$$

Für alle n von einer gewissen Stelle an ($n \geq n_0$) ist also

$$(3r_n)^3 > \frac{n}{2},$$

$$r_n^3 > \frac{n}{2} \frac{1}{3^3}$$

$$> \frac{n}{6},$$

$$\frac{1}{r_n} < \left(\frac{6}{n}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Wenn $\eta > 3$ ist, ist also für alle $n \geq n_0$

$$(53) \quad \frac{1}{r_n^\eta} < \left(\frac{6}{n}\right)^{\frac{\eta}{3}},$$

also

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r_n^\eta}$$

konvergent. Speziell für $\eta = 1$ ersieht man, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\xi_n|}$$

konvergiert.

Aus dem bisher bewiesenen folgt, dass unter den Voraussetzungen des Satzes (II) entweder

$$(54) \quad g(x) = e^{k(x)}$$

oder

$$(55) \quad g(x) = e^{k(x)} \prod_{v=1}^n \left(1 - \frac{x}{\xi_v}\right)$$

oder

$$(56) \quad g(x) = e^{k(x)} \prod_{v=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{\xi_v}\right)$$

ist, wo $k(x)$ eine ganze transzendente Funktion bezeichnet; denn, wenn $g(x)$ unendlich viele Nullstellen $\xi_1, \xi_2, \dots$ hat, ist wegen der Konvergenz von (52)

$$\frac{g(x)}{\prod_{v=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{\xi_v}\right)}$$

eine ganze transzendente Funktion ohne Nullstellen. Es bleibt zu beweisen, dass die in (54), (55) und (56) auftretende Funktion $k(x)$ eine Konstante ist.

Um die drei Fälle in den allgemeinsten, (56), zusammenzufassen, verstehe ich unter

$$\prod_{v=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{\xi_v}\right),$$

wenn $g(x)$ nur endlich viele Nullstellen $\xi_1, \dots, \xi_n$ hat, das Produkt

$$\prod_{v=1}^n \left(1 - \frac{x}{\xi_v}\right)$$

und, wenn $g(x)$ keine Nullstelle hat, den Wert 1; ich beweise zunächst: Wenn $\Theta > \varepsilon$ ist, so gibt es oberhalb jeder Schranke ein r , so dass für $x = r e^{i\varphi}$ und alle Amplituden φ

$$(57) \quad \left| \prod_{v=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{\xi_v}\right) \right| > e^{-r\Theta}$$

ist.

Dies ist im Falle der Gleichungen (54) und (55) klar, da alsdann das Produkt den Wert 1 hat bzw. als ganze rationale Funktion von x mit x dem absolutem Betrage nach unendlich wird. Es ist also nur der Fall zu behandeln, dass unendlich viele ξ_v vorhanden sind.

η werde so gewählt, dass

$$\eta < 1$$

und

$$\varepsilon < \eta < \Theta$$

ist.

Wegen der Konvergenz von

$$(58) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r_n}.$$

ist für unendlich viele n

$$(59) \quad r_{n+1} > r_n + 2,$$

d. h. es gibt mit dem Mittelpunkt o unendlich viele von Wurzeln freie Kreisringe der Dicke 2. Denn wäre für alle $n \geq N$

$$(60) \quad r_{n+1} \leq r_n + 2,$$

so wäre, wie die wiederholte Anwendung von (60) ergibt, für alle $m \geq 0$

$$r_{N+m} \leq r_N + 2m,$$

also (58) divergent.

Es sei nun $q = q(r)$ für $r < \frac{r_1}{2}$ als 0 und für $r \geq \frac{r_1}{2}$ als die kleinste positive ganze Zahl definiert, für welche

$$(61) \quad r_q \leq 2r \leq r_{q+1}$$

ist; q wächst monoton mit r ins Unendliche. Wegen (53) ist, weil $\eta > \frac{1}{2}$ ist, von einem gewissen n an

$$\left(\frac{n}{6}\right)^{\frac{1}{\eta}} < r_n^{\eta},$$

also von einem gewissen n an

$$n < r_n^{\eta};$$

von einem gewissen r an ist also

$$q < r_q^{\eta} \\ \leq (2r)^{\eta}.$$

Es sei nun

$$r > \frac{1}{2},$$

$$r > \frac{r_1}{2}$$

und ausserdem sei r den drei Bedingungen (62) bis (64) unterworfen, von denen die zwei ersten für alle hinreichend grossen r gelten, während die dritte für passend wählbare beliebig grosse r erfüllt ist, so dass die drei Bedingungen verträglich und für unendlich viele r , worunter beliebig grosse vorkommen, erfüllt sind:

$$(62) \quad q < (2r)^{\eta},$$

$$(63) \quad (2r)^{\eta} \log(2r) + (2r)^{\eta} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{r_v^{\eta}} < r^{\Theta},$$

$$(64) \quad |x - \xi_v| > 1 \quad \text{für } |x| = r \quad \text{und alle } v \geq 1.$$

(62) gilt, wie vorher festgestellt war, für alle hinreichend grossen r , (63) offenbar auch wegen

$$\eta < \Theta;$$

(64) gilt für passend gewählte beliebig grosse r nach (59), da man im Falle

$$r_{n+1} > r_n + 2$$

nur

$$r = \frac{r_n + r_{n+1}}{2}$$

zu setzen braucht.

In

$$(56) \quad g(x) = e^{k(x)} \prod_{v=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{\xi_v}\right)$$

sei nun $|x| = r$, wo r grösser als $\frac{1}{2}$ und grösser als $\frac{r_1}{2}$ ist und ferner die drei Relationen (62), (63), (64) erfüllt. Das Produkt werde in zwei durch $v = q$ geschiedene Teile zerlegt:

$$(65) \quad e^{-k(x)} g(x) = \prod_{v=1}^q \left(1 - \frac{x}{\xi_v}\right) \prod_{v=q+1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{\xi_v}\right).$$

Im ersten Produkt rechts, welches wegen $r > \frac{r_1}{2}$ mindestens einen Faktor enthält, ist nach (64)

$$\begin{aligned} \left|1 - \frac{x}{\xi_v}\right| &= \frac{|x - \xi_v|}{|\xi_v|} \\ &> \frac{1}{|\xi_v|} \\ &= \frac{1}{r_v}; \end{aligned}$$

also ist nach (61) und (62) und mit Rücksicht auf die Festsetzung $r > \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \left| \prod_{v=1}^q \left(1 - \frac{x}{\xi_v}\right) \right| &> \frac{1}{r_1 \cdots r_q} \\ &\geq \frac{1}{r_q^q} \\ &> \frac{1}{(2r)^{(2r)^q}} \\ &= e^{-(2r)^q \log(2r)}. \end{aligned}$$

(66)

Im zweiten Produkt auf der rechten Seite von (65) ist nach (61)

$$\begin{aligned} \left| \frac{x}{\xi_v} \right| &= \frac{r}{r_v} \\ &\leq \frac{r}{r_{q+1}} \\ &\leq \frac{1}{2}; \end{aligned}$$

da nun für $0 < u \leq \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} 1 - u &= e^{-u - \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} - \dots} \\ &> e^{-u - u^2 - u^3 - \dots} \\ &= e^{-\frac{u}{1-u}} \\ &\geq e^{-2u} \end{aligned}$$

ist, ist

$$\begin{aligned}
 \left| \prod_{v=q+1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{\xi_v} \right) \right| &\geq \prod_{v=q+1}^{\infty} \left(1 - \left| \frac{x}{\xi_v} \right| \right) \\
 &> e^{-2 \sum_{v=q+1}^{\infty} \frac{r}{r_v}} \\
 &= e^{-2r \sum_{v=q+1}^{\infty} \frac{1}{r_v^{\eta}} \frac{1}{r_v^{1-\eta}}} \\
 &> e^{-\frac{2r}{r_{q+1}^{1-\eta}} \sum_{v=q+1}^{\infty} \frac{1}{r_v^{\eta}}} \\
 &> e^{-\frac{2r}{(2r)^{1-\eta}} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{r_v^{\eta}}} \\
 &= e^{-(2r)^{\eta} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{r_v^{\eta}}}.
 \end{aligned}
 \tag{67}$$

Aus (65), (66) und (67) folgt

$$\begin{aligned}
 e^{-\Re k(x)} |g(x)| &= \left| \prod_{v=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{\xi_v} \right) \right| \\
 &> e^{-(2r)^{\eta} \log(2r) - (2r)^{\eta} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{r_v^{\eta}}},
 \end{aligned}$$

also wegen (63)

$$\left| \prod_{v=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{\xi_v} \right) \right| > e^{-r^{\Theta}},$$

womit (57) bewiesen ist.

Für jedes r , das (57) erfüllt, ist nun

$$e^{-\Re k(x)} |g(x)| > e^{-r^{\Theta}},$$

$$e^{\Re k(x)} < |g(x)| e^{r^{\Theta}},$$

also nach (51)

$$e^{\Re k(x)} < B e^{r^{\mathfrak{z}}} e^{r^{\Theta}},$$

$$\Re k(x) < \log B + r^{\mathfrak{z}} + r^{\Theta}.$$

Nach der CARATHÉODORY'schen Relation (42) ist daher, wenn

$$s = x, \quad s_0 = 0, \quad F(s) = k(x), \quad \rho = \frac{r}{2}$$

gesetzt wird, für $|x| = \frac{r}{2}$

$$\begin{aligned}
 |k(x)| &< |k(0)| + |k(0)| \frac{r + \frac{r}{2}}{r - \frac{r}{2}} + 2(\log B + r^{\mathfrak{z}} + r^{\Theta}) \frac{\frac{r}{2}}{r - \frac{r}{2}} \\
 &= 4|k(0)| + 2 \log B + 2(r^{\mathfrak{z}} + r^{\Theta}).
 \end{aligned}$$

Wird

$$\frac{r}{2} = R$$

gesetzt, so besagt dies: bei gegebenem $\Theta > \varepsilon$ ist für unendlich viele R , unter denen es beliebig grosse gibt, auf dem Kreise $x = R e^{\Theta i}$

$$\begin{aligned} |k(x)| &< a_{34} + 2(2^3 R^3 + 2^\Theta R^\Theta) \\ &< a_{35} R^\Theta. \end{aligned}$$

In

$$k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

ist also für jene R und alle $n \geq 1$

$$|c_n| < \frac{a_{35} R^\Theta}{R^n}.$$

Daher ist für alle $n \geq 1$

$$c_n = 0,$$

also $k(x)$ eine Konstante, womit der HADAMARD'sche Satz (II) vollständig bewiesen ist.

Ich behaupte nun, dass die Voraussetzungen des Satzes (II) für diejenige Funktion $g(x)$ erfüllt sind, welche nach dem Früheren mit $\zeta(s)$ durch die Gleichungen

$$(68) \quad s = \frac{1}{2} + \sqrt{x} i,$$

$$(69) \quad \frac{s(s-1)}{2} \zeta(s) \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \pi^{-\frac{s}{2}} = g(x)$$

verbunden ist. Jedem $x \neq 0$ entsprechen nach (68) zwei verschiedene s , deren Summe 1 ist; aber die linke Seite von (69) hat eben für zwei solche s denselben Wert. Zu jedem x gehört mindestens ein s , das der Halbebene $\Re(s) \geq \frac{1}{2}$ angehört. Wird ein solches s gewählt, so ist für $r = |x| > 10$ wegen

$$\begin{aligned} |s| &\geq \sqrt{|x|} - \frac{1}{2} \\ &> 2 \end{aligned}$$

nebst

$$\begin{aligned} |s| &\leq \frac{1}{2} + \sqrt{|x|} \\ &= \frac{1}{2} + \sqrt{r} \\ &< 2\sqrt{r} \end{aligned}$$

$$|\zeta(s)| = \left| 1 + \frac{1}{s-1} - s \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{u du}{(n+u)^{s+1}} \right|$$

$$< 1 + \frac{1}{2-1} + 2\sqrt{r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

$$= 2 + a_{36} \sqrt{r}$$

$$(70) \quad < a_{37} \sqrt{r}.$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} \left| \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \right| &= \left| \int_0^\infty e^{-u} u^{\frac{s}{2}-1} du \right| \\ &\leq \int_0^\infty e^{-u} u^{\frac{\sigma}{2}-1} du \\ &= \Gamma\left(\frac{\sigma}{2}\right); \end{aligned}$$

nun ist für $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 2$

$$\Gamma\left(\frac{\sigma}{2}\right) < a_{38};$$

für $\sigma > 2$ erhält man, da stets

$$1 \leq \frac{\sigma}{2} - \left[\frac{\sigma}{2} \right] + 1 < 2$$

ist,

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{\sigma}{2}\right) &= \left(\frac{\sigma}{2} - 1\right) \left(\frac{\sigma}{2} - 2\right) \cdots \left(\frac{\sigma}{2} - \left[\frac{\sigma}{2} \right] + 1\right) \Gamma\left(\frac{\sigma}{2} - \left[\frac{\sigma}{2} \right] + 1\right) \\ &< \frac{\sigma}{2} \cdot \frac{\sigma}{2} \cdots \frac{\sigma}{2} a_{38} \\ &= \left(\frac{\sigma}{2}\right)^{\left[\frac{\sigma}{2} \right]} a_{38} \\ &\leq \left(\frac{\sigma}{2}\right)^{\frac{\sigma}{2}} a_{38} \\ &\leq a_{38} \left(\frac{|s|}{2}\right)^{\frac{|s|}{2}} \\ &< a_{38} (\sqrt{r})^{\sqrt{r}} \\ &= a_{38} e^{\frac{1}{2}\sqrt{r} \log r}. \end{aligned}$$

Also ist jedenfalls für $r > 10$, $\Re(s) \geq \frac{1}{2}$

$$(71) \quad \left| \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \right| < a_{39} e^{\frac{1}{2}\sqrt{r} \log r}$$

Nach (69), (70) und (71) ist für $|x| > 10$

$$\begin{aligned} |g(x)| &< \frac{2\sqrt{r}(2\sqrt{r}+1)}{2} a_{37} \sqrt{r} a_{39} e^{\frac{1}{2}\sqrt{r} \log r} \pi^{-\frac{1}{4}} \\ &< a_{40} e^{\sqrt{r} \log r}, \end{aligned}$$

also für alle x

$$|g(x)| < a_{41} e^{r^{\frac{3}{4}}}.$$

Da überdies $g(x)$ keine ganze rationale Funktion und

$$g(0) \neq 0$$

ist, wie oben festgestellt wurde, so hat $g(x)$ nach dem Satz (II) unendlich viele Nullstellen, für welche die Summe der reziproken Werte absolut konvergiert, und es ist

$$g(x) = g(0) \prod_{v=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{\xi_v}\right).$$

Es ist also

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= \frac{2}{s(s-1)} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \pi^{\frac{s}{2}} g\left(-\left(s - \frac{1}{2}\right)^2\right) \\ (72) \quad &= \frac{1}{s-1} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{s}{2} + 1\right)} \pi^{\frac{s}{2}} g(0) \prod_{v=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\left(s - \frac{1}{2}\right)^2}{\xi_v}\right). \end{aligned}$$

$\zeta(s)$ hat daher im Gebiet $0 \leq \Re(s) \leq 1$ die unendlich vielen komplexen Wurzeln

$$\frac{1}{2} \pm \sqrt{\xi_v} i;$$

da

$$\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{|\xi_v|}$$

konvergiert, ist die Summe der reziproken Quadrate der Wurzeln von $\zeta(s)$ absolut konvergent.

Wenn rechts in (72) jeder Faktor in zwei Linearfaktoren zerlegt wird, so ist das entstehende Produkt

$$\left(1 + \frac{s - \frac{1}{2}}{-\sqrt{\xi_1} i}\right) \left(1 + \frac{s - \frac{1}{2}}{\sqrt{\xi_1} i}\right) \left(1 + \frac{s - \frac{1}{2}}{-\sqrt{\xi_2} i}\right) \left(1 + \frac{s - \frac{1}{2}}{\sqrt{\xi_2} i}\right) \dots$$

konvergent. Werden also die von $-2, -4, -6, \dots$ verschiedenen Wurzeln von $\zeta(s)$ in derjenigen Reihenfolge mit $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ bezeichnet, dass die beiden Wurzeln $\frac{1}{2} \pm \sqrt{\xi_v} i$ den $(2v-1)$ -ten und $2v$ -ten Platz einnehmen, so ist

$$\begin{aligned} \prod_{v=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\left(s - \frac{1}{2}\right)^2}{\xi_v}\right) &= \prod_{n=1}^{\infty} \frac{s - \alpha_n}{\frac{1}{2} - \alpha_n} \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n - s}{\alpha_n - \frac{1}{2}} \\ (73) \quad &= \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\alpha_n - \frac{1}{2}} \left(1 - \frac{s}{\alpha_n}\right). \end{aligned}$$

Da

$$\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{|\xi_v|}$$

konvergiert, ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n}$$

konvergent; denn es ist

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha_{2\nu-1}} + \frac{1}{\alpha_{2\nu}} &= \frac{1}{\frac{1}{2} + \sqrt{\xi_\nu} i} + \frac{1}{\frac{1}{2} - \sqrt{\xi_\nu} i} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{4} + \xi_\nu}, \\ \left| \frac{1}{\alpha_{2\nu-1}} + \frac{1}{\alpha_{2\nu}} \right| &= \left| \frac{1}{\frac{1}{4} + \xi_\nu} \right|.\end{aligned}$$

Also konvergiert auch (da überdies $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\alpha_n|^2}$ konvergiert)

$$(74) \quad \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\alpha_n - \frac{1}{2}} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{2\alpha_n}}.$$

Aus (72) und (73) ergibt sich wegen der Konvergenz von (74)

$$\zeta(s) = \frac{c}{s-1} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{s}{2} + 1\right)} \pi^{\frac{s}{2}} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s}{\alpha_n}\right),$$

wo c eine Konstante bezeichnet.

Es ist also in der ganzen Ebene mit Ausnahme der Nullstellen und des Pols von $\zeta(s)$

$$(75) \quad \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \frac{1}{2} \log \pi - \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2} \frac{\Gamma'\left(\frac{s}{2} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2} + 1\right)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{s - \alpha_n}.$$

Nun ist für $\Re(s) > 1$

$$\begin{aligned}-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} &= \sum_p \frac{\log p}{p^s - 1} \\ &= \sum_{p,m} \frac{\log p}{p^{ms}};\end{aligned}$$

also ist für $\sigma > 1$, $t \geq 0$ wegen (75)

$$(76) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{p,m} \frac{\log p}{p^{m(\sigma+ti)}} &= -\frac{1}{2} \log \pi + \frac{1}{\sigma-1+ti} \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\Gamma'\left(\frac{\sigma}{2} + 1 + \frac{t}{2}i\right)}{\Gamma\left(\frac{\sigma}{2} + 1 + \frac{t}{2}i\right)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma + ti - \alpha_n}; \end{aligned} \right.$$

wenn

$$\alpha_n = \beta_n + \gamma_n i$$

gesetzt wird, wo

$$0 \leq \beta_n = \Re(\alpha_n) \leq 1$$

ist, und wenn in (76) auf beiden Seiten der reelle Teil genommen wird, so ergibt sich

$$(77) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{p, m} \frac{\log p \cos(mt \log p)}{p^{m\sigma}} &= -\frac{1}{2} \log \pi + \frac{\sigma - 1}{(\sigma - 1)^2 + t^2} \\ &+ \frac{1}{2} \Re \left(\frac{\Gamma' \left(\frac{\sigma}{2} + 1 + \frac{t}{2} i \right)}{\Gamma \left(\frac{\sigma}{2} + 1 + \frac{t}{2} i \right)} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma - \beta_n}{(\sigma - \beta_n)^2 + (t - \gamma_n)^2} \end{aligned} \right.$$

Zur weiteren Untersuchung ist hier folgender Hilfssatz erforderlich: Für $0 \leq \sigma \leq 2$, $t \geq 2$ ist

$$(78) \quad \left| \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} \right| < a_{42} \log t.$$

Für einen späteren Zweck werde ich gleich auch feststellen⁵³⁾, dass für $0 \leq \sigma \leq 2$, $t \geq 2$

$$(79) \quad \left| \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} \right| < a_{43} + \log t$$

ist.

Es ist nämlich

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = e^{C_s s} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s}{n} \right) e^{-\frac{s}{n}},$$

also

$$\begin{aligned} -\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} &= C + \frac{1}{s} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{s+n} - \frac{1}{n} \right) \\ &= C + \frac{1}{s} - s \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(s+n)}. \end{aligned}$$

Für $0 \leq \sigma \leq 2$, $t \geq 2$ ist daher

$$\begin{aligned} \left| \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} \right| &< C + \frac{1}{2} + (\sigma + t) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt{(\sigma + n)^2 + t^2}} \\ (80) \quad &< C + \frac{1}{2} + (2 + t) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt{n^2 + t^2}}. \end{aligned}$$

Hierin ist

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt{n^2 + t^2}} &= \sum_{n=1}^t \frac{1}{n \sqrt{n^2 + t^2}} + \sum_{n=t+1}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt{n^2 + t^2}} \\ &< \sum_{n=1}^t \frac{1}{n \cdot t} + \sum_{n=t+1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot n} \\ &< \frac{1}{t} \left(1 + \int_1^t \frac{du}{u} \right) + a_{44} \frac{1}{t} \\ &= \frac{\log t}{t} + a_{45} \frac{1}{t}; \end{aligned}$$

dies ergibt, in (80) eingesetzt,

$$(79) \quad \left| \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} \right| < C + \frac{1}{2} + (2 + t) \left(\frac{\log t}{t} + a_{45} \frac{1}{t} \right)$$

$$< a_{43} + \log t$$

$$(78) \quad < a_{42} \log t.$$

⁵³⁾ Schärfere Abschätzungen sind bekannt, werden aber hier nicht gebraucht.

In (77) ist für $1 < \sigma \leq 2$, $t \geq 4$, da alsdann

$$0 < \frac{3}{2} < \frac{\sigma}{2} + 1 \leq 2, \quad \frac{t}{2} \geq 2,$$

also (78) anwendbar ist,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Re \left(\frac{\Gamma' \left(\frac{\sigma}{2} + 1 + \frac{t}{2} i \right)}{\Gamma \left(\frac{\sigma}{2} + 1 + \frac{t}{2} i \right)} \right) &\leq \frac{1}{2} \left| \frac{\Gamma' \left(\frac{\sigma}{2} + 1 + \frac{t}{2} i \right)}{\Gamma \left(\frac{\sigma}{2} + 1 + \frac{t}{2} i \right)} \right| \\ &< \frac{1}{2} a_{42} \log \frac{t}{2} \\ &< a_{46} \log t. \end{aligned}$$

Demnach ist für $1 < \sigma \leq 2$, $t \geq 2$

$$\frac{1}{2} \Re \left(\frac{\Gamma' \left(\frac{\sigma}{2} + 1 + \frac{t}{2} i \right)}{\Gamma \left(\frac{\sigma}{2} + 1 + \frac{t}{2} i \right)} \right) < a_{47} \log t.$$

(77) ergibt also für $1 < \sigma \leq 2$, $t \geq 2$

$$\begin{aligned} \sum_{p,m} \frac{\log p \cos(mt \log p)}{p^{m\sigma}} &< \frac{1}{t^2} + a_{47} \log t - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma - \beta_n}{(\sigma - \beta_n)^2 + (t - \gamma_n)^2} \\ (81) \quad &< a_{48} \log t - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma - \beta_n}{(\sigma - \beta_n)^2 + (t - \gamma_n)^2} \\ (82) \quad &< a_{48} \log t; \end{aligned}$$

denn in der Summe auf der rechten Seite von (81) ist wegen

$$\beta_n \leq 1$$

jedes Glied positiv. Wenn man an die Bedeutung der linken Seite von (82) denkt, besagt (82), dass für $1 < \sigma \leq 2$, $t \geq 2$

$$(83) \quad -\Re \left(\frac{\zeta'(\sigma + ti)}{\zeta(\sigma + ti)} \right) < a_{48} \log t$$

ist ⁵⁴⁾.

$\beta + \gamma i$ bezeichne eine beliebige Nullstelle von $\zeta(s)$, für welche

$$\gamma \geq 2$$

⁵⁴⁾ Also gilt eine Relation der Gestalt (83) natürlich für $t \geq 2$ mit allen $\sigma \geq 1$. Denn für $t \geq 2$, $\sigma = 1$ ist

$$\begin{aligned} -\Re \left(\frac{\zeta'(1 + ti)}{\zeta(1 + ti)} \right) &= \lim_{\sigma \rightarrow 1} \left(-\Re \left(\frac{\zeta'(\sigma + ti)}{\zeta(\sigma + ti)} \right) \right) \\ &\leq a_{48} \log t, \end{aligned}$$

und für $\sigma \geq 2$ ist

$$\left| -\frac{\zeta'(\sigma + ti)}{\zeta(\sigma + ti)} \right| \leq -\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}.$$

ist ⁵⁵⁾. Wenn in (81) $t = \gamma$ gesetzt wird, ist in der Summe rechts ein Glied

$$= \frac{\sigma - \beta}{(\sigma - \beta)^2} = \frac{1}{\sigma - \beta}$$

und auch alle anderen positiv. (81) ergibt also für $1 < \sigma \leq 2$ und alle Nullstellen $\beta + \gamma i$, bei welchen $\gamma \geq 2$ ist,

$$(84) \quad \sum_{p,m} \frac{\log p \cos(m\gamma \log p)}{p^{m\sigma}} < a_{48} \log \gamma - \frac{1}{\sigma - \beta},$$

$$\frac{1}{\sigma - \beta} < a_{48} \log \gamma - \sum_{p,m} \frac{\log p \cos(m\gamma \log p)}{p^{m\sigma}}.$$

Aus (84) folgt wegen

$$-\cos \varphi \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos^2 \varphi$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 2\varphi$$

$$(85) \quad \frac{1}{\sigma - \beta} < a_{48} \log \gamma + \frac{3}{4} \sum_{p,m} \frac{\log p}{p^{m\sigma}} + \frac{1}{4} \sum_{p,m} \frac{\log p \cos(2m\gamma \log p)}{p^{m\sigma}}$$

$$= a_{48} \log \gamma - \frac{3}{4} \frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} - \frac{1}{4} \Re \left(\frac{\zeta'(\sigma + 2\gamma i)}{\zeta(\sigma + 2\gamma i)} \right).$$

Nach (83) ist nun für $1 < \sigma \leq 2$ und alle $\gamma \geq 2$ wegen $2\gamma \geq 4 > 2$

$$(86) \quad -\Re \left(\frac{\zeta'(\sigma + 2\gamma i)}{\zeta(\sigma + 2\gamma i)} \right) < a_{48} \log(2\gamma)$$

$$< a_{49} \log \gamma;$$

ferner ist mit Rücksicht auf die Existenz von

$$\lim_{\sigma \rightarrow 1} \left(\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} + \frac{1}{\sigma - 1} \right)$$

für $1 < \sigma \leq 2$

$$(87) \quad -\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} < \frac{1}{\sigma - 1} + a_{50};$$

aus (85), (86) und (87) folgt also für $1 < \sigma \leq 2$ und alle Nullstellen $\beta + \gamma i$ von $\zeta(s)$ mit $\gamma \geq 2$

$$(88) \quad \frac{1}{\sigma - \beta} < a_{48} \log \gamma + \frac{3}{4} \frac{1}{\sigma - 1} + a_{51} + \frac{1}{4} a_{49} \log \gamma$$

$$< \frac{3}{4} \frac{1}{\sigma - 1} + a_{52} \log \gamma.$$

(88) lehrt zunächst nochmals, dass

$$\beta < 1$$

ist (wie schon in § 2 festgestellt wurde); in der Tat könnte sonst (88) für kleine

⁵⁵⁾ Die Kenntnis der Tatsache, dass bei allen Nullstellen in der oberen Halbebene $\gamma \geq 2$ ist, ist nicht erforderlich.

$\sigma - 1$ nicht mehr gültig bleiben. Ferner ergibt sich für

$$\sigma = 1 + \frac{\alpha}{\log \gamma},$$

wo α eine noch näher anzugebende Konstante ist, die vorläufig nur den Bedingungen

$$(89) \quad 0 < \frac{\alpha}{\log 2} \leq 1$$

unterworfen sei (damit

$$1 < \sigma \leq 2$$

ist),

$$\frac{1}{1 - \beta + \frac{\alpha}{\log \gamma}} < \frac{3}{4\alpha} \log \gamma + a_{s_2} \log \gamma,$$

$$1 - \beta + \frac{\alpha}{\log \gamma} > \frac{1}{\frac{3}{4\alpha} + a_{s_2}} \frac{1}{\log \gamma},$$

$$1 - \beta > \left(\frac{1}{\frac{3}{4\alpha} + a_{s_2}} - \alpha \right) \frac{1}{\log \gamma}$$

$$(90) \quad = \frac{\frac{1}{4} - a_{s_2} \alpha}{\frac{3}{4\alpha} + a_{s_2}} \frac{1}{\log \gamma}.$$

Der konstante Faktor von $\frac{1}{\log \gamma}$ auf der rechten Seite von (90) ist für alle hinreichend kleinen positiven α positiv. α kann also so gewählt werden, dass (89) erfüllt ist und jener Faktor positiv ist. Also ist

$$1 - \beta > \frac{1}{a_{s_3}} \frac{1}{\log \gamma}.$$

Die Nullstelle $\beta + \gamma i$ hat also von der Geraden mindestens den Abstand $\frac{1}{a_{s_3}} \frac{1}{\log \gamma}$.

Dies ist das berühmte Resultat von Herrn DE LA VALLÉE POUSSIN, das ich in engem Anschluss an ihn hergeleitet habe, und das sich auch so formulieren lässt:

Es gibt eine positive Konstante a , so dass im Gebiete

$$s = \sigma + ti, \quad t \geq 2, \quad \sigma \geq 1 - \frac{1}{a \log t}$$

$$\zeta(s) \neq 0$$

ist.

Nach Reproduktion dieser aus der Theorie der RIEMANN'schen Zetafunktion bekannten Dinge (vom Beginn des § 6 an) fahre ich nun in meinen eigenen Untersuchungen fort.

§ 7.

Ich behaupte, dass, wenn b eine gegebene positive Konstante bezeichnet, für

$$t \geq 2, \quad 1 - \frac{b}{\log t} \leq \sigma$$

die Ungleichung

$$(91) \quad |\zeta(s)| < a_{54} \log t$$

besteht.

Es sei nämlich zunächst $t_0 \geq 2$ so gewählt, dass

$$\frac{b}{\log t_0} < 1$$

ist. Alsdann gilt für

$$t \geq t_0, \quad 1 - \frac{b}{\log t} \leq \sigma$$

wegen $\sigma > 0$ die Gleichung

$$(24) \quad \zeta(s) = \sum_{n=1}^{m+1} \frac{1}{n^s} + \frac{1}{s-1} \frac{1}{(m+1)^{s-1}} - s \sum_{n=m+1}^{\infty} \int_0^1 \frac{u du}{(n+u)^{s+1}}.$$

Wenn hierin $m = [t]$ gesetzt wird, ergibt sich für

$$t \geq t_0, \quad 1 - \frac{b}{\log t} \leq \sigma \leq 2$$

$$\begin{aligned} |\zeta(s)| &< \sum_{n=1}^{t+1} \frac{1}{n^\sigma} + \frac{1}{t-1} \frac{1}{([t]+1)^{\sigma-1}} + (\sigma+t) \sum_{n=[t]+1}^{\infty} \int_0^1 \frac{du}{(n+u)^{\sigma+1}} \\ &< \sum_{n=1}^{t+1} \frac{1}{n^{1-\frac{b}{\log t}}} + ([t]+1)^{\frac{b}{\log t}} + (2+t) \int_{[t]+1}^{\infty} \frac{du}{u^{2-\frac{b}{\log t}}} \\ &< ([t]+1)^{\frac{b}{\log t}} \sum_{n=1}^{t+1} \frac{1}{n} + (t+1)^{\frac{b}{\log t}} + 2t \int_t^{\infty} \frac{du}{u^{2-\frac{b}{\log t}}} \\ &< (t+1)^{\frac{b}{\log t}} a_{55} \log t + (t+1)^{\frac{b}{\log t}} + 2t \frac{1}{1-\frac{b}{\log t}} \frac{1}{t^{\frac{b}{\log t}}}, \end{aligned}$$

also wegen

$$\begin{aligned} (t+1)^{\frac{b}{\log t}} &= e^{\frac{b \log(t+1)}{\log t}} \\ &< a_{56}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\zeta(s)| &< a_{56} a_{55} \log t + a_{56} + a_{57} \\ &< a_{58} \log t. \end{aligned}$$

Ferner ist für

$$t_0 > t \geq 2, \quad 1 - \frac{b}{\log t} \leq \sigma \leq 2$$

$$\begin{aligned} |\zeta(s)| &< a_{59} \\ &< a_{60} \log t \end{aligned}$$

und für $t \geq 2$, $\sigma > 2$

$$\begin{aligned} |\zeta(s)| &< a_{61} \\ &< a_{62} \log t, \end{aligned}$$

so dass (91) vollständig bewiesen ist.

Daraus folgt für

$$(92) \quad t \geq 2, \quad 1 - \frac{1}{a} \frac{1}{\log t} \leq \sigma,$$

wo a die Bedeutung des DE LA VALLÉE POUSSIN'schen Satzes am Ende des vorigen Paragraphen hat,

$$|\zeta(s)| < a_{63} \log t.$$

Nun ist die für $\Re(s) > 1$ durch die Reihe

$$\sum_{p,m} \frac{1}{m} \frac{1}{p^{ms}}$$

definierte Funktion

$$F(s) = \log \zeta(s)$$

im Gebiet (92) nach jenem Satze ($\zeta(s) \neq 0$) regulär; also ist dort

$$\begin{aligned} \Re F(s) &= \Re \log \zeta(s) \\ &= \log |\zeta(s)| \\ &< \log a_{63} + \log \log t \\ (93) \quad &= a_{64} + \log \log t. \end{aligned}$$

In der Formel (43) des Satzes (I)

$$(43) \quad |\Re F(s)| \leq |\beta| \frac{r + \rho}{r - \rho} + 2A \frac{\rho}{r - \rho} \quad (|s - s_0| \leq \rho < r)$$

setze ich nun

$$\begin{aligned} F(s) &= \log \zeta(s), \\ s_0 &= 1 + \frac{\delta}{a \log t} + ti, \end{aligned}$$

wo

$$0 < \delta \leq 1$$

ist und δ vorläufig konstant ist, aber auch von t abhängen darf, ferner

$$(94) \quad r = \frac{\frac{1}{2} + \delta}{a \log t}$$

und werde über ρ noch später verfügen. Ich konstatiere zunächst, dass die Voraussetzungen des Satzes (I) für $t \geq t_0$ erfüllt sind, wo t_0 absolut konstant und auch von δ unabhängig ist. Denn für alle hinreichend grossen t_0 gehört der Kreis

$$\left| s - \left(1 + \frac{\delta}{a \log t} + ti \right) \right| = |s - s_0| \leq r = \frac{\frac{1}{2} + \delta}{a \log t}$$

ganz dem Gebiete (92) an, d. h. jeder Punkt $u+vi$ dieses Kreises erfüllt die Beziehungen

$$(95) \quad v \geq 2, \quad 1 - \frac{1}{a} \frac{1}{\log v} \leq u.$$

In der Tat ist die kleinstmögliche Ordinate

$$\begin{aligned} v &\geq t - \frac{\frac{1}{2} + \delta}{a \log t} \\ &\geq t - \frac{3}{2a \log t}, \end{aligned}$$

also für alle hinreichend grossen t grösser als 2; ferner ist die kleinstmögliche Abszisse

$$\begin{aligned} u &\geq 1 + \frac{\delta}{a \log t} - \frac{\frac{1}{2} + \delta}{a \log t} \\ &= 1 - \frac{1}{2a \log t} \end{aligned}$$

und wegen

$$\begin{aligned} v &\leq t + \frac{\frac{1}{2} + \delta}{a \log t} \\ &\leq t + \frac{3}{2a \log t} \end{aligned}$$

ist

$$1 - \frac{1}{a \log v} \leq 1 - \frac{1}{a \log \left(t + \frac{3}{2a \log t} \right)};$$

da für alle hinreichend grossen t

$$\frac{1}{\log \left(t + \frac{3}{2a \log t} \right)} > \frac{1}{2 \log t}$$

ist, sind die Relationen (95) für $t \geq t_0$ erfüllt. (43) ist also für $t \geq t_0$ anwendbar, und auf der rechten Seite darf

$$(96) \quad A = a_{65} + \log \log t$$

gesetzt werden; denn nach (93) ist für $t \geq t_0$ auf dem Kreise $|s - s_0| = r$

$$\begin{aligned} \Re F(s) &< a_{64} + \log \log \left(t + \frac{3}{2a \log t} \right) \\ &< a_{65} + \log \log t. \end{aligned}$$

Was die Grösse $|\beta|$ in (43) betrifft, so ist hier

$$\begin{aligned} |\beta| &= |\Re F(s_0)| \\ &\leq |F(s_0)| \\ &= \left| \log \zeta \left(1 + \frac{\delta}{a \log t} + ti \right) \right| \\ (97) \quad &\leq \log \zeta \left(1 + \frac{\delta}{a \log t} \right). \end{aligned}$$

Nun ist für $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{a \log t_0}$

$$\zeta(1 + \varepsilon) < \frac{a_{66}}{\varepsilon},$$

$$\log \zeta(1 + \varepsilon) < a_{67} + \log \frac{1}{\varepsilon}.$$

Aus (97) folgt also

$$\begin{aligned} |\beta| &< a_{67} + \log \frac{a \log t}{\delta} \\ (98) \quad &= a_{68} + \log \frac{1}{\delta} + \log \log t. \end{aligned}$$

(43) liefert unter Benutzung von (96) und (98) für $t \geq t_0$, $|s - s_0| \leq \rho$, wo $0 < \rho < r$ ist und r den Wert (94) hat,

$$(99) \quad |\Re F(s)| < \left(a_{68} + \log \frac{1}{\delta} + \log \log t \right) \frac{r + \rho}{r - \rho} + 2(a_{65} + \log \log t) \frac{\rho}{r - \rho}.$$

Hierin waren a_{65} und a_{68} von t , ρ und δ unabhängig. Ich nehme nun zunächst das positive $\delta (\leq 1)$ als konstant an. Dann schreibt sich (99) einfacher so:

$$(100) \quad |\Re F(s)| < (a_{69} + \log \log t) \frac{r + \rho}{r - \rho} + 2(a_{65} + \log \log t) \frac{\rho}{r - \rho}.$$

Es war

$$(94) \quad r = \frac{\frac{1}{2} + \delta}{a \log t};$$

ich setze

$$\rho = \frac{\delta}{a \log t}.$$

Dann gilt (100) speziell im Punkte $s = 1 + ti$, der den Abstand ρ von s_0 hat, und ich erhalte für $t \geq t_0$

$$\begin{aligned} |\Re F(1 + ti)| &< (a_{69} + \log \log t) \frac{\frac{1}{2} + 2\delta}{\frac{1}{2}} + 2(a_{65} + \log \log t) \frac{\delta}{\frac{1}{2}} \\ &= (1 + 8\delta) \log \log t + a_{70}; \end{aligned}$$

für $t \geq t_1$ ist also

$$\begin{aligned} |\Re F(1 + ti)| &< (1 + 8\delta) \log \log t + \delta \log \log t \\ &= (1 + 9\delta) \log \log t, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log |\zeta(1 + ti)| &= \Re \log \zeta(1 + ti) \\ &= \Re F(1 + ti) \\ &> -(1 + 9\delta) \log \log t, \end{aligned}$$

$$|\zeta(1 + ti)| > \frac{1}{\log^{1+9\delta} t}.$$

Wird

$$9\delta = \varepsilon$$

gesetzt, so ist also bewiesen ⁵⁶⁾: Nach Annahme von $\varepsilon > 0$ gibt es ein $t_1 = t_1(\varepsilon)$, so dass für alle $t \geq t_1$

$$|\zeta(1 + ti)| > \frac{1}{\log^{1+\varepsilon} t}$$

⁵⁶⁾ Daraus, dass die Behauptung für ein ε gilt, folgt sie natürlich auch für jeden grösseren Wert. Mit $0 < \delta \leq 1$, d. h. $0 < \varepsilon \leq 9$ ist sie also für alle $\varepsilon > 0$ bewiesen; im Übrigen war sie ja auf elementarerem Wege im § 3 für $\varepsilon = 5$, also alle $\varepsilon \geq 5$ schon nachgewiesen.

ist. Anders ausgedrückt: Nach Annahme von $\varepsilon > 0$ gibt es ein $b = b(\varepsilon)$, so dass für $t \geq 2$

$$|\zeta(1 + ti)| > \frac{1}{b} \frac{1}{\log^{1+\varepsilon} t}$$

ist.

§ 8.

Ich kehre jetzt zur Ungleichung (99) zurück, in welcher a_{65} und a_{68} von δ unabhängig waren, und welche für $t \geq t_0$ galt, wo auch t_0 von δ unabhängig ist. Es war nur

$$0 < \delta \leq 1$$

erforderlich. Ich werde über δ als Funktion von t noch verfügen und setze auch hier

$$\rho = \frac{\delta}{a \log t}.$$

Dann liefert (99) speziell im Punkte $s_0 = 1 + ti$ für $t \geq t_0$

$$\begin{aligned} |\Re F(1 + ti)| &< \left(a_{68} + \log \frac{1}{\delta} + \log \log t \right) (1 + 4\delta) + 2(a_{65} + \log \log t) 2\delta \\ &\leq a_{68}(1 + 4) + \log \frac{1}{\delta} + 4\delta \log \frac{1}{\delta} + \log \log t \cdot (1 + 4\delta) + 2a_{65} \cdot 2 + 4\delta \log \log t, \end{aligned}$$

also wegen

$$\delta \log \frac{1}{\delta} < a_{71}$$

$$\begin{aligned} |\Re F(1 + ti)| &< (1 + 8\delta) \log \log t + \log \frac{1}{\delta} + 5a_{68} + 4a_{71} + 4a_{65} \\ &= (1 + 8\delta) \log \log t + \log \frac{1}{\delta} + a_{72}. \end{aligned}$$

Nunmehr setze ich

$$\delta = \frac{1}{\log \log t},$$

was wirklich von einem gewissen t an kleiner als 1 ist. Für $t \geq t_1$ erhalte ich daher

$$\begin{aligned} |\Re F(1 + ti)| &< \log \log t + 8 + \log \log \log t + a_{72}, \\ \log |\zeta(1 + ti)| &> -\log \log t - \log \log \log t - a_{73}, \end{aligned}$$

$$|\zeta(1 + ti)| > \frac{1}{a_{74}} \frac{1}{\log t \cdot \log \log t}.$$

Für $t \geq 3$ ist also

$$|\zeta(1 + ti)| > \frac{1}{a_{75}} \frac{1}{\log t \cdot \log \log t},$$

d. h. ich habe bewiesen, dass

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \log t \cdot \log \log t |\zeta(1 + ti)| > 0$$

ist.

§ 9.

Ich schicke nunmehr zwei allgemeine Grenzwertsätze über reelle Funktionen voraus, denen ich in der Literatur nicht begegnet bin ⁵⁷⁾.

SATZ (III). — Die reelle Funktion $\varphi(x)$ sei für $x > x_0$ definiert, stetig und differenzierbar; $x\varphi'(x)$ wachse monoton mit x , d. h. für $x_0 < x_1 < x_2$ sei

$$x_1 \varphi'(x_1) \leq x_2 \varphi'(x_2).$$

Es sei ferner

$$(101) \quad \lim_{x=\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = 1.$$

Dann existiert

$$\lim_{x=\infty} \varphi'(x),$$

und es ist

$$(102) \quad \lim_{x=\infty} \varphi'(x) = 1.$$

Beweis: Nach Voraussetzung ist $\varphi'(x)$ für alle hinreichend grossen positiven x positiv; denn sonst wäre, da $x\varphi'(x)$ monoton wächst, $x\varphi'(x)$ für $x > x_0$ negativ, also $\varphi'(x)$ für alle positiven $x > x_0$ negativ, was mit (101) nicht verträglich ist.

Es sei $\delta > 0$ gegeben. Dann ist nach Voraussetzung

$$\lim_{x=\infty} \frac{\varphi(x)}{\delta x} = \frac{1}{\delta}$$

und

$$\begin{aligned} \lim_{x=\infty} \frac{\varphi(x + \delta x)}{\delta x} &= \lim_{x=\infty} \frac{x + \delta x}{\delta x} \frac{\varphi(x + \delta x)}{x + \delta x} \\ &= \frac{1 + \delta}{\delta}, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \lim_{x=\infty} \frac{\varphi(x + \delta x) - \varphi(x)}{\delta x} &= \frac{1 + \delta}{\delta} - \frac{1}{\delta} \\ (103) \quad &= 1. \end{aligned}$$

Nun ist nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung, wenn g die untere, G die obere Grenze ⁵⁸⁾ von $\varphi'(y)$ für $x \leq y \leq x + \delta x$ ist,

$$(104) \quad g \leq \frac{\varphi(x + \delta x) - \varphi(x)}{\delta x} \leq G.$$

⁵⁷⁾ Dort pflegt umgekehrt unter gewissen Voraussetzungen von (102) auf (101) bzw. von (112) auf (111) geschlossen zu werden. Man kann die beiden Sätze (III) und (IV) viel allgemeiner fassen; ich ziehe aber vor, sie gerade so zu formulieren, wie ich sie für das Folgende am bequemsten gebrauchen kann.

⁵⁸⁾ Um auf den Beweis des Satzes (IV) vorzubereiten, habe ich hier die Grössen g und G eingeführt; natürlich kann man hier statt dessen auch schliessen:

$$\frac{\varphi(x + \delta x) - \varphi(x)}{\delta x} = \varphi'(x + \xi \delta x) \quad (0 < \xi < 1)$$

Nach Voraussetzung ist ferner für $x \leq y \leq x + \delta x$

$$x\varphi'(x) \leq y\varphi'(y) \leq (x + \delta x)\varphi'(x + \delta x).$$

Wird $a > 0$ so gewählt, dass

$$\varphi'(a) > 0$$

ist, so ist also für $x \geq a$ und $x \leq y \leq x + \delta x$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + \delta} \varphi'(x) &= \frac{x}{x + \delta x} \varphi'(x) \leq \frac{x}{y} \varphi'(x) \leq \varphi'(y) \\ &\leq \frac{x + \delta x}{y} \varphi'(x + \delta x) \leq \frac{x + \delta x}{x} \varphi'(x + \delta x) = (1 + \delta) \varphi'(x + \delta x), \end{aligned}$$

also für $x \geq a$

$$(105) \quad \frac{1}{1 + \delta} \varphi'(x) \leq g \leq G \leq (1 + \delta) \varphi'(x + \delta x).$$

Aus (104) und (105) folgt für $x \geq a$

$$(106) \quad \frac{1}{1 + \delta} \varphi'(x) \leq \frac{\varphi(x + \delta x) - \varphi(x)}{\delta x} \leq (1 + \delta) \varphi'(x + \delta x).$$

Nach (103) ist nun für alle $x \geq \xi_1 = \xi_1(\delta)$

$$(107) \quad \frac{1}{1 + \delta} < \frac{\varphi(x + \delta x) - \varphi(x)}{\delta x} < 1 + \delta;$$

aus (106) und (107) ergibt sich also für alle $x \geq \xi_2 = \xi_2(\delta)$

$$\frac{1}{1 + \delta} \varphi'(x) < 1 + \delta$$

und

$$\frac{1}{1 + \delta} < (1 + \delta) \varphi'(x + \delta x),$$

folglich

$$(108) \quad \varphi'(x) < (1 + \delta)^2$$

und

$$(109) \quad \frac{1}{(1 + \delta)^2} < \varphi'(x + \delta x).$$

Wird in (109) x statt $x + \delta x = (1 + \delta)x$ geschrieben, so ist also für $x \geq (1 + \delta)\xi_2$

$$(110) \quad \frac{1}{(1 + \delta)^2} < \varphi'(x).$$

Aus (108) und (110) folgt für alle $x \geq \xi_3 = \xi_3(\delta)$

$$\frac{1}{(1 + \delta)^2} < \varphi'(x) < (1 + \delta)^2,$$

d. h. es ist

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi'(x) = 1,$$

was zu beweisen war.

Für das auf der rechten Seite des Gleichungssystems (114) auftretende $\varphi'(\eta_\lambda)$ ergibt sich also ($\lambda = 0, 1, 2, \dots, \nu$)

$$\frac{1}{1+\delta} \varphi'_+(x) \leq \varphi'(\eta_\lambda) = \varphi'_+(\eta_\lambda) \leq (1+\delta) \varphi'_+(x+\delta x).$$

Aus (114) folgt also durch Addition

$$\varphi(x+\delta x) - \varphi(x) \leq (x+\delta x - x)(1+\delta) \varphi'_+(x+\delta x)$$

und

$$\varphi(x+\delta x) - \varphi(x) \geq (x+\delta x - x) \frac{1}{1+\delta} \varphi'_+(x),$$

d. h.

$$(115) \quad \frac{1}{1+\delta} \varphi'_+(x) \leq \frac{\varphi(x+\delta x) - \varphi(x)}{\delta x} \leq (1+\delta) \varphi'_+(x+\delta x).$$

Aus (113) und (115) folgt für alle $x \geq \xi_2 = \xi_2(\delta)$

$$\frac{1}{1+\delta} \varphi'_+(x) < 1+\delta$$

und

$$\frac{1}{1+\delta} < (1+\delta) \varphi'_+(x+\delta x),$$

also für alle $x \geq \xi_3 = \xi_3(\delta)$

$$\frac{1}{(1+\delta)^2} < \varphi'_+(x) < (1+\delta)^2,$$

womit (112) bewiesen ist.

Aus den Sätzen (III) und (IV) ergibt sich der

SATZ (V). — Es sei

$$c_n \geq 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

und λ eine ganze ⁵⁹⁾ Zahl ≥ 0 . Es sei

$$(116) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \frac{1}{(\lambda+1)!} \sum_{n=1}^x c_n \log^{\lambda+1} \left(\frac{x}{n} \right) = 1.$$

Dann existiert

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \frac{1}{\lambda!} \sum_{n=1}^x c_n \log^\lambda \left(\frac{x}{n} \right),$$

und es ist

$$(117) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \frac{1}{\lambda!} \sum_{n=1}^x c_n \log^\lambda \left(\frac{x}{n} \right) = 1.$$

Im Falle $\lambda=0$ ist hierbei unter $\log^\lambda \left(\frac{x}{n} \right)$ der Wert 1 zu verstehen, auch für $n=x$.

Durch wiederholte Anwendung dieses Satzes ergibt sich: Wenn (116) für irgend

⁵⁹⁾ Übrigens gilt der folgende Beweis von (V) auch für nicht ganze positive λ , wobei $\lambda!$ durch $\Gamma(\lambda+1)$, $(\lambda+1)!$ durch $\Gamma(\lambda+2)$ zu ersetzen ist. Aber diesen allgemeineren Satz habe ich bisher in der Primzahltheorie nicht verwerten können.

ein ganzes $\lambda \geq 0$ gilt, so ist

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sum_{n=1}^x c_n = 1.$$

Beim Beweise des Satzes (V) wird für $\lambda \geq 1$ der Satz (III), für $\lambda = 0$ der schärfere Satz (IV) angewendet werden.

Beweis: Es werde zur Abkürzung für alle $x > 0$

$$\frac{1}{(\lambda + 1)!} \sum_{n=1}^x c_n \log^{\lambda+1} \left(\frac{x}{n} \right) = \varphi(x)$$

gesetzt. Für nicht ganzes x ist offenbar $\varphi(x)$ differentiierbar und

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \frac{1}{(\lambda + 1)!} \sum_{n=1}^x c_n \frac{d \log^{\lambda+1} \left(\frac{x}{n} \right)}{dx} \\ &= \frac{1}{x} \frac{1}{\lambda!} \sum_{n=1}^x c_n \log^{\lambda} \left(\frac{x}{n} \right). \end{aligned}$$

Wenn x ganzzahlig ist, so ist für $0 < h < 1$

$$\varphi(x+h) - \varphi(x) = \frac{1}{(\lambda + 1)!} \sum_{n=1}^x c_n \left(\log^{\lambda+1} \left(\frac{x+h}{n} \right) - \log^{\lambda+1} \left(\frac{x}{n} \right) \right),$$

für $0 > h > -1$

$$\varphi(x+h) - \varphi(x) = \frac{1}{(\lambda + 1)!} \sum_{n=1}^{x-1} c_n \left(\log^{\lambda+1} \left(\frac{x+h}{n} \right) - \log^{\lambda+1} \left(\frac{x}{n} \right) \right),$$

also

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow +0} \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} &= \frac{1}{x} \frac{1}{\lambda!} \sum_{n=1}^x c_n \log^{\lambda} \left(\frac{x}{n} \right), \\ \lim_{h \rightarrow -0} \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} &= \frac{1}{x} \frac{1}{\lambda!} \sum_{n=1}^{x-1} c_n \log^{\lambda} \left(\frac{x}{n} \right). \end{aligned}$$

Folglich sind für ganzzahlige x der vordere Differentialquotient $\varphi'_+(x)$ und der hintere Differentialquotient $\varphi'_-(x)$ vorhanden. Im Falle $\lambda \geq 1$ stimmen wegen

$$\log^{\lambda} \left(\frac{x}{x} \right) = 0$$

beide überein, so dass $\varphi'(x)$ für alle $x > 0$ existiert. Im Falle $\lambda = 0$ sind $\varphi'_+(x)$ und $\varphi'_-(x)$ bei denjenigen ganzzahligen x von einander verschieden, für welche

$$c_x > 0$$

ist, indem für ganze x

$$\varphi'_+(x) = \varphi'_-(x) + \frac{c_x}{x}$$

ist.

Wenn nun zunächst $\lambda \geq 1$ angenommen wird, so ist für $x > 0$ stets

$$(118) \quad \frac{1}{x} \frac{1}{\lambda!} \sum_{n=1}^x c_n \log^{\lambda} \left(\frac{x}{n} \right) = \varphi'(x);$$

also wächst $x\varphi'(x)$ monoton mit wachsendem x , da dies von der Summe links gilt;

da nach der Voraussetzung (116)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi(x)}{x} = 1$$

ist, so ist der Satz (III) anwendbar und liefert

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi'(x) = 1,$$

womit wegen (118) die Behauptung (117) bewiesen ist.

Wenn $\lambda = 0$ ist, so ist für alle $x > 0$

$$\frac{1}{x} \sum_{n=1}^x c_n = \varphi'_+(x);$$

$x\varphi'_+(x)$ wächst also monoton mit x ; da alle Voraussetzungen des Satzes (IV) erfüllt sind, ist er anwendbar und ergibt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi'_+(x) = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sum_{n=1}^x c_n = 1,$$

womit (117) auch im Falle $\lambda = 0$ bewiesen ist.

Aus dem Satz (V) erschliesse ich jetzt den

SATZ (VI). — Es sei

$$b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$$

eine Folge reeller Zahlen mit endlicher unterer Grenze, d. h.

$$(119) \quad b_n \geq -g, \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

wo g eine positive Konstante ist; es sei λ eine ganze Zahl ≥ 0 . Es sei ferner

$$(120) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sum_{n=1}^x b_n \log^{\lambda+1} \left(\frac{x}{n} \right) = 0.$$

Dann existiert

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sum_{n=1}^x b_n,$$

und es ist

$$(121) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sum_{n=1}^x b_n = 0.$$

Beweis: Bekanntlich ist für ganzzahliges $\lambda \geq 0$

$$(122) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sum_{n=1}^x \log^{\lambda+1} \left(\frac{x}{n} \right) = (\lambda + 1)!.$$

Denn die für $x \geq 1$ wegen des monotonen Abnehmens von $\log^{\lambda+1} \left(\frac{x}{u} \right)$ mit wachsendem u ($1 \leq u \leq x$) giltigen Ungleichungen

$$\int_1^{[x]} \log^{\lambda+1} \left(\frac{x}{u} \right) du \leq \sum_{n=1}^x \log^{\lambda+1} \left(\frac{x}{n} \right) \leq \log^{\lambda+1} x + \int_1^{[x]} \log^{\lambda+1} \left(\frac{x}{u} \right) du$$

liefern

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^x \log^{\lambda+1} \left(\frac{x}{n} \right) &= O(\log^{\lambda+1} x) + \int_1^{[x]} \log^{\lambda+1} \left(\frac{x}{u} \right) du \\
 &= O(\log^{\lambda+1} x) + \int_1^x \log^{\lambda+1} \left(\frac{x}{u} \right) du \\
 &= O(\log^{\lambda+1} x) - x \int_x^1 \log^{\lambda+1} v \frac{dv}{v^2} \\
 &= O(\log^{\lambda+1} x) + x \int_1^x \log^{\lambda+1} v \frac{dv}{v^2}, \\
 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sum_{n=1}^x \log^{\lambda+1} \left(\frac{x}{n} \right) &= \int_1^\infty \log^{\lambda+1} v \frac{dv}{v^2} \\
 &= \int_0^\infty e^{-w} w^{\lambda+1} dw \\
 &= \Gamma(\lambda + 2) \\
 &= (\lambda + 1)!.
 \end{aligned}$$

Aus (120) und (122) folgt, wenn

$$\frac{b_n}{g} + 1 = c_n$$

gesetzt wird,

$$\begin{aligned}
 &\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \frac{1}{(\lambda + 1)!} \sum_{n=1}^x c_n \log^{\lambda+1} \left(\frac{x}{n} \right) \\
 &= \frac{1}{g} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \frac{1}{(\lambda + 1)!} \sum_{n=1}^x b_n \log^{\lambda+1} \left(\frac{x}{n} \right) + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \frac{1}{(\lambda + 1)!} \sum_{n=1}^x \log^{\lambda+1} \left(\frac{x}{n} \right) \\
 &= 1;
 \end{aligned}$$

da nach (119)

$$c_n \geq 0$$

ist, ergibt der Satz (V)

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sum_{n=1}^x c_n &= 1, \\
 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{g} \sum_{n=1}^x b_n + [x] \right) &= 1, \\
 (121) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sum_{n=1}^x b_n &= 0,
 \end{aligned}$$

was zu beweisen war.

Ich komme jetzt zu einem für meine Zwecke sehr wichtigen Grenzwertsatz über Integrale analytischer Funktionen:

SATZ (VII).—Es sei $\psi(s)$ eine analytische Funktion, welche für alle endlichen s mit dem reellen Teil 1 regulär und so beschaffen ist, dass das über die unendliche Gerade von $1 - \infty i$ bis $1 + \infty i$ erstreckte Integral

$$\int_{1-\infty i}^{1+\infty i} \psi(s) ds$$

absolut konvergiert, d. h. dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(1 + ti)| dt$$

konvergiert. x bezeichne eine positive Grösse, x^s die ganze transzendente Funktion $e^{s \log x}$, wo $\log x$ den reellen Wert des Logarithmus bedeutet. Dann ist bei geradlinigem Integrationsweg

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_{1-\infty i}^{1+\infty i} x^s \psi(s) ds = 0,$$

d. h. es ist

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^{ti} \psi(1+ti) dt = 0.$$

Beweis: Die (absolute) Konvergenz von

$$\int_{1-\infty i}^{1+\infty i} x^s \psi(s) ds$$

steht jedenfalls fest, da

$$|x^{1+ti}| = x$$

ist. Das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x} |x^{1+ti} \psi(1+ti)| dt$$

ist aus demselben Grunde für alle $x > 0$ gleichmässig konvergent. Wenn $\delta > 0$ gegeben ist, gibt es also ein $T = T(\delta)$, so dass für alle $x > 0$

$$(123) \quad \left| \frac{1}{x} \int_{1-\infty i}^{1+\infty i} x^s \psi(s) ds - \frac{1}{x} \int_{1-Ti}^{1+Ti} x^s \psi(s) ds \right| < \delta$$

ist; denn es ist eben die linke Seite von (123)

$$\begin{aligned} &= \left| i \int_{-\infty}^{-T} x^{ti} \psi(1+ti) dt + i \int_T^{\infty} x^{ti} \psi(1+ti) dt \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{-T} |\psi(1+ti)| dt + \int_T^{\infty} |\psi(1+ti)| dt, \end{aligned}$$

was unabhängig von x für alle hinreichend grossen T beliebig klein ist.

Da $\psi(s)$ für $s = 1+ti$, $-T \leq t \leq T$ regulär ist, gibt es ein Rechteck

$$(124) \quad 1-\varepsilon \leq \sigma \leq 1, \quad -T \leq t \leq T,$$

in welchem $\psi(s)$, also auch $x^s \psi(s)$ für jedes $x > 0$ regulär ist. Seine (positive) Dicke ε wähle ich so klein ($\varepsilon = \varepsilon(\delta)$), dass

$$(125) \quad \int_{1-\varepsilon}^1 |\psi(\sigma+Ti)| d\sigma < \delta$$

und

$$(126) \quad \int_{1-\varepsilon}^1 |\psi(\sigma-Ti)| d\sigma < \delta$$

ist.

Ich wende nun den CAUCHY'schen Integralsatz auf den Integranden $x^s \psi(s)$ und die Begrenzung des Rechtecks (124) an. Dann ergibt sich bei geradlinigen Integrationswegen

$$\int_{1-Ti}^{1+Ti} x^s \psi(s) ds = \int_{1-Ti}^{1-\varepsilon-Ti} x^s \psi(s) ds + \int_{1-\varepsilon-Ti}^{1-\varepsilon+Ti} x^s \psi(s) ds + \int_{1-\varepsilon+Ti}^{1+Ti} x^s \psi(s) ds,$$

also wegen (125) und (126) für alle $x \geq 1$

$$\begin{aligned} \left| \int_{1-Ti}^{1+Ti} x^s \psi(s) ds \right| &\leq x \int_{1-\varepsilon}^{\varepsilon} |\psi(\sigma - Ti)| d\sigma + x^{1-\varepsilon} \int_{-T}^T |\psi(1-\varepsilon+ti)| dt + x \int_{1-\varepsilon}^{\varepsilon} |\psi(\sigma + Ti)| d\sigma \\ &< x^{1-\varepsilon} \int_{-T}^T |\psi(1-\varepsilon+ti)| dt + 2\delta x, \\ \left| \frac{1}{x} \int_{1-Ti}^{1+Ti} x^s \psi(s) ds \right| &< x^{-\varepsilon} \int_{-T}^T |\psi(1-\varepsilon+ti)| dt + 2\delta, \end{aligned}$$

also nach (123) für alle $x \geq 1$

$$(127) \quad \left| \frac{1}{x} \int_{1-\infty i}^{1+\infty i} x^s \psi(s) ds \right| < x^{-\varepsilon} \int_{-T}^T |\psi(1-\varepsilon+ti)| dt + 3\delta.$$

Hierin hängen T und ε nur von δ ab, also $\int_{-T}^T |\psi(1-\varepsilon+ti)| dt$ desgleichen. Für alle x von einer gewissen Stelle ab ($x \geq \xi = \xi(\delta)$) ist also

$$x^{-\varepsilon} \int_{-T}^T |\psi(1-\varepsilon+ti)| dt < \delta,$$

also nach (127)

$$\left| \frac{1}{x} \int_{1-\infty i}^{1+\infty i} x^s \psi(s) ds \right| < 4\delta,$$

womit der Satz (VII) bewiesen ist.

Ich gebrauche im Folgenden noch eine spezielle bekannte Integralformel ⁶⁰⁾: Wenn $x > 0$ ist, ν eine ganze Zahl ≥ 2 bezeichnet, $a > 0$ ist und über die ganze vertikale Gerade $a - \infty i \dots a + \infty i$ integriert wird, so ist

$$(128) \quad \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{x^s}{s^\nu} ds \begin{cases} = 0 & \text{für } 0 < x \leq 1, \\ = \frac{2\pi i}{(\nu-1)!} \log^{\nu-1} x & \text{für } x \geq 1. \end{cases}$$

Die (absolute) Konvergenz des Integrals steht wegen

$$\left| \frac{x^{a+ti}}{(a+ti)^\nu} \right| < \frac{x^a}{|t|^\nu} \quad (t \geq 0)$$

von vornherein fest, und es handelt sich darum, festzustellen, dass

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{a-ri}^{a+ri} \frac{x^s}{s^\nu} ds$$

den durch die rechten Seiten von (128) angegebenen Wert hat.

1) Wenn $x \geq 1$ ist, werde $r > a$ angenommen und von $a - ri$ bis $a + ri$ statt über den geraden Weg über den Halbkreis

$$s = a + re^{\varphi i}, \quad \frac{3\pi}{2} \geq \varphi \geq \frac{\pi}{2}$$

⁶⁰⁾ Dieselbe ist schon von Herrn HADAMARD in der Primzahltheorie verwendet worden; vergl. S. 211 seiner in Anm. 1) zitierten Arbeit.

integriert. Nach dem CAUCHY'schen Integralsatz ist, da der Integrand im Punkte $s = 0$ einen Pol mit dem Residuum $\frac{\log^{v-1} x}{(v-1)!}$ hat und sonst regulär ist, das geradlinige Integral

$$(129) \quad \int_{a-ri}^{a+ri} \frac{x^s}{s^v} ds = \frac{2\pi i}{(v-1)!} \log^{v-1} x + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^{a+re^{\varphi i}}}{(a+re^{\varphi i})^v} r i e^{\varphi i} d\varphi.$$

Nun ist wegen

$$x \geq 1, \quad \cos \varphi \leq 0 \\ x^{r \cos \varphi} \leq 1,$$

also

$$\left| \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^{a+re^{\varphi i}}}{(a+re^{\varphi i})^v} r i e^{\varphi i} d\varphi \right| < r \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^{a+r \cos \varphi}}{(r-a)^v} d\varphi \\ \leq \frac{r}{(r-a)^v} \pi x^a,$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^{a+re^{\varphi i}}}{(a+re^{\varphi i})^v} r i e^{\varphi i} d\varphi = 0,$$

also nach (129)

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{a-ri}^{a+ri} \frac{x^s}{s^v} ds = \frac{2\pi i}{(v-1)!} \log^{v-1} x.$$

2) Wenn $0 < x \leq 1$ ist, werde von $a-ri$ bis $a+ri$ statt über den geraden Weg über den Halbkreis

$$s = a + re^{\varphi i}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

integriert. Da der Integrand zwischen beiden Wegen regulär ist, ergibt der CAUCHY'sche Satz

$$\int_{a-ri}^{a+ri} \frac{x^s}{s^v} ds = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^{a+re^{\varphi i}}}{(a+re^{\varphi i})^v} r i e^{\varphi i} d\varphi;$$

wegen

$$0 < x \leq 1, \quad \cos \varphi \geq 0$$

ist auch hier

$$x^{r \cos \varphi} \leq 1,$$

also

$$\left| \int_{a-ri}^{a+ri} \frac{x^s}{s^v} ds \right| < r \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^{a+r \cos \varphi}}{r^v} d\varphi \\ \leq \frac{1}{r^{v-1}} \pi x^a,$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{a-ri}^{a+ri} \frac{x^s}{s^v} ds = 0,$$

womit (128) vollständig bewiesen ist.

§ 10.

Eines der Hauptziele der vorliegenden Arbeit bildet der
SATZ (VIII). — Es habe die DIRICHLET'sche Reihe

$$(130) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s}$$

mit reellen Koeffizienten b_n ein Konvergenzgebiet, d. h. es sei

$$(131) \quad b_n = O(x^c) \quad (c \text{ konstant}).$$

Es sei ferner die untere Grenze von b_n endlich, d. h. für alle n

$$b_n \geq -g \quad (g \text{ konstant}).$$

Es sei die im Konvergenzgebiet durch (130) definierte Funktion $f(s)$ für $\Re(s) \geq 1$ regulär und erfülle für $t \geq 1$, $\sigma \geq 1$ die Ungleichung

$$(132) \quad |f(s)| < B t^k \quad (B \text{ und } k \text{ konstant}).$$

Dann existiert der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_x}{x},$$

und es ist

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_x}{x} = 0.$$

Beweis: Da mehrere hier anzuwendende Kunstgriffe im vorigen Paragraphen als besondere Hilfssätze vorausgeschickt worden sind, wird der eigentliche Beweis des Satzes (VIII) ziemlich kurz sein. c darf ≥ 0 angenommen werden, da sonst der Satz trivial ist; ebenso darf $k \geq 0$ angenommen werden, da sonst (132) a fortiori für $k=0$ gilt.

Die Reihe (130) ist nach der Voraussetzung (131) für $\Re(s) > c + 1$ absolut konvergent. Es werde $\gamma > c + 1$ gewählt⁶¹⁾; dann ist

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s}$$

für $\Re(s) = \gamma$ absolut konvergent. ν sei irgend eine ganze Zahl $> k + 1$; dann ist auch das geradlinige Integral

$$(133) \quad \int_{\gamma - \infty i}^{\gamma + \infty i} \frac{x^s}{s^\nu} f(s) ds = \int_{\gamma - \infty i}^{\gamma + \infty i} \frac{x^s}{s^\nu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s} ds$$

wo $x > 0$ ist, absolut konvergent; denn ν ist > 1 , und $|f(s)|$ liegt für $s = \gamma + ti$ unterhalb einer von t unabhängigen Schranke. Auch wenn in

$$\frac{x^s}{s^\nu} f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^s}{s^\nu} \frac{b_n}{n^s}$$

jedes Glied durch seinen absoluten Betrag ersetzt wird, ist das Integral

$$\int_{\gamma - \infty i}^{\gamma + \infty i} \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{x^s}{s^\nu} \frac{b_n}{n^s} \right| |ds|$$

⁶¹⁾ Die spezielle Wahl $\gamma = c + 2$ würde genügen.

konvergent, da für $s = \gamma + ti$, $t \geq 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{x^s}{s^v} \frac{b_n}{n^s} \right| \leq \frac{x^\gamma}{|t|^v} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|b_n|}{n^\gamma}$$

ist. Auf der rechten Seite von (133) darf also die Summation mit der Integration vertauscht werden, und es ergibt sich bei geradlinigem Integrationsweg

$$\int_{\gamma - \infty i}^{\gamma + \infty i} \frac{x^s}{s^v} f(s) ds = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{\gamma - \infty i}^{\gamma + \infty i} \left(\frac{x}{n} \right)^s \frac{ds}{s^v},$$

also, da nach (128) für $n \geq x$ das Integral

$$\int_{\gamma - \infty i}^{\gamma + \infty i} \left(\frac{x}{n} \right)^s \frac{ds}{s^v}$$

verschwindet und für $n \leq x$ den Wert

$$\frac{2\pi i}{(v-1)!} \log^{v-1} \left(\frac{x}{n} \right)$$

hat,

$$(134) \quad \int_{\gamma - \infty i}^{\gamma + \infty i} \frac{x^s}{s^v} f(s) ds = \frac{2\pi i}{(v-1)!} \sum_{n=1}^x b_n \log^{v-1} \left(\frac{x}{n} \right).$$

Andererseits ist das über die vertikale Gerade $1 - \infty i \dots 1 + \infty i$ erstreckte Integral

$$(135) \quad \int_{1 - \infty i}^{1 + \infty i} \frac{x^s}{s^v} f(s) ds$$

auch absolut konvergent, da nach Voraussetzung für $\sigma = 1$ nebst $t \geq 1$ und $t \leq -1$

$$|f(s)| < B|t|^k,$$

also

$$\begin{aligned} \left| \frac{x^s}{s^v} f(s) \right| &< \frac{Bx}{|t|^v} |t|^k \\ &= \frac{Bx}{|t|^{v-k}} \end{aligned}$$

ist und $v > k + 1$ gewählt war. Ferner stimmt der Wert von (135) mit dem der linken Seite von (134) überein; denn, wenn der CAUCHY'sche Satz auf das Rechteck mit den Ecken $\gamma - Ti$, $\gamma + Ti$, $1 + Ti$, $1 - Ti$ angewendet wird, in welchem nach

Voraussetzung $f(s)$, also auch $\frac{x^s}{s^v} f(s)$ regulär ist, so ergibt sich

$$\int_{1-Ti}^{1+Ti} \frac{x^s}{s^v} f(s) ds - \int_{\gamma-Ti}^{\gamma+Ti} \frac{x^s}{s^v} f(s) ds = \int_{1-Ti}^{\gamma-Ti} \frac{x^s}{s^v} f(s) ds + \int_{\gamma+Ti}^{1+Ti} \frac{x^s}{s^v} f(s) ds,$$

also für $T \geq 1$, $x \geq 1$

$$\left| \int_{1-Ti}^{1+Ti} \frac{x^s}{s^v} f(s) ds - \int_{\gamma-Ti}^{\gamma+Ti} \frac{x^s}{s^v} f(s) ds \right| < \frac{(\gamma-1)x^\gamma}{T^v} B T^k + \frac{(\gamma-1)x^\gamma}{T^v} B T^k,$$

wo die rechte Seite mit unendlich wachsendem T gegen 0 konvergiert. Es ist also

$$(136) \quad \frac{2\pi i}{(v-1)!} \sum_{n=1}^x b_n \log^{v-1} \left(\frac{x}{n} \right) = \int_{1-\infty i}^{1+\infty i} \frac{x^s}{s^v} f(s) ds.$$

Nun ergibt der Satz (VII), wenn er auf

$$\psi(s) = \frac{f(s)}{s^v}$$

angewendet wird, da

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(1+ti)| dt$$

hier wirklich konvergiert, dass

$$(137) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_{1-\infty i}^{1+\infty i} \frac{x^s}{s^v} f(s) ds = 0$$

ist. Aus (136) und (137) folgt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sum_{n=1}^x b_n \log^{v-1} \left(\frac{x}{n} \right) = 0$$

und hieraus nach Satz (VI)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sum_{n=1}^x b_n = 0,$$

was zu beweisen war.

Im Satz (VIII) ist der Satz

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\mathfrak{z}(x)}{x} = 1,$$

wo

$$\mathfrak{z}(x) = \sum_{p \leq x} \log p$$

ist, als Spezialfall enthalten; aber es sind erst einige Hilfsbetrachtungen nötig, um konstatieren zu können, dass hier seine Voraussetzungen erfüllt sind.

Es werde

$$b_n = \log n - 1$$

für Primzahlen,

$$b_n = -1$$

für die übrigen Zahlen gesetzt. Dann ist

$$b_n \geq g = -1$$

und

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s}$$

für $\Re(s) > 1$ absolut konvergent. Dort ist

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s} &= \sum_p \frac{\log p}{p^s} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \\ &= \sum_p \frac{\log p}{p^s} - \zeta(s) \\ &= \sum_p \frac{\log p}{p^s - 1} - \sum_p \frac{\log p}{p^s(p^s - 1)} - \zeta(s) \\ &= -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \zeta(s) - \sum_p \frac{\log p}{p^s(p^s - 1)} \\ (138) \quad &= -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \zeta(s) - g(s), \end{aligned}$$

wo $g(s)$ für $\sigma > \frac{1}{2}$ regulär ist und für $\sigma > \frac{3}{4}$ die Ungleichung

$$(139) \quad |g(s)| < a_{76}$$

erfüllt.

Nun ist für $1 \leq \sigma \leq 2$, $t \geq 2$ nach (23)

$$(140) \quad |\zeta(s)| < a_{18} \log t,$$

nach (27)

$$(141) \quad |\zeta'(s)| < a_{21} \log^2 t$$

und nach (28)

$$(142) \quad |\zeta(\sigma + ti) - \zeta(1 + ti)| \leq a_{21}(\sigma - 1) \log^2 t;$$

ferner ist nach (36) für $t \geq 2$

$$(143) \quad |\zeta(1 + ti)| > \frac{1}{a_{25}} \frac{1}{\log^6 t}.$$

Für $t \geq 2$, $1 \leq \sigma \leq 1 + \frac{\alpha}{\log^8 t}$,

wo

$$0 < \alpha \leq \log^8 2$$

und

$$\alpha \leq \frac{1}{2 a_{21} a_{25}}$$

ist, ist also nach (142) und (143)

$$\begin{aligned} |\zeta(s)| &\geq |\zeta(1 + ti)| - |\zeta(\sigma + ti) - \zeta(1 + ti)| \\ &> \frac{1}{a_{25}} \frac{1}{\log^6 t} - \frac{\alpha a_{21}}{\log^6 t} \\ &\geq \frac{1}{2 a_{25}} \frac{1}{\log^6 t}, \end{aligned}$$

also in Verbindung mit (141)

$$(144) \quad \left| \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right| < a_{77} \log^8 t.$$

Für $t \geq 2$, $\sigma \geq 1 + \frac{\alpha}{\log^8 t}$ ist, da $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ für $s = 1$ einen Pol erster Ordnung hat,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right| &\leq - \frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} \\ &\leq - \frac{\zeta' \left(1 + \frac{\alpha}{\log^8 t} \right)}{\zeta \left(1 + \frac{\alpha}{\log^8 t} \right)} \\ &< a_{78} \frac{\log^8 t}{\alpha} \end{aligned}$$

$$(145) \quad = a_{79} \log^8 t.$$

Aus (144) und (145) folgt für $t \geq 2$, $\sigma \geq 1$

$$\left| \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right| < a_{80} \log^8 t,$$

also für $t \geq 1$, $\sigma \geq 1$

$$(146) \quad \left| \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right| < a_{81} \sqrt{t}.$$

Nach (140) ist ferner für $t \geq 1$, $\sigma \geq 1$

$$(147) \quad |\zeta(s)| < a_{82} \sqrt{t},$$

nach (139) ebenda

$$(148) \quad |g(s)| < a_{76} \sqrt{t}.$$

Die für $\Re(s) > 1$ durch

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s}$$

definierte Funktion $f(s)$ ist nach (138) für $\Re(s) \geq 1$ regulär, auch im Punkte $s = 1$, da

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \zeta(s)$$

dort regulär ist, und sie genügt für $t \geq 1$, $\sigma \geq 1$ nach (146), (147) und (148) einer Ungleichung

$$\begin{aligned} |f(s)| &< a_{81} \sqrt{t} + a_{82} \sqrt{t} + a_{76} \sqrt{t} \\ &= B \sqrt{t} \end{aligned}$$

von der in Satz (VIII) verlangten Gestalt (132). Der Satz (VIII) ist also anwendbar und liefert

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sum_{n=1}^x b_n &= 0, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \left(\sum_{p \leq x} \log p - \sum_{n=1}^x 1 \right) &= 0, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\vartheta(x)}{x} &= 1, \end{aligned}$$

woraus, wie in der Einleitung angegeben ist,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x) \log x}{x} = 1$$

unmittelbar folgt.

§ 11.

Ich will nunmehr mit meinen Methoden zeigen, dass aus Herrn DE LA VALLÉE POUSSIN's Satz (dessen Beweis ich im § 6 reproduziert habe)

$$\zeta(s) \neq 0$$

für

$$(92) \quad t \geq 2, \quad 1 - \frac{1}{a} \frac{1}{\log t} \leq \sigma$$

ohne nochmalige Anwendung der Sätze über die Existenz und Verteilung der Nullstellen

von $\zeta(s)$ der Satz

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{du}{\log u} + O(xe^{-a\sqrt{\log x}}).$$

folgt.

Im Gebiete (92) genügt wegen

$$\zeta(s) \neq 0,$$

wie oben ausgerechnet wurde, die dort reguläre Funktion

$$F(s) = \log \zeta(s)$$

der Ungleichung

$$(93) \quad \Re F(s) < a_{64} + \log \log t.$$

In der Formel von Herrn CARATHÉODORY

$$(42) \quad |F(s)| \leq |\gamma| + |\beta| \frac{r+\rho}{r-\rho} + 2A \frac{\rho}{r-\rho} \quad (|s-s_0| \leq \rho < r)$$

setze ich nun

$$s_0 = 2 + ti, \quad r = 1 + \frac{1}{2a} \frac{1}{\log t}.$$

Für alle hinreichend grossen t gehört der Kreis $|s-s_0|=r$ dem Gebiete (92) an, d. h. alle seine Punkte $u + vi$ erfüllen für $t \geq t_0$ die Ungleichungen

$$v \geq 2, \quad 1 - \frac{1}{a} \frac{1}{\log v} \leq u;$$

in der Tat ist

$$t - 1 - \frac{1}{2a} \frac{1}{\log t} \leq v \leq t + 1 + \frac{1}{2a} \frac{1}{\log t},$$

also für alle hinreichend grossen t

$$v \geq 2,$$

und es ist

$$u \geq 1 - \frac{1}{2a} \frac{1}{\log t},$$

was für alle hinreichend grossen t

$$\geq 1 - \frac{1}{a} \frac{1}{\log \left(t + 1 + \frac{1}{2a} \frac{1}{\log t} \right)}$$

ist. Für $t \geq t_0$ ist also (42) anwendbar, und es kann darin nach (93)

$$A = a_{64} + \log \log \left(t + 1 + \frac{1}{2a} \frac{1}{\log t} \right)$$

gesetzt werden, was

$$< a_{83} + \log \log t$$

ist. Ferner ist in (42)

$$|\beta| \leq \log \zeta(2)$$

$$= a_{84},$$

$$|\gamma| \leq \log \zeta(2)$$

$$= a_{84}.$$

(42) ergibt also für $t \geq t_0$, $|s - 2 - ti| \leq \rho < 1 + \frac{1}{2a} \frac{1}{\log t}$

$$|F(s)| < a_{84} + a_{84} \frac{1 + \frac{1}{2a \log t} + \rho}{1 + \frac{1}{2a \log t} - \rho} + 2(a_{83} + \log \log t) \frac{\rho}{1 + \frac{1}{2a \log t} - \rho}.$$

Ich setze hierin

$$\rho = 1 + \frac{1}{3a \log t}$$

und erhalte speziell für $t \geq t_0$, $1 - \frac{1}{3a \log t} \leq \sigma \leq 2$

$$\begin{aligned} |F(s)| &< a_{84} + a_{84} \frac{2 + \frac{5}{6a \log t}}{\frac{1}{6a \log t}} + 2(a_{83} + \log \log t) \frac{1 + \frac{1}{3a \log t}}{\frac{1}{6a \log t}} \\ &< a_{85} \log t \cdot \log \log t, \end{aligned}$$

also für

$$(149) \quad t \geq 3, \quad 1 - \frac{1}{3a \log t} \leq \sigma$$

$$|F(s)| < a_{86} \log t \cdot \log \log t.$$

Für $1 - \frac{1}{6a \log t} \leq \sigma$ gehört der Kreis um s mit dem Radius $\frac{1}{12a \log t}$ dem Gebiet (149) an, wenn nur t hinreichend gross ist; denn für $t \geq t_1$ sind zwischen den Koordinaten u, v eines Kreispunktes die Ungleichungen

$$v \geq 3, \quad 1 - \frac{1}{3a \log v} \leq u$$

wegen

$$t - \frac{1}{12a \log t} \leq v \leq t + \frac{1}{12a \log t},$$

$$u \geq 1 - \frac{1}{4a \log t}$$

erfüllt. Für $t \geq t_1$, $1 - \frac{1}{6a \log t} \leq \sigma$ ist

$$\left| \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right| = |F'(s)|$$

höchstens gleich dem Quotienten des Maximums von $|F(s)|$ auf dem Kreise um s mit dem Radius $\frac{1}{12a \log t}$ durch diesen Radius, d. h. es ist

$$\begin{aligned} \left| \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right| &< \frac{a_{86} \log \left(t + \frac{1}{12a \log t} \right) \log \log \left(t + \frac{1}{12a \log t} \right)}{\frac{1}{12a \log t}} \\ &< a_{87} \log^2 t \cdot \log \log t. \end{aligned}$$

Also gibt es eine Konstante b derart, dass für $t \geq 3$, $1 - \frac{1}{b} \frac{1}{\log t} \leq \sigma$

$$(150) \quad \left| \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right| < a_{88} \log^2 t \cdot \log \log t,$$

d. h. für $t \geq 2$, $1 - \frac{1}{b} \frac{1}{\log t} \leq \sigma$

$$(151) \quad \left| \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right| < a_{89} \log^3 t$$

ist. Hierbei ist b eine beliebige Zahl $\geq 6a$; ich denke mir b so gross gewählt, dass $b \log 2 > 4$ ist und dass für $2 \geq t \geq -2$, $1 - \frac{1}{b} \frac{1}{\log 2} \leq \sigma$ die Funktion $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ bis auf den Pol $s = 1$ (mit dem Residuum -1) regulär ist ⁶²). Nach (151) ist ausserdem aus Symmetriegründen für $t \leq -2$, $1 - \frac{1}{b} \frac{1}{\log(-t)} \leq \sigma$ die Funktion $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ regulär und

$$(152) \quad \left| \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right| < a_{89} \log^3(-t).$$

Nun ist für $\Re(s) > 1$

$$\begin{aligned} \sum_p \frac{\log p}{p^s} &= -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \sum_p \frac{\log p}{p^s(p^s - 1)} \\ &= -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - g(s), \end{aligned}$$

wo $g(s)$ für $\Re(s) > \frac{1}{2}$ regulär ist und für $\Re(s) > \frac{3}{4}$ die Ungleichung

$$(139) \quad |g(s)| < a_{76}$$

erfüllt.

Die für $\Re(s) > 1$ durch

$$\sum_p \frac{\log p}{p^s}$$

definierte Funktion $f(s)$ ist also ⁶³) auf der stetigen Kurve

$$\sigma = 1 - \frac{1}{b \log(-t)} \quad \text{für } t \leq -2,$$

$$\sigma = 1 - \frac{1}{b \log 2} \quad \text{für } -2 \leq t \leq 2,$$

$$\sigma = 1 - \frac{1}{b \log t} \quad \text{für } t \geq 2$$

und rechts davon regulär bis auf den Pol erster Ordnung $s = 1$ mit dem Residuum

⁶²) Die Kenntnis der Tatsache, dass $\zeta(s)$ gar keine nicht reelle Nullstelle im Intervall $-2 \dots 2$ der Ordinate hat, ist für meinen Zweck unnötig.

⁶³) b war ja so gewählt, dass u. a. $1 - \frac{1}{b \log 2} > \frac{3}{4}$ ist.

1, und $f(s)$ genügt für $|t| \geq 2$, $\sigma \geq 1 - \frac{1}{b \log |t|}$ nach (151), (152) und (139) der Ungleichung

$$(153) \quad |f(s)| < a_{90} \log^3 |t|.$$

Nun ist bei geradlinigem Integrationsweg für $x > 0$

$$\begin{aligned} \int_{2-\infty i}^{2+\infty i} \frac{x^s}{s^2} f(s) ds &= \int_{2-\infty i}^{2+\infty i} \frac{x^s}{s^2} \sum_p \frac{\log p}{p^s} ds \\ &= \sum_p \log p \int_{2-\infty i}^{2+\infty i} \left(\frac{x}{p} \right)^s \frac{1}{s^2} ds, \end{aligned}$$

also nach (128)

$$= 2\pi i \sum_{p \leq x} \log p \log \frac{x}{p};$$

daher ist

$$\begin{aligned} \sum_{p \leq x} \log p \log \frac{x}{p} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{2-\infty i}^{2+\infty i} \frac{x^s}{s^2} f(s) ds \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{2-x^2 i}^{2+x^2 i} \frac{x^s}{s^2} f(s) ds + O \int_{x^2}^{\infty} \frac{x^2}{t^2} \log^3 t dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{2-x^2 i}^{2+x^2 i} \frac{x^s}{s^2} f(s) ds + O \left(\frac{x^2 \log^3 x}{x^2} \right) \\ (154) \quad &= \frac{1}{2\pi i} \int_{2-x^2 i}^{2+x^2 i} \frac{x^s}{s^2} f(s) ds + O(\log^3 x). \end{aligned}$$

Ich nehme $x > 10$ an; dann ist gewiss

$$2 < e^{\sqrt{\log x}} < x^2.$$

Ich ersetze den Integrationsweg $2 - x^2 i \dots 2 + x^2 i$ durch folgenden, welcher aus geraden Strecken zusammengesetzt ist: 1) Von $2 - x^2 i$ nach links bis $1 - x^2 i$, 2) nach oben bis $1 - e^{\sqrt{\log x}} i$, 3) nach links bis $1 - \frac{1}{b \sqrt{\log x}} - e^{\sqrt{\log x}} i$, 4) nach oben bis

$1 - \frac{1}{b \sqrt{\log x}} - 2i$, 5) nach links bis $1 - \frac{1}{b \log 2} - 2i$, 6) nach oben bis $1 - \frac{1}{b \log 2} + 2i$,

7) nach rechts bis $1 - \frac{1}{b \sqrt{\log x}} + 2i$, 8) nach oben bis $1 - \frac{1}{b \sqrt{\log x}} + e^{\sqrt{\log x}} i$, 9)

nach rechts bis $1 + e^{\sqrt{\log x}} i$, 10) nach oben bis $1 + x^2 i$, endlich 11) nach rechts bis $2 + x^2 i$. Offenbar begrenzt dieser Integrationsweg mit dem ursprünglichen ein Gebiet, in welchem $f(s)$ bis auf den darin liegenden Pol $s=1$ regulär ist und nach (153) auf den Teilstrecken 1), 2), 3), 4), 5), 7), 8), 9), 10), 11) die Relation (153) erfüllt. Es ist nach dem CAUCHY'schen Integralsatz, wenn die Nummerierung jenen Teilstrecken entspricht, das in (154) auftretende Integral

$$(155) \quad \int_{2-x^2 i}^{2+x^2 i} \frac{x^s}{s^2} f(s) ds = 2\pi i x + I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6 + I_7 + I_8 + I_9 + I_{10} + I_{11}.$$

Hierin ist zunächst, da die Teilstrecken 5), 6), 7) die Länge $O(1)$ haben (nämlich die Gesamtlänge $2\left(\frac{1}{b \log 2} - \frac{1}{b \sqrt{\log x}}\right) + 4 < \frac{2}{b \log 2} + 4$) und da $\frac{f(s)}{s^2}$ auf den geradlinigen Strecken $\left(1 - \frac{1}{b \log 2} - 2i \dots 1 - 2i\right)$, $\left(1 - \frac{1}{b \log 2} - 2i \dots 1 - \frac{1}{b \log 2} + 2i\right)$, $\left(1 - \frac{1}{b \log 2} + 2i \dots 1 + 2i\right)$ unterhalb einer festen (von x unabhängigen) Schranke liegt,

$$\begin{aligned} I_5 + I_6 + I_7 &= O(x^{1 - \frac{1}{b \sqrt{\log x}}}) \\ &= O(x e^{-\frac{1}{b} \sqrt{\log x}}). \end{aligned}$$

(156)

Ferner ist nach (153)

$$\begin{aligned} |I_1| &= |I_{11}| = \left| \int_1^{x^2} \frac{x^{\sigma+x^2 i}}{(\sigma+x^2 i)^2} f(\sigma+x^2 i) d\sigma \right| \\ &= O\left(\frac{x^2}{x^4} \log^3 x\right) \\ &= O\left(\frac{\log^3 x}{x^2}\right), \end{aligned}$$

(157)

$$\begin{aligned} |I_2| &= |I_{10}| = \left| \int_{e \sqrt{\log x}}^{x^2} \frac{x^{t+ti}}{(1+ti)^2} f(1+ti) dt \right| \\ &= O \int_{e \sqrt{\log x}}^{x^2} \frac{x}{t^2} \log^3 t dt \\ &= O\left(x \log^3 x \int_{e \sqrt{\log x}}^{x^2} \frac{dt}{t^2}\right) \\ &= O\left(x \log^3 x \int_{e \sqrt{\log x}}^{\infty} \frac{dt}{t^2}\right) \\ &= O(x e^{-\sqrt{\log x}} \log^3 x) \\ &= O(x e^{-\frac{1}{2} \sqrt{\log x}}) \end{aligned}$$

(158)

und

$$\begin{aligned} |I_3| &= |I_9| = \left| \int_{1 - \frac{1}{b \sqrt{\log x}}}^1 \frac{x^{\sigma+e \sqrt{\log x} i}}{(\sigma+e \sqrt{\log x} i)^2} f(\sigma+e \sqrt{\log x} i) d\sigma \right| \\ &= O\left(\frac{1}{\sqrt{\log x}} \cdot \frac{x}{e^{\frac{1}{2} \sqrt{\log x}}} \cdot (\sqrt{\log x})^3\right) \\ &= O(x e^{-\frac{1}{2} \sqrt{\log x}} \log x) \\ &= O(x e^{-\sqrt{\log x}}); \end{aligned}$$

(159)

schliesslich ist

$$\begin{aligned}
 |I_4| = |I_8| &= \left| \int_2^{e^{\sqrt{\log x}}} \frac{x^{1 - \frac{1}{b\sqrt{\log x}} + ti}}{\left(1 - \frac{1}{b\sqrt{\log x}} + ti\right)^2} f\left(1 - \frac{1}{b\sqrt{\log x}} + ti\right) dt \right| \\
 &= O\left(x^{1 - \frac{1}{b\sqrt{\log x}}} \int_2^{e^{\sqrt{\log x}}} \frac{\log^3 t}{t^2} dt\right) \\
 &= O\left(x^{1 - \frac{1}{b\sqrt{\log x}}} \int_2^{\infty} \frac{\log^3 t}{t^2} dt\right) \\
 (160) \quad &= O(x e^{-\frac{1}{b}\sqrt{\log x}}).
 \end{aligned}$$

Aus (155), (156), (157), (158), (159) und (160) folgt

$$\int_{2-x^2i}^{2+x^2i} \frac{x^s}{s^2} f(s) ds = 2\pi i x + O(x e^{-c\sqrt{\log x}}),$$

also nach (154)

$$(161) \quad \sum_{p \leq x} \log p \log \frac{x}{p} = x + O(x e^{-c\sqrt{\log x}}).$$

Unter ε verstehe ich nun ⁶⁴⁾ die für $x = \infty$ zu Null abnehmende Funktion

$$\varepsilon(x) = e^{-\frac{1}{2}c\sqrt{\log x}}.$$

Dann ist nach (161)

$$\begin{aligned}
 \sum_{p \leq x+\varepsilon x} \log p \log \frac{x+\varepsilon x}{p} &= x + \varepsilon x + O((x + \varepsilon x) e^{-c\sqrt{\log(x+\varepsilon x)}}) \\
 &= x + \varepsilon x + O(x e^{-c\sqrt{\log x}});
 \end{aligned}$$

wird hiervon (161) subtrahiert, so ergibt sich

$$\log(1 + \varepsilon) \sum_{p \leq x} \log p + \sum_{x < p \leq x+\varepsilon x} \log p \log \frac{x+\varepsilon x}{p} = \varepsilon x + O(x e^{-c\sqrt{\log x}}),$$

⁶⁴⁾ Übrigens ist der auf S. 662-663 meiner in Anm. ⁶⁾ zitierten Abhandlung ausgeführte Übergang von

$$\sum_{p \leq x} \log p \log \frac{x}{p} = x + O(x e^{-\frac{11}{\sqrt{\log x}}})$$

zu

$$\sum_{p \leq x} \log p = x + O(x e^{-\frac{12}{\sqrt{\log x}}})$$

dort nicht korrekt dargestellt. Er lässt sich durch die Substitution $(1+b)x = (1+e^{-\frac{12}{\sqrt{\log x}}})x = x'$ leicht in Ordnung bringen, ist aber am einfachsten wie der obige Übergang von (161) zu (162) zu machen. So verfuhr ich bereits auf S. 529-531 der Abhandlung *Über die Primzahlen einer arithmetischen Progression* [Sitzungsberichte der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien, mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse, Bd. CXII (1903), Abt. IIa, S. 493-535] und später stets bei den entsprechenden Problemen.

$$\begin{aligned}
 \log(1 + \varepsilon) \sum_{p \leq x} \log p &= \varepsilon x + O(x e^{-c\sqrt{\log x}}) + O \sum_{x < p \leq x + \varepsilon x} \log(x + \varepsilon x) \log \frac{x + \varepsilon x}{x} \\
 &= \varepsilon x + O(x e^{-c\sqrt{\log x}}) + O(\log x \log(1 + \varepsilon) \cdot \varepsilon x), \\
 \mathfrak{z}(x) &= \sum_{p \leq x} \log p = \frac{\varepsilon}{\log(1 + \varepsilon)} x + O\left(\frac{1}{\varepsilon} x e^{-c\sqrt{\log x}}\right) + O(\varepsilon x \log x) \\
 &= x + O(\varepsilon x) + O\left(\frac{1}{\varepsilon} x e^{-c\sqrt{\log x}}\right) + O(\varepsilon x \log x) \\
 &= x + O(x e^{-\frac{1}{2} c \sqrt{\log x}}) + O(x e^{-\frac{1}{2} c \sqrt{\log x}} \log x) \\
 (162) \quad &= x + O(x e^{-g\sqrt{\log x}}).
 \end{aligned}$$

Aus (162) folgt endlich

$$\begin{aligned}
 \pi(x) &= \sum_{p \leq x} 1 \\
 &= \sum_{n=2}^x \frac{\mathfrak{z}(n) - \mathfrak{z}(n-1)}{\log n} \\
 &= \sum_{n=2}^x \frac{1}{\log n} + \sum_{n=2}^x \frac{(\mathfrak{z}(n) - n) - (\mathfrak{z}(n-1) - (n-1))}{\log n} \\
 &= \sum_{n=2}^x \frac{1}{\log n} + \sum_{n=2}^x (\mathfrak{z}(n) - n) \left(\frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log(n+1)} \right) + \frac{\mathfrak{z}(x) - [x]}{\log([x] + 1)} \\
 &= O(1) + \int_2^x \frac{du}{\log u} + O \sum_{n=2}^x n e^{-g\sqrt{\log n}} \frac{1}{n \log^2 n} + O\left(\frac{x e^{-g\sqrt{\log x}}}{\log x}\right) \\
 &= O(1) + \int_2^x \frac{du}{\log u} + O \sum_{n=2}^x e^{-g\sqrt{\log n}} + O(x e^{-g\sqrt{\log x}}) \\
 &= \int_2^x \frac{du}{\log u} + O \int_1^{\sqrt{x}} e^{-g\sqrt{\log u}} du + O \int_{\sqrt{x}}^x e^{-g\sqrt{\log u}} du + O(x e^{-g\sqrt{\log x}}) \\
 &= \int_2^x \frac{du}{\log u} + O(\sqrt{x}) + O(x e^{-\frac{g}{\sqrt{2}} \sqrt{\log x}}) + O(x e^{-g\sqrt{\log x}}) \\
 (163) \quad &= \int_2^x \frac{du}{\log u} + O(x e^{-\alpha\sqrt{\log x}}).
 \end{aligned}$$

Ich will nun den vorangehenden Beweis etwas schärfer fassen und werde feststellen: Wenn es zu einer Konstanten a ein t_0 gibt, so dass

$$(164) \quad \zeta(s) \neq 0 \quad \text{für} \quad t \geq t_0, \quad \sigma \geq 1 - \frac{1}{a} \frac{1}{\log t}$$

ist, d. h. wenn für die nicht reellen Nullstellen $\beta_n + \gamma_n i$ von $\zeta(s)$

$$\frac{1}{a} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} (1 - \beta_n) \log |\gamma_n|$$

ist, so ergibt sich durch meine Methode (welche nicht nochmals die transzendenten Eigenschaften der Zetafunktion anwendet) die Richtigkeit der Relation

$$(163) \quad \pi(x) = \int_2^x \frac{du}{\log u} + O(x e^{-\alpha\sqrt{\log x}})$$

für jedes $\alpha < \frac{1}{2\sqrt[3]{a}}$. Herr DE LA VALLÉE POUSSIN's Methode liefert sie sogar für alle $\alpha < \frac{1}{\sqrt[3]{a}}$; aber sie ist eben nur auf Zahlklassen p anwendbar, für welche die entsprechenden analytischen Funktionen in der ganzen Ebene existieren und dort die wesentlichen Eigenschaften von $\zeta(s)$ haben. Übrigens werde ich nachher an einer anderen Stelle seiner Schlüsse einen Kunstgriff angeben, welcher gestattet, in (164) das a zu verkleinern, d. h. für

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (1 - \beta_n) \log |\gamma_n|$$

eine genauere untere Schranke anzugeben, als die Arbeit des Herrn DE LA VALLÉE POUSSIN liefert.

Um die obige Behauptung der Richtigkeit von (163) für $\alpha < \frac{1}{2\sqrt[3]{a}}$ zu beweisen, sei also (164) für ein positives Konstantenpaar t_0, a giltig; t_0 darf > 3 angenommen werden. Es sei

$$\alpha < \frac{1}{2\sqrt[3]{a}},$$

also

$$4\alpha^2 < \frac{1}{a}.$$

Ich schiebe zwischen $4\alpha^2$ und $\frac{1}{a}$ irgend vier Zahlen ein:

$$4\alpha^2 < \beta_1 < \beta_2 < \beta_3 < \beta_4 < \frac{1}{a}.$$

Die Formel

$$|\log \zeta(s)| = |F(s)| \leq |\gamma| + |\beta| \frac{r + \rho}{r - \rho} + 2A \frac{\rho}{r - \rho} \quad (|s - s_0| \leq \rho < r)$$

gilt für $s_0 = 2 + ti$, $r = 1 + \beta_4 \frac{1}{\log t}$, wenn nur t hinreichend gross ist ($t \geq t_1 > t_0$), da alsdann der Kreis $|s - s_0| \leq r$ dem Gebiet

$$t \geq t_0, \quad \sigma \geq 1 - \frac{1}{a} \frac{1}{\log t}$$

angehört. Es ist ferner nach (91) auf diesem Kreise

$$\begin{aligned} \Re F(s) &< a_{91} + \log \log \left(t + 1 + \frac{1}{\beta_4} \frac{1}{\log t} \right) \\ &< a_{92} + \log \log t \end{aligned}$$

und

$$|\beta| \leq \log \zeta(2),$$

$$|\gamma| \leq \log \zeta(2).$$

Also ist für $t \geq t_1$, $|s - s_0| \leq \rho < r$

$$|F(s)| < a_{93} + a_{93} \frac{r + \rho}{r - \rho} + 2(a_{92} + \log \log t) \frac{\rho}{r - \rho}.$$

Ich setze jetzt

$$\rho = 1 + \beta_3 \frac{1}{\log t}.$$

Dann ist speziell für $t \geq t_1$, $1 - \beta_3 \frac{1}{\log t} \leq \sigma \leq 2$

$$\begin{aligned} |F(s)| &< a_{93} + a_{93} \frac{2 + \frac{\beta_3 + \beta_4}{\log t}}{\frac{\beta_4 - \beta_3}{\log t}} + 2(a_{92} + \log \log t) \frac{1 + \frac{\beta_3}{\log t}}{\frac{\beta_4 - \beta_3}{\log t}} \\ &< a_{94} \log t \cdot \log \log t, \end{aligned}$$

also für

$$(165) \quad t \geq t_0, \quad 1 - \beta_3 \frac{1}{\log t} \leq \sigma$$

$$|F(s)| < a_{95} \log t \cdot \log \log t.$$

Für $\sigma \geq 1 - \beta_2 \frac{1}{\log t}$ gehört der Kreis mit dem Radius $\frac{\beta_3 - \beta_2}{2} \frac{1}{\log t}$ um s dem Gebiet (165) an, wenn nur t hinreichend gross ist, da

$$\begin{aligned} \beta_2 + \frac{\beta_3 - \beta_2}{2} &= \frac{\beta_2 + \beta_3}{2} \\ &< \beta_3 \end{aligned}$$

ist. Also ist für $t \geq t_2$, $1 - \beta_2 \frac{1}{\log t} \leq \sigma$

$$\begin{aligned} \left| \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right| = |F'(s)| &< \frac{a_{95} \log \left(t + \frac{\beta_3 - \beta_2}{2} \frac{1}{\log t} \right) \log \log \left(t + \frac{\beta_3 - \beta_2}{2} \frac{1}{\log t} \right)}{\frac{\beta_3 - \beta_2}{2} \frac{1}{\log t}} \\ &< a_{96} \log^2 t \cdot \log \log t, \end{aligned}$$

folglich für $t \geq t_0$, $1 - \beta_2 \frac{1}{\log t} \leq \sigma$

$$\begin{aligned} \left| \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right| &< a_{97} \log^2 t \cdot \log \log t \\ &< a_{98} \log^3 t. \end{aligned}$$

Die oben mit $f(s)$ bezeichnete, für $\sigma > 1$ durch

$$\sum_p \frac{\log p}{p^s}$$

definierte Funktion genügt also für $|t| \geq t_0$, $\sigma \geq 1 - \beta_2 \frac{1}{\log |t|}$ der Ungleichung

$$(166) \quad |f(s)| < a_{98} \log^3 |t|.$$

Ich wähle ein $\varkappa$ so, dass

$$1 - \beta_2 \frac{1}{\log t_0} < \varkappa < 1$$

ist und dass für

$$-t_0 \leq t \leq t_0, \quad \varpi \leq \sigma \leq 1$$

$\zeta(s)$ nicht verschwindet, also $f(s)$ (exkl. $s = 1$) regulär ist; dies ist möglich, da $\zeta(s)$ auf der Geraden $\sigma = 1$ nicht verschwindet. Alsdann nehme ich x so gross an, dass

$$t_0 < e^{\sqrt{\beta_2} \sqrt{\log x}} < x^2$$

und

$$\varpi < 1 - \frac{\sqrt{\beta_2}}{\sqrt{\log x}}$$

ist, und ersetze beim Integranden $\frac{x^s}{s^2} f(s)$ in (154) den Integrationsweg $2 - x^2 i \dots 2 + x^2 i$ durch folgenden geradlinig zusammengesetzten:

- 1) Von $2 - x^2 i$ nach links bis $1 - x^2 i$, 2) nach oben bis $1 - e^{\sqrt{\beta_2} \sqrt{\log x}} i$,
- 3) nach links bis $1 - \frac{\beta_2}{\sqrt{\beta_2} \sqrt{\log x}} - e^{\sqrt{\beta_2} \sqrt{\log x}} i = 1 - \frac{\sqrt{\beta_2}}{\sqrt{\log x}} - e^{\sqrt{\beta_2} \sqrt{\log x}} i$, 4) nach oben bis $1 - \frac{\sqrt{\beta_2}}{\sqrt{\log x}} - t_0 i$, 5) nach links bis $\varpi - t_0 i$, 6) nach oben bis $\varpi + t_0 i$,
- 7) nach rechts bis $1 - \frac{\sqrt{\beta_2}}{\sqrt{\log x}} + t_0 i$, 8) nach oben bis $1 - \frac{\sqrt{\beta_2}}{\sqrt{\log x}} + e^{\sqrt{\beta_2} \sqrt{\log x}} i$,
- 9) nach rechts bis $1 + e^{\sqrt{\beta_2} \sqrt{\log x}} i$, 10) nach oben bis $1 + x^2 i$, 11) nach rechts bis $2 + x^2 i$. Dann ist nach den obigen Eigenschaften von $f(s)$ der Integrand auf diesem Wege und bis auf den Pol $s = 1$ rechts davon regulär, also

$$(167) \quad \int_{2-x^2 i}^{2+x^2 i} \frac{x^s}{s^2} f(s) ds = 2\pi i x + I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6 + I_7 + I_8 + I_9 + I_{10} + I_{11}.$$

Hierin ist zunächst in I_5, I_6, I_7 die Länge des Integrationsweges unter einer von x unabhängigen Schranke (nämlich $1 + 2t_0 + 1$) gelegen und der absolute Betrag des

Integranden $< a_{99} x^{1 - \frac{\sqrt{\beta_2}}{\sqrt{\log x}}}$, wo a_{99} von x unabhängig ist; also ist

$$(168) \quad I_5 + I_6 + I_7 = O(x e^{-\sqrt{\beta_2} \log x}).$$

Ferner ist nach (166)

$$(169) \quad \begin{aligned} |I_1| &= |I_{11}| = \left| \int_1^2 \frac{x^{\sigma+x^2 i}}{(\sigma+x^2 i)^2} f(\sigma+x^2 i) d\sigma \right| \\ &= O\left(\frac{x^2}{x^4} \log^3 x\right) \\ &= O\left(\frac{\log^3 x}{x^2}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |I_2| &= |I_{10}| = \left| \int_{e^{\sqrt{\beta_2} \sqrt{\log x}}}^{x^2} \frac{x^{1+ti}}{(1+ti)^2} f(1+ti) dt \right| \\
 &= O \int_{e^{\sqrt{\beta_2} \sqrt{\log x}}}^{x^2} \frac{x}{t^2} \log^3 t dt \\
 &= O \left(x \log^3 x \int_{e^{\sqrt{\beta_2} \sqrt{\log x}}}^{\infty} \frac{dt}{t^2} \right) \\
 &= O(x \log^3 x e^{-\sqrt{\beta_2} \sqrt{\log x}}) \\
 (170) \quad &= O(x e^{-\sqrt{\beta_1} \sqrt{\log x}}),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |I_3| &= |I_9| = \left| \int_{1-\frac{\sqrt{\beta_2}}{\sqrt{\log x}}}^1 \frac{x^{\sigma+e^{\sqrt{\beta_2} \sqrt{\log x}} i}}{(\sigma+e^{\sqrt{\beta_2} \sqrt{\log x}} i)^2} f(\sigma+e^{\sqrt{\beta_2} \sqrt{\log x}} i) d\sigma \right| \\
 &= O \left(\frac{1}{\sqrt{\log x}} \frac{x}{e^{\frac{1}{2} \sqrt{\beta_2} \sqrt{\log x}}} (\sqrt{\log x})^3 \right) \\
 (171) \quad &= O(x e^{-\sqrt{\beta_2} \sqrt{\log x}}),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |I_4| &= |I_8| = \left| \int_{t_0}^{e^{\sqrt{\beta_2} \sqrt{\log x}}} \frac{x^{\frac{1-\frac{\sqrt{\beta_2}}{\sqrt{\log x}}+ti}}{x \left(1-\frac{\sqrt{\beta_2}}{\sqrt{\log x}}+ti\right)^2} f\left(1-\frac{\sqrt{\beta_2}}{\sqrt{\log x}}+ti\right) dt \right| \\
 &= O \left(x^{\frac{1-\frac{\sqrt{\beta_2}}{\sqrt{\log x}}}{\sqrt{\log x}}} \int_{t_0}^{e^{\sqrt{\beta_2} \sqrt{\log x}}} \frac{\log^3 t}{t^2} dt \right) \\
 &= O \left(x^{\frac{1-\frac{\sqrt{\beta_2}}{\sqrt{\log x}}}{\sqrt{\log x}}} \right) \\
 (172) \quad &= O(x e^{-\sqrt{\beta_2} \sqrt{\log x}}).
 \end{aligned}$$

Setzt man (168), (169), (170), (171) und (172) in (167) ein, so ergibt sich

$$\int_{2-x^2i}^{2+x^2i} \frac{x^s}{s^2} f(s) ds = 2\pi i x + O(x e^{-\sqrt{\beta_1} \sqrt{\log x}}),$$

also, da nach (154)

$$\sum_{p \leq x} \log p \log \frac{x}{p} = \frac{1}{2\pi i} \int_{2-x^2i}^{2+x^2i} \frac{x^s}{s^2} f(s) ds + O(\log^3 x)$$

ist,

$$\sum_{p \leq x} \log p \log \frac{x}{p} = x + O(x e^{-\sqrt{\beta_1} \sqrt{\log x}}).$$

Hieraus folgt wegen $\alpha < \frac{1}{2} \sqrt{\beta_1}$

$$(173) \quad \sum_{p \leq x} \log p = x + O(x e^{-\alpha \sqrt{\log x}})$$

genau so, wie oben aus (161) (162) geschlossen wurde; denn dort entsprach dem c in (161) ein beliebiges $g < \frac{1}{2}c$ in (162).

Aus (173) folgt weiter wie oben

$$\pi(x) = O(1) + \int_2^x \frac{du}{\log u} + O \sum_{n=2}^x e^{-\alpha \sqrt{\log n}} + O(x e^{-\alpha \sqrt{\log x}}),$$

woraus ich hier so weiterschliesse:

$$\begin{aligned} \pi(x) &= \int_2^x \frac{du}{\log u} + O \int_1^x e^{-\alpha \sqrt{\log u}} du + O(x e^{-\alpha \sqrt{\log x}}) \\ &= \int_2^x \frac{du}{\log u} + O \int_1^{x e^{-\alpha \sqrt{\log x}}} e^{-\alpha \sqrt{\log u}} du + O \int_{x e^{-\alpha \sqrt{\log x}}}^x e^{-\alpha \sqrt{\log u}} du + O(x e^{-\alpha \sqrt{\log x}}) \\ &= \int_2^x \frac{du}{\log u} + O(x e^{-\alpha \sqrt{\log x}}) + O(x e^{-\alpha \sqrt{\log x - \alpha \sqrt{\log x}}}) + O(x e^{-\alpha \sqrt{\log x}}) \\ &= \int_2^x \frac{du}{\log u} + O(x e^{-\alpha \sqrt{\log x}}), \end{aligned}$$

womit (163) für jedes $\alpha < \frac{1}{2\sqrt{a}}$ bewiesen ist.

Ich bemerke beiläufig im Anschluss an die oben durch (150) mitbewiesene Relation

$$\frac{\zeta'(1+ti)}{\zeta(1+ti)} = O(\log^2 t \cdot \log \log t),$$

welche an Stelle der durch § 8 bekannten Relation

$$\begin{aligned} \frac{\zeta'(1+ti)}{\zeta(1+ti)} &= O(\log^2 t) O\left(\frac{1}{|\zeta(1+ti)|}\right) \\ &= O(\log^3 t \cdot \log \log t) \end{aligned}$$

getreten ist, dass sie sich folgendermassen zu

$$(174) \quad \frac{\zeta'(1+ti)}{\zeta(1+ti)} = O(\log t \cdot \log \log t)$$

verschärfen lässt.

In

$$|\log \zeta(s)| = |F(s)| \leq |\gamma| + |\beta| \frac{r+\rho}{r-\rho} + 2A \frac{\rho}{r-\rho} \quad (|s-s_0| \leq \rho < r)$$

sei

$$t \geq 3, \quad s_0 = 1 + \frac{1}{\log t} + ti,$$

so dass also wegen

$$|\log \zeta(1+\varepsilon+ti)| \leq \log \zeta(1+\varepsilon) \quad (\varepsilon > 0),$$

$$|\gamma| \leq \log \zeta\left(1 + \frac{1}{\log t}\right)$$

$$< a_{100} \log \log t,$$

$$|\beta| < a_{100} \log \log t$$

ist. Ferner sei

$$r = \left(1 + \frac{1}{2a}\right) \frac{1}{\log t},$$

wo a die Bedeutung des DE LA VALLÉE POUSSIN'schen Satzes

$$\zeta(s) \neq 0$$

für

$$(92) \quad t \geq 2, \quad 1 - \frac{1}{a} \frac{1}{\log t} \leq \sigma$$

hat; dann ist für alle $t \geq t_0$ der Kreis $|s - s_0| \leq r$ dem Gebiete (92) angehörig; also kann

$$A = a_{101} \log \log t$$

angenommen werden und man erhält für $t \geq t_0$, $|s - s_0| \leq \rho < r$

$$|\log \zeta(s)| < a_{100} \log \log t + a_{100} \log \log t \frac{r + \rho}{r - \rho} + 2 a_{101} \log \log t \frac{\rho}{r - \rho}.$$

Es sei

$$\rho = \left(1 + \frac{1}{3a}\right) \frac{1}{\log t}.$$

Dann ist speziell für

$$t \geq t_0, \quad 1 - \frac{1}{3a} \frac{1}{\log t} \leq \sigma \leq 1 + \frac{1}{\log t}$$

$$|\log \zeta(s)| < a_{102} \log \log t,$$

also für

$$(175) \quad t \geq t_0, \quad 1 - \frac{1}{3a} \frac{1}{\log t} \leq \sigma$$

$$|\log \zeta(s)| < a_{103} \log \log t.$$

Für $t \geq t_1$, $1 - \frac{1}{6a} \frac{1}{\log t} \leq \sigma$ gehört der Kreis mit dem Mittelpunkt $s = \sigma + ti$ und dem Radius $\frac{1}{12a} \frac{1}{\log t}$ dem Gebiet (175) an; in ihm ist also

$$\left| \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right| < \frac{a_{103} \log \log \left(t + \frac{1}{12a} \frac{1}{\log t} \right)}{\frac{1}{12a} \frac{1}{\log t}}$$

$$< a_{104} \log t \cdot \log \log t.$$

Für $t \geq 3$, $1 - \frac{1}{6a} \frac{1}{\log t} \leq \sigma$ ist also

$$\left| \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right| < a_{105} \log t \cdot \log \log t,$$

womit speziell, wenn $\sigma = 1$ gesetzt wird, die Behauptung (174) bewiesen ist.

Da die Konstante a in (92) auf den Exponenten α in

$$(163) \quad \pi(x) = \int_2^x \frac{du}{\log u} + O(x e^{-\alpha \sqrt{\log x}}),$$

also auf die Grössenordnung der Abschätzung der Primzahlmenge von Einfluss ist, ist

es nicht ohne Interesse, a in (92) zu verkleinern, d. h. den

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (1 - \beta_n) \log |\gamma_n| = \lambda$$

möglichst genau nach unten abzuschätzen; $\frac{1}{a}$ kann jede Zahl $< \lambda$, d. h. a jede Zahl $> \frac{1}{\lambda}$ bedeuten. Ein Rückblick auf den letzten Teil des § 6 wird zunächst zeigen, dass $\frac{1}{a}$ jede unterhalb $\frac{8}{5} \left(\frac{7}{4} - \sqrt{3} \right)$ gelegene positive Zahl bedeuten kann; genau dies erhielt Herr DE LA VALLÉE POUSSIN damals durch diese Diskussion. Jener Nachweis von

$$\lambda \geq \frac{8}{5} \left(\frac{7}{4} - \sqrt{3} \right)$$

ergibt sich folgendermassen.

Nach (79) ist für $0 \leq \sigma \leq 2$, $t \geq 2$

$$\left| \frac{\Gamma'(\sigma)}{\Gamma(\sigma)} \right| < a_{43} + \log t.$$

Aus der für $\sigma > 1$, $t \geq 0$ giltigen Gleichung

$$(77) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{p,m} \frac{\log p \cos(mt \log p)}{p^{m\sigma}} &= -\frac{1}{2} \log \pi + \frac{\sigma - 1}{(\sigma - 1)^2 + t^2} \\ &+ \frac{1}{2} \Re \left(\frac{\Gamma' \left(\frac{\sigma}{2} + 1 + \frac{t}{2} i \right)}{\Gamma \left(\frac{\sigma}{2} + 1 + \frac{t}{2} i \right)} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma - \beta_n}{(\sigma - \beta_n)^2 + (t - \gamma_n)^2} \end{aligned} \right.$$

folgt also für $1 < \sigma \leq 2$, $t \geq 2$

$$(176) \quad \sum_{p,m} \frac{\log p \cos(mt \log p)}{p^{m\sigma}} < a_{106} + \frac{1}{2} \log t - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma - \beta_n}{(\sigma - \beta_n)^2 + (t - \gamma_n)^2},$$

$$(177) \quad -\Re \left(\frac{\zeta'(\sigma + ti)}{\zeta(\sigma + ti)} \right) < a_{106} + \frac{1}{2} \log t,$$

$$(178) \quad -\Re \left(\frac{\zeta'(\sigma + 2ti)}{\zeta(\sigma + 2ti)} \right) < a_{107} + \frac{1}{2} \log t.$$

Wenn $\beta + \gamma i$ eine Nullstelle mit $\gamma \geq 2$ ist, so ist nach (176), wenn $t = \gamma$ gesetzt wird,

$$(179) \quad \begin{aligned} \sum_{p,m} \frac{\log p \cos(m\gamma \log p)}{p^{m\sigma}} &< a_{106} + \frac{1}{2} \log \gamma - \frac{1}{\sigma - \beta}, \\ \frac{1}{\sigma - \beta} &< a_{106} + \frac{1}{2} \log \gamma - \sum_{p,m} \frac{\log p \cos(m\gamma \log p)}{p^{m\sigma}} \\ &\leq a_{106} + \frac{1}{2} \log \gamma + \frac{3}{4} \sum_{p,m} \frac{\log p}{p^{m\sigma}} + \frac{1}{4} \sum_{p,m} \frac{\log p \cos(2m\gamma \log p)}{p^{m\sigma}} \\ &= a_{106} + \frac{1}{2} \log \gamma - \frac{3}{4} \frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} - \frac{1}{4} \Re \left(\frac{\zeta'(\sigma + 2\gamma i)}{\zeta(\sigma + 2\gamma i)} \right), \end{aligned}$$

also nach (178)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma - \beta} &< a_{106} + \frac{1}{2} \log \gamma + \frac{3}{4} \frac{1}{\sigma - 1} + a_{108} + \frac{1}{4} a_{107} + \frac{1}{8} \log \gamma \\ &= a_{109} + \frac{3}{4} \frac{1}{\sigma - 1} + \frac{5}{8} \log \gamma. \end{aligned}$$

Wenn $k = \frac{3}{4}$ gesetzt und $h > \frac{5}{8}$ angenommen wird, genügen also von einer gewissen Ordinate an die Nullstellen in der oberen Halbebene der Relation

$$\frac{1}{\sigma - \beta} < k \frac{1}{\sigma - 1} + h \log \gamma \quad (1 < \sigma \leq 2).$$

Es sei gleich allgemein für irgend ein Konstantenpaar k, h , wo $0 < k < 1$, $h > 0$ ist, bekannt, dass im Gebiet $1 < \sigma \leq 2$ alle Nullstellen $\beta + \gamma i$ von $\zeta(s)$, deren Ordinate einen gewissen positiven Wert $\gamma_0 = \gamma_0(k, h)$ überschreitet, die Ungleichung

$$(180) \quad \frac{1}{\sigma - \beta} < k \frac{1}{\sigma - 1} + h \log \gamma$$

erfüllen; dann ergibt sich für $1 - \beta$, als Funktion von γ betrachtet, folgende untere Abschätzung: Es werde vorläufig

$$\sigma = 1 + \frac{\alpha}{\log \gamma} \quad (\alpha > 0)$$

gesetzt, wo über die Konstante α noch genauer verfügt werden wird. Dann ist nach (180) für alle $\beta + \gamma i$, bei denen $\gamma > a_{110}$ ist (wo $a_{110} \geq \gamma_0$ so gewählt werden muss, dass

$$\frac{\alpha}{\log a_{110}} \leq 1$$

ist),

$$\frac{1}{1 - \beta + \frac{\alpha}{\log \gamma}} < \frac{k}{\alpha} \log \gamma + h \log \gamma,$$

$$1 - \beta + \frac{\alpha}{\log \gamma} > \frac{1}{\frac{k}{\alpha} + h} \log \gamma,$$

$$1 - \beta > \left(\frac{1}{\frac{k}{\alpha} + h} - \alpha \right) \log \gamma$$

$$(181) \quad = \frac{1 - k - h\alpha}{\frac{k}{\alpha} + h} \log \gamma.$$

Für alle hinreichend kleinen positiven α ist der Faktor von $\frac{1}{\log \gamma}$ auf der rechten

Seite von (181) positiv; er erreicht sein Maximum für

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{1}{\frac{k}{\alpha} + h} - \alpha \right) \\ &= \frac{1}{\left(\frac{k}{\alpha} + h \right)^2} \frac{k}{\alpha^2} - 1, \end{aligned}$$

$$\frac{k}{\left(\frac{k}{\alpha} + h \right)^2} = 1,$$

$$\alpha = \frac{\sqrt{k} - k}{h},$$

und das Maximum ist

$$\frac{1 - \sqrt{k}}{h} - \frac{\sqrt{k} - k}{h} = \frac{(1 - \sqrt{k})^2}{h};$$

also ist für alle $\gamma > a_{110}$

$$1 - \beta > \frac{(1 - \sqrt{k})^2}{h} \frac{1}{\log \gamma},$$

d. h. wegen der Symmetrie der oberen und unteren Halbebene

$$(182) \quad \lambda = \liminf_{n \rightarrow \infty} (1 - \beta_n) \log |\gamma_n| \geq \frac{(1 - \sqrt{k})^2}{h}.$$

Da nach dem Obigen in (180) $k = \frac{3}{4}$ und $h = \frac{5}{8} + \delta$ ($\delta > 0$) angenommen werden kann, ist für alle $\delta > 0$

$$\lambda \geq \frac{(1 - \sqrt{\frac{3}{4}})^2}{\frac{5}{8} + \delta},$$

also ⁶⁵⁾

$$\begin{aligned} \lambda &\geq \frac{(1 - \sqrt{\frac{3}{4}})^2}{\frac{5}{8}} \\ &= \frac{8}{5} \left(\frac{7}{4} - \sqrt{3} \right) \\ &= 0,02872 \dots \end{aligned}$$

Durch Mitberücksichtigung der auf der rechten Seite von (176) als positiv weglassenen Summenglieder gelang es Herrn DE LA VALLÉE POUSSIN mit Hilfe scharfsinniger Überlegungen, die Gültigkeit von (180) für ein Konstantenpaar h, k zu beweisen ⁶⁶⁾, wo auch $k = \frac{3}{4}$ ist, aber h kleiner als früher, nämlich $h = \frac{35}{64}$, und im Anhang seiner

⁶⁵⁾ Vergl. S. 29-30 der in Anm. ¹²⁾ zitierten Arbeit von Herrn DE LA VALLÉE POUSSIN.

⁶⁶⁾ Vergl. S. 36 seiner Arbeit.

Arbeit ⁶⁷⁾ erhält er sogar das noch vorteilhaftere Konstantenpaar

$$\begin{aligned} k &= \frac{3}{4}, \\ h &= \frac{5}{4}(\sqrt{2} - 1) \\ &= 0,5177669 \dots \end{aligned}$$

und dadurch nach (182)

$$\begin{aligned} (183) \quad \lambda &\geq \frac{\frac{7}{4} - \sqrt{3}}{\frac{5}{4}(\sqrt{2} - 1)} \\ &= 0,034666 \dots \end{aligned}$$

Ich will nun zeigen, dass ohne Anwendung jener feineren DE LA VALLÉE POUSSIN'schen Kunstgriffe, also nur unter Benutzung eines Summengliedes diese schärfste Abschätzung (183) von λ erreicht wird und übertroffen werden kann, wenn man nur statt der quadratischen Ungleichung

$$-\cos \alpha \leq \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 2\alpha$$

eine andere quadratische Ungleichung für $\cos \alpha$ anwendet.

Dazu mache ich gleich den allgemeinen Ansatz, zu welchem eine beliebige Cosinus-Ungleichung im Sinne des § 4

$$c_0 + c_1 \cos \varphi + c_2 \cos 2\varphi + \dots + c_n \cos n\varphi \geq 0 \quad (0 < c_0 < 1, c_2 \geq 0, \dots, c_n \geq 0)$$

führt.

Nach (179) ist für

$$\begin{aligned} &\zeta(\beta + \gamma i) = 0, \quad \gamma \geq 2, \quad 1 < \sigma \leq 2 \\ &\frac{1}{\sigma - \beta} < a_{106} + \frac{1}{2} \log \gamma - \sum_{p, m} \frac{\log p \cos(m\gamma \log p)}{p^{m\sigma}} \\ &\leq a_{106} + \frac{1}{2} \log \gamma + \sum_{p, m} \frac{\log p \left(\frac{c_0}{c_1} + \frac{c_2}{c_1} \cos(2m\gamma \log p) + \dots + \frac{c_n}{c_1} \cos(nm\gamma \log p) \right)}{p^{m\sigma}} \\ (184) \quad &= a_{106} + \frac{1}{2} \log \gamma - \frac{c_0}{c_1} \frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} - \frac{c_2}{c_1} \Re \left(\frac{\zeta'(\sigma + 2\gamma i)}{\zeta(\sigma + 2\gamma i)} \right) - \dots - \frac{c_n}{c_1} \Re \left(\frac{\zeta'(\sigma + n\gamma i)}{\zeta(\sigma + n\gamma i)} \right). \end{aligned}$$

Nach (177) ist bei festem n für $v = 2, 3, \dots, n$ nebst $1 < \sigma \leq 2, \gamma \geq 2$

$$-\Re \left(\frac{\zeta'(\sigma + v\gamma i)}{\zeta(\sigma + v\gamma i)} \right) < a_{111} + \frac{1}{2} \log \gamma.$$

(184) liefert also

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma - \beta} &< a_{112} + \frac{1}{2} \log \gamma + \frac{c_0}{c_1} \frac{1}{\sigma - 1} + \frac{1}{2} \frac{c_2 + \dots + c_n}{c_1} \log \gamma \\ &= a_{112} + \frac{c_0}{c_1} \frac{1}{\sigma - 1} + \frac{c_1 + c_2 + \dots + c_n}{2c_1} \log \gamma. \end{aligned}$$

⁶⁷⁾ l. c., S. 73-74.

In (180) kann demnach

$$k = \frac{c_0}{c_1},$$

$$h = \frac{c_1 + c_2 + \dots + c_n}{2c_1} + \delta$$

sein; nach (182) ist also

$$\lambda \geq \frac{\left(1 - \sqrt{\frac{c_0}{c_1}}\right)^2}{\frac{c_1 + c_2 + \dots + c_n}{2c_1}}$$

$$= \frac{2(\sqrt{c_1} - \sqrt{c_0})^2}{c_1 + c_2 + \dots + c_n}.$$

Wählt man die quadratische Ungleichung

$$17 + 24 \cos \varphi + 8 \cos 2\varphi \geq 0$$

des § 2, so ergibt sich

$$\lambda \geq \frac{2(\sqrt{24} - \sqrt{17})^2}{24 + 8}$$

$$= 0,0376 \dots,$$

womit (183) schon übertroffen ist; übrigens liefert hier unter den quadratischen Ungleichungen eine andere die beste Ausnutzung der Methode.

Ich will diese numerischen Rechnungen nicht weiter verfolgen und mich wieder anderen Problemen zuwenden. Übrigens verkenne ich nicht den hohen Wert auch desjenigen Teils der DE LA VALLÉE POUSSIN'schen Abhandlung, welcher numerische Abschätzungen der in der allgemeinen Theorie auftretenden Konstanten enthält. Durch wesentliche Benutzung gewisser Konstantenabschätzungen neben seinen allgemeinen Methoden hat er z. B. dort zuerst den Nachweis geführt, dass die ersten nicht reellen Nullstellen von $\zeta(s)$ wirklich den reellen Teil $\frac{1}{2}$ haben ⁶⁸⁾.

§ 12.

Über die Summe

$$M(x) = \sum_{n=1}^x \mu(n)$$

der ersten $[x]$ Koeffizienten von

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$$

ist durch eine frühere Arbeit von mir ⁶⁹⁾ bekannt, dass

$$M(x) = O(x e^{-\sqrt[12]{\log x}})$$

⁶⁸⁾ l. c., S. 23.

⁶⁹⁾ Über die zahlentheoretische Funktion $\mu(k)$ [Sitzungsberichte der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien, mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse, Bd. CXII (1903), Abt. IIa, S. 537-570], S. 548.

ist, und ein Blick auf den damaligen Beweis zeigt, dass die dortigen Entwicklungen für jedes $\nu < \frac{1}{10}$ die Richtigkeit der Relation

$$(185) \quad M(x) = O(x e^{-\log^{\nu} x}).$$

liefern. Ich möchte nunmehr darauf aufmerksam machen, dass die im § 11 für die Primzahlmenge angewandte Methode gestattet, (185) zum ersten Male für alle $\nu < \frac{1}{2}$ zu beweisen, und sogar die noch schärfere Relation liefert:

$$(186) \quad M(x) = O(x e^{-\gamma \sqrt{\log x}}),$$

wo γ eine Konstante bezeichnet.

Nach (100) ist, wenn ich $\delta = 1$ setze, für

$$s_0 = 1 + \frac{1}{a \log t} + ti, \quad t \geq t_0, \quad r = \frac{3}{2a \log t}, \quad |s - s_0| \leq \rho < r$$

$$|\Re \log \zeta(s)| < (a_{69} + \log \log t) \frac{r + \rho}{r - \rho} + 2(a_{65} + \log \log t) \frac{\rho}{r - \rho}.$$

Wenn hierin

$$\rho = \frac{5}{4a \log t}$$

gesetzt wird, so ergibt sich speziell für $t \geq t_0$, $1 - \frac{1}{4a \log t} \leq \sigma \leq 1 + \frac{1}{a \log t}$

$$|\Re \log \zeta(s)| < a_{11} \log \log t.$$

Für $t \geq t_0$, $\sigma \geq 1 + \frac{1}{a \log t}$ ist

$$\begin{aligned} |\Re \log \zeta(s)| &\leq \log \zeta(\sigma) \\ &\leq \log \zeta\left(1 + \frac{1}{a \log t}\right) \\ &< a_{114} \log \log t; \end{aligned}$$

also ist für $t \geq t_0$, $1 - \frac{1}{4a \log t} \leq \sigma$

$$|\log \zeta(s)| = |\Re \log \zeta(s)| < a_{115} \log \log t,$$

$$(187) \quad \left| \frac{1}{\zeta(s)} \right| < \log^{a_{115}} t.$$

Also ⁷⁰⁾ gibt es eine Konstante b derart, dass die Funktion $\frac{1}{\zeta(s)}$ auf der stetigen Kurve

$$\sigma = 1 - \frac{1}{b \log(-t)} \quad \text{für } t \leq -2,$$

$$\sigma = 1 - \frac{1}{b \log 2} \quad \text{für } -2 \leq t \leq 2,$$

$$\sigma = 1 - \frac{1}{b \log t} \quad \text{für } t \geq 2$$

⁷⁰⁾ Es genügt für den vorliegenden Zweck, dass auf der rechten Seite von (187) überhaupt eine endliche Potenz von $\log t$ steht. Daher lege ich keinen Wert darauf, eine numerische Abschätzung für a_{115} durchzuführen.

und rechts davon regulär ist und für $|t| \geq 2$, $\sigma \geq 1 - \frac{1}{b \log |t|}$ die Ungleichung

$$(188) \quad \left| \frac{1}{\zeta(s)} \right| < \log^{a_{113}} |t|$$

erfüllt.

Die Anwendung des CAUCHY'schen Satzes auf den in der ersten Hälfte von § 11 benutzten Integrationsweg und den Integranden $\frac{x^s}{s^2} \frac{1}{\zeta(s)}$ ergibt also hier, dass

$$(189) \quad \sum_{n=1}^x \mu(n) \log \frac{x}{n} = O(x e^{-c\sqrt{\log x}})$$

ist; denn gegen früher tritt hier nur die Änderung ein, dass der Integrand auch im Punkt 1 regulär ist, so dass das entsprechende Zusatzglied nicht auftritt. Dass rechts in (188) $\log^{a_{113}} |t|$ statt des damaligen $\log^3 |t|$ in (153) steht, beeinflusst die Abschätzungen nicht, da für jedes $\delta > 0$

$$\log^{a_{113}} x = O(e^{\delta\sqrt{\log x}})$$

ist, so dass die den Formeln (158) und (159) entsprechenden Gleichungen hier unverändert sind. Auch das Analogon zu (160) gilt, da

$$\int_2^\infty \frac{\log^{a_{113}} t}{t^2} dt$$

konvergiert.

Aus (189) folgt weiter, wenn

$$\varepsilon = e^{-\frac{c}{2}\sqrt{\log x}}$$

gesetzt wird,

$$\sum_{n=1}^{x+\varepsilon x} \mu(n) \log \frac{x+\varepsilon x}{n} = O(x e^{-c\sqrt{\log x}}),$$

$$\log(1+\varepsilon) \sum_{n=1}^x \mu(n) + \sum_{n=x+1}^{x+\varepsilon x} \mu(n) \log \frac{x+\varepsilon x}{n} = O(x e^{-c\sqrt{\log x}}),$$

$$\log(1+\varepsilon) \sum_{n=1}^x \mu(n) = O \sum_{n=x+1}^{x+\varepsilon x} \log(1+\varepsilon) + O(x e^{-c\sqrt{\log x}})$$

$$= O(\varepsilon^2 x) + O(x e^{-c\sqrt{\log x}}),$$

$$M(x) = \sum_{n=1}^x \mu(n) = O(\varepsilon x) + O\left(\frac{x}{\varepsilon} e^{-c\sqrt{\log x}}\right)$$

$$= O(x e^{-\frac{c}{2}\sqrt{\log x}}),$$

womit (186) bewiesen ist.

§ 13.

SATZ (IX). — Es sei für alle $\delta > 0$

$$(190) \quad b_n = O(n^\delta),$$

also *a fortiori*

$$(191) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s}$$

für $\Re(s) > 1$ absolut konvergent. Die dort durch (191) definierte Funktion $f(s)$ sei für $\Re(s) \geq \eta$ regulär, wo $0 < \eta < 1$ ist, und für $|t| \geq 1$, $\sigma \geq \eta$ sei

$$(192) \quad |f(s)| < B |t|^k,$$

wo B und $k \geq 0$ konstant sind. Dann ist die Reihe (191) auf der Geraden $\Re(s) = 1$ und darüber hinaus konvergent, nämlich mindestens für

$$\Re(s) > 1 - \frac{1 - \eta}{2^{[k]+1}}.$$

Beweis: Es werde zur Abkürzung

$$[k] + 1 = \nu$$

gesetzt; ν ist die kleinste ganze Zahl $> k$. Nach (128) ist bei geradlinigem Integrationsweg für alle $x \geq 1$

$$(193) \quad \int_{2-\infty i}^{x^{2+\infty i}} \frac{x^s}{s^{\nu+1}} f(s) ds = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\nu!} \sum_{n=1}^x b_n \log^{\nu} \left(\frac{x}{n} \right).$$

Es ist auch das über die Gerade $\eta + ti$ erstreckte Integral

$$\int_{\eta-\infty i}^{\eta+\infty i} \frac{x^s}{s^{\nu+1}} f(s) ds$$

absolut konvergent, da nach (192) für $|t| \geq 1$, $\sigma = \eta$

$$\begin{aligned} \left| \frac{x^s}{s^{\nu+1}} f(s) \right| &< \frac{x^{\eta}}{|t|^{\nu+1}} B |t|^k \\ &= \frac{B x^{\eta}}{|t|^{\nu-k+1}} \end{aligned}$$

ist. Ferner ist

$$(194) \quad \int_{\eta-\infty i}^{\eta+\infty i} \frac{x^s}{s^{\nu+1}} f(s) ds = \int_{2-\infty i}^{x^{2+\infty i}} \frac{x^s}{s^{\nu+1}} f(s) ds;$$

denn die beiden Integrale

$$\int_{\eta}^x \frac{x^{\sigma+Ti}}{(\sigma+Ti)^{\nu+1}} f(\sigma+Ti) d\sigma$$

und

$$\int_{\eta}^x \frac{x^{\sigma-Ti}}{(\sigma-Ti)^{\nu+1}} f(\sigma-Ti) d\sigma,$$

haben für $T = \infty$ den Grenzwert 0, da die Länge des Integrationsweges < 2 und für $T \geq 1$ der absolute Betrag des Integranden nach (192)

$$< \frac{x^2}{T^{\nu+1}} B T^k$$

ist.

Aus (193) und (194) folgt

$$\sum_{n=1}^x b_n \log^{\nu} \left(\frac{x}{n} \right) = 2\pi i \nu! \int_{\eta-\infty i}^{\eta+\infty i} \frac{x^s}{s^{\nu+1}} f(s) ds,$$

also

$$(195) \quad \left| \sum_{n=1}^x b_n \log^v \left(\frac{x}{n} \right) \right| \leq 2\pi v! x^{\frac{v}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|\eta + ti|^{v+1}} |f(\eta + ti)| dt,$$

$$\sum_{n=1}^x b_n \log^v \left(\frac{x}{n} \right) = O(x^{\eta}).$$

Wenn

$$\varepsilon = \varepsilon(x) = x^{-\frac{1-\eta}{2}}$$

gesetzt wird, ergibt sich aus (195)

$$\sum_{n=1}^{x+\varepsilon x} b_n \log^v \left(\frac{x+\varepsilon x}{n} \right) = O(x^{\eta}),$$

also durch Subtraktion

$$\sum_{n=1}^x b_n \left\{ \log^v \left(\frac{x+\varepsilon x}{n} \right) - \log^v \left(\frac{x}{n} \right) \right\} + \sum_{n=x+1}^{x+\varepsilon x} b_n \log^v \left(\frac{x+\varepsilon x}{n} \right) = O(x^{\eta}),$$

$$\sum_{n=1}^x b_n \left\{ \left(\log(1+\varepsilon) + \log \left(\frac{x}{n} \right) \right)^v - \log^v \left(\frac{x}{n} \right) \right\} = O \sum_{n=x+1}^{x+\varepsilon x} |b_n| \log^v(1+\varepsilon) + O(x^{\eta}),$$

folglich nach der Voraussetzung (190) für alle $\delta > 0$

$$(196) \quad \left\{ \begin{aligned} & \sum_{n=1}^x b_n \left\{ \log^v(1+\varepsilon) + v \log^{v-1}(1+\varepsilon) \log \left(\frac{x}{n} \right) + \dots \right. \\ & \quad \left. \dots + \binom{v}{2} \log^2(1+\varepsilon) \log^{v-2} \left(\frac{x}{n} \right) + v \log(1+\varepsilon) \log^{v-1} \left(\frac{x}{n} \right) \right\} \\ & \quad = O(x^{\delta} \cdot \varepsilon x \cdot \varepsilon^v) + O(x^{\eta}), \\ & \left(\log^v(1+\varepsilon) \sum_{n=1}^x b_n + v \log^{v-1}(1+\varepsilon) \sum_{n=1}^x b_n \log \frac{x}{n} + \dots + \binom{v}{2} \log^2(1+\varepsilon) \sum_{n=1}^x b_n \log^{v-2} \left(\frac{x}{n} \right) \right. \\ & \quad \left. + v \log(1+\varepsilon) \sum_{n=1}^x b_n \log^{v-1} \left(\frac{x}{n} \right) \right) = O(\varepsilon^{v+1} x^{1+\delta}) + O(x^{\eta}). \end{aligned} \right.$$

Es ist (z. B. wegen (122)) für jedes $\lambda \geq 1$

$$\sum_{n=1}^x \log^{\lambda} \left(\frac{x}{n} \right) = O(x);$$

nach (190) ist also

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^x b_n &= O \sum_{n=1}^x n^{\delta} \\ &= O(x^{1+\delta}), \\ \sum_{n=1}^x b_n \log \frac{x}{n} &= O \sum_{n=1}^x n^{\delta} \log \frac{x}{n} \\ &= O \left(x^{\delta} \sum_{n=1}^x \log \frac{x}{n} \right) \\ &= O(x^{1+\delta}), \\ &\dots \dots \dots \\ \sum_{n=1}^x b_n \log^{v-2} \left(\frac{x}{n} \right) &= O(x^{1+\delta}); \end{aligned}$$

wird (196) nach dem letzten Gliede der linken Seite aufgelöst und werden diese Abschätzungen eingesetzt, so ergibt sich

$$\begin{aligned} & \nu \log(1 + \varepsilon) \sum_{n=1}^x b_n \log^{\nu-1} \left(\frac{x}{n} \right) \\ &= O(\varepsilon^\nu x^{1+\delta}) + O(\varepsilon^{\nu-1} x^{1+\delta}) + \dots + O(\varepsilon^2 x^{1+\delta}) + O(\varepsilon^{\nu+1} x^{1+\delta}) + O(x^\eta) \\ &= O(\varepsilon^2 x^{1+\delta}) + O(x^\eta), \end{aligned}$$

also, da rechts wegen

$$\varepsilon^2 x = x^\eta$$

das erste Glied überwiegt,

$$\begin{aligned} \nu \log(1 + \varepsilon) \sum_{n=1}^x b_n \log^{\nu-1} \left(\frac{x}{n} \right) &= O(\varepsilon^2 x^{1+\delta}), \\ \sum_{n=1}^x b_n \log^{\nu-1} \left(\frac{x}{n} \right) &= O(\varepsilon x^{1+\delta}) \\ &= O(x^{\frac{\eta+1}{2}+\delta}) \\ &= O(x^{\eta_1}), \end{aligned}$$

(197)

wo η_1 jede Zahl $> \frac{\eta+1}{2}$ bedeuten kann.

Im Falle $\nu = 1$ ist damit der Satz (IX) bewiesen; im Falle $\nu > 1$ ergibt die Wiederholung des Übergangs von (195) zu (197), dass

$$\sum_{n=1}^x b_n \log^{\nu-2} \left(\frac{x}{n} \right) = O(x^{\eta_2})$$

ist, wo η_2 jede Zahl

$$> \frac{\eta_1 + 1}{2} = 1 - \frac{1 - \eta}{4}$$

bedeuten kann, und so fort, bis man schliesslich zu

$$\sum_{n=1}^x b_n = O(x^\Theta)$$

gelangt, wo Θ eine beliebige Zahl

$$> 1 - \frac{1 - \eta}{2^\nu}$$

bezeichnet. Damit ist der Satz (IX) in allen Fällen bewiesen; denn aus

$$\sum_{n=1}^x b_n = O(x^\Theta)$$

folgt die Konvergenz von (191) für $\Re(s) > \Theta$.

Von dem Satz (IX) lassen sich zwei bemerkenswerte Anwendungen auf die Theorie der RIEMANN'schen Zetafunktion machen, welche allerdings nur in dem Fall von Bedeutung sind, dass die obere Grenze ϖ der reellen Teile der Nullstellen von $\zeta(s)$ kleiner als 1 ist. Die erste dieser Anwendungen liefert übrigens für den Fall $\varpi = \frac{1}{2}$ (RIEMANN'sche Vermutung) weniger, als mit transzendenteren Hilfsmitteln (Benutzung der HADAMARD'schen Theorie) schon bekannt ist; dafür macht sie aber von der Tatsache, dass die Zahlklasse p die der Primzahlen ist, keinen Gebrauch und trägt in dieser

Hinsicht weiter; die Methode ist eben auf Funktionen anwendbar, von denen nicht bekannt ist, ob sie in der ganzen Ebene existieren. Die zweite Anwendung wird auch für $\zeta(s)$ eine bisher nicht bemerkte Tatsache beweisen.

1) Es sei wahr, dass für $\Re(s) > \frac{1}{2}$, wo

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} < 1$$

ist,

$$\zeta(s) \neq 0$$

ist. Dann ist die für $\Re(s) > 1$ durch die DIRICHLET'sche Reihe

$$(198) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s},$$

wo

$$\begin{aligned} b_n &= \log n - 1 \quad \text{für Primzahlen,} \\ b_n &= \quad - 1 \quad \text{für andere Zahlen} \end{aligned}$$

ist, definierte Funktion

$$(199) \quad f(s) = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \zeta(s) - \sum_{m=2}^{\infty} \sum_p \frac{\log p}{p^{ms}}$$

für $\Re(s) > \frac{1}{2}$ regulär.

Nun ist bekanntlich für $\sigma \geq \frac{1}{2}$, $t \geq 2$

$$(200) \quad |\zeta(s)| < a_{116} t^{\frac{1}{2}};$$

denn aus (24) folgt für $2 \geq \sigma \geq \frac{1}{2}$, $t \geq 2$, wenn $m = [t]$ gesetzt wird,

$$\begin{aligned} |\zeta(s)| &< \sum_{n=1}^{t+1} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} + \frac{1}{t-1} \frac{1}{([t]+1)^{-\frac{1}{2}}} + (2+t) \sum_{n=t+1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \\ &< a_{117} \sqrt{t}. \end{aligned}$$

Da $\zeta(s)$ für $\Re(s) > \frac{1}{2}$ als $\neq 0$ vorausgesetzt wird, ist für $\Re(s) > \frac{1}{2}$, $t \geq 2$

$$F(s) = \log \zeta(s)$$

regulär und nach (200)

$$(201) \quad \Re \log \zeta(s) = \log |\zeta(s)| < a_{118} \log t.$$

Die Formel

$$|F(s)| \leq |\gamma| + |\beta| \frac{r+\rho}{r-\rho} + 2A \frac{\rho}{r-\rho} \quad (|s-s_0| \leq \rho < r)$$

werde auf

$$s_0 = 2 + ti, \quad r = 2 - \frac{1}{2} - \delta, \quad \rho = 2 - \frac{1}{2} - 2\delta$$

angewendet, wo $\delta < \frac{1}{2}$ eine beliebig gegebene positive Grösse ist. Der Kreis $|s-s_0| \leq \rho$ gehört alsdann der Halbebene $\Re(s) > \frac{1}{2}$ an. Es ist für alle t

$$|\gamma| < a_{119}$$

und

$$|\beta| < a_{119},$$

ferner für $t \geq 4$ nach (201) auf dem Kreis $|s-s_0| = r$

$$\begin{aligned} \Re F(s) &< a_{118} \log(t+2) \\ &< a_{120} \log t, \end{aligned}$$

also für $|s - s_0| \leq \rho < r$

$$\begin{aligned} |F(s)| &< a_{119} + a_{119} a_{121} + 2 a_{120} \log t \cdot a_{122} \\ &< a_{123} \log t. \end{aligned}$$

Speziell für $t \geq 4$, $\varpi + 2\delta \leq \sigma \leq 2$ ist also

$$|F(s)| < a_{123} \log t.$$

D. h. wenn $\delta > 0$ gegeben ist, so ist für

$$(202) \quad \sigma \geq \varpi + \delta, \quad t \geq 2$$

$$(203) \quad |F(s)| = |\log \zeta(s)| < a_{124} \log t.$$

Wird $1 > \delta > 0$, $\sigma \geq \varpi + 2\delta$, $t \geq 3$ angenommen und (203) auf die Kreisperipherie um s mit dem Radius δ angewendet, welche gewiss dem Gebiete (202) angehört, so ergibt sich

$$\begin{aligned} |F'(s)| = \left| \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right| &< \frac{a_{124} \log(t + \delta)}{\delta} \\ &< a_{125} \log t. \end{aligned}$$

Mit anderen Worten: Wenn $\delta > 0$ beliebig gegeben ist, so ist für

$$(204) \quad \sigma \geq \varpi + \delta, \quad t \geq 2$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right| &< a_{126} \log t \\ &< a_{127} \sqrt{t}; \end{aligned}$$

im Gebiet (204) ist ferner nach (200)

$$|\zeta(s)| < a_{116} \sqrt{t}$$

und

$$\begin{aligned} \left| \sum_{m=2}^{\infty} \sum_p \frac{\log p}{p^{ms}} \right| &< a_{128} \\ &< a_{128} \sqrt{t}, \end{aligned}$$

also nach (199)

$$\begin{aligned} |f(s)| &< a_{127} \sqrt{t} + a_{116} \sqrt{t} + a_{128} \sqrt{t} \\ &= a_{129} \sqrt{t}. \end{aligned}$$

Es ist also, wenn η zwischen ϖ und 1 gewählt wird, die für $\Re(s) > 1$ durch

$$(198) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s}$$

definierte Funktion $f(s)$ für $\Re(s) \geq \eta$ regulär, und für $|t| \geq 1$, $\sigma \geq \eta$ ist

$$(205) \quad |f(s)| < B |t|^{\frac{1}{2}}.$$

Der Satz (IX) ist also, da (205) die Gestalt (192) für $k = \frac{1}{2}$ hat, anwendbar und lehrt: Die DIRICHLET'sche Reihe (198) konvergiert für

$$\Re(s) > 1 - \frac{1 - \eta}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\eta}{2},$$

also, da dies von allen $\eta > \varkappa$ gilt, für

$$\Re(s) > \frac{1}{2} + \frac{\varkappa}{2}.$$

Anders ausgedrückt: Es ist für alle $\delta > 0$

$$\sum_{n=1}^x b_n = O(x^{\frac{1}{2} + \frac{\varkappa}{2} + \delta}),$$

$$\sum_{p \leq x} \log p = x + O(x^{\frac{1}{2} + \frac{\varkappa}{2} + \delta}),$$

woraus unmittelbar

$$\begin{aligned} \pi(x) &= \sum_{p \leq x} 1 \\ &= \sum_{n=2}^x \frac{1}{\log n} + O \sum_{n=2}^x n^{\frac{1}{2} + \frac{\varkappa}{2} + \delta} \left(\frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log(n+1)} \right) + O \left(x^{\frac{1}{2} + \frac{\varkappa}{2} + \delta} \frac{1}{\log(x+1)} \right) \\ &= \int_2^x \frac{du}{\log u} + O \sum_{n=2}^x n^{-\frac{1}{2} + \frac{\varkappa}{2} + \delta} + O(x^{\frac{1}{2} + \frac{\varkappa}{2} + \delta}) \\ &= \int_2^x \frac{du}{\log u} + O(x^{\frac{1}{2} + \frac{\varkappa}{2} + \delta}) \end{aligned}$$

folgen würde.

Im Falle $\varkappa = \frac{1}{2}$ (RIEMANN'sche Vermutung) wäre also

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{du}{\log u} + O(x^{\frac{3}{4} + \delta}),$$

während durch die Herren FRANEL, VON KOCH und HOLMGREN Genaueres bekannt ist ⁷¹⁾. Aber ich habe doch auch hier etwas Neues festgestellt, nämlich: Wenn irgend eine Zahlklasse p so beschaffen ist, dass die für $\Re(s) > 1$ durch

$$\sum_p \frac{\log p}{p^s}$$

definierte Funktion $g(s)$ für $\Re(s) \geq \eta$, wo $\eta < 1$ ist, mit Ausnahme des Pols erster Ordnung $s = 1$ mit dem Residuum 1 regulär ist und für $\sigma \geq \eta$, $|t| \geq 1$ die Ungleichung

$$|g(s)| < B|t|^k$$

erfüllt, so ist

$$\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1 = \int_2^x \frac{du}{\log u} + O(x^\Theta),$$

wo

$$\Theta < 1$$

ist.

2) Es sei wahr, dass die obere Grenze der reellen Teile der Nullstellen von $\zeta(s)$ kleiner als 1 ist, d. h. dass für $\Re(s) > \varkappa$, wo $\frac{1}{2} \leq \varkappa < 1$ ist,

$$\zeta(s) \neq 0$$

⁷¹⁾ Vergl. die in den Anm. ²⁹⁾, ³¹⁾ zitierten Arbeiten.

ist. Aus (203) folgt für $\sigma \geq \varpi + \delta$, $t \geq 2$

$$\Re \log \zeta(s) > -a_{124} \log t,$$

$$\left| \frac{1}{\zeta(s)} \right| < t^{a_{124}}.$$

Daraus würde nach dem Satz (IX) folgen, dass die Konvergenzabszisse von

$$(206) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$$

kleiner als 1 ist.

Diese bisher nicht bemerkte Tatsache ⁷²⁾ hat für ein bestimmtes anderes Problem Bedeutung, wie in der Einleitung ausgeführt worden ist; sie zeigt nämlich, dass die RIEMANN'sche Vermutung ($\varpi = \frac{1}{2}$) mit einer Vermutung von Herrn CAHEN im Widerspruch steht.

Es ist vielleicht von Interesse, wirklich einen Wert anzugeben, bis zu welchem unter der Annahme der Richtigkeit der RIEMANN'schen Vermutung die Reihe (206) konvergieren würde. Dazu ist es, um mit den vorliegenden Hilfsmitteln ein möglichst genaues Resultat zu erzielen, wichtig, bei gegebenem $\lambda > \frac{1}{2}$ in der alsdann giltigen Relation

$$\left| \frac{1}{\zeta(s)} \right| < B t^k \quad (\sigma \geq \lambda, t \geq 1)$$

k tunlichst klein zu wählen.

Ich schicke einen HILFSSATZ voraus:

Wenn

$$(207) \quad f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s}$$

für $s > 1$ absolut konvergiert und für $s > \alpha$ ($0 \leq \alpha < 1$) konvergiert, so ist, wenn $\delta > 0$, $\lambda > \alpha$ gegeben ist und $\lambda \leq 1$ ist, für $\sigma \geq \lambda$, $t \geq 1$

$$(208) \quad |f(s)| < a_{130} t^{\frac{1-\lambda}{1-\alpha} + \delta}.$$

Beweis: (208) braucht natürlich nur im Gebiet $\lambda \leq \sigma \leq 2$, $t \geq 1$ bewiesen zu werden. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf

$$(1 - \alpha)\delta < \lambda - \alpha$$

angenommen werden, da (208) mit jedem δ auch für jedes grössere gilt. Es werde

$$(1 - \alpha)\delta = \varepsilon$$

und

$$\sum_{n=1}^x b_n = B_x$$

⁷²⁾ Nur das Umgekehrte ist trivial: Wenn $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$ für ein $s < 1$ konvergiert, so ist die obere

Grenze der reellen Teile der Nullstellen von $\zeta(s)$ kleiner als 1.

gesetzt; dann ist nach Voraussetzung

$$B_x = O(x^{\alpha+\varepsilon}).$$

Wenn ferner

$$\sum_{n=1}^x |b_n| = S_x$$

gesetzt wird, ist nach Voraussetzung

$$S_x = O(x^{1+\varepsilon}),$$

also

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^x \frac{|b_n|}{n^\lambda} &= \sum_{n=1}^x \frac{S_n - S_{n-1}}{n^\lambda} \\ &= \sum_{n=1}^x S_n \left(\frac{1}{n^\lambda} - \frac{1}{(n+1)^\lambda} \right) + \frac{S_x}{([x]+1)^\lambda} \\ &= O \sum_{n=1}^x n^{1+\varepsilon} \frac{1}{n^{1+\lambda}} + O(x^{1-\lambda+\varepsilon}) \\ &= O(x^{1-\lambda+\varepsilon}). \end{aligned}$$

Nun ist für $\sigma > \alpha$ und beliebiges ganzzahliges m

$$\begin{aligned} f(s) &= \sum_{n=1}^m \frac{b_n}{n^s} + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{B_n - B_{n-1}}{n^s} \\ &= \sum_{n=1}^m \frac{b_n}{n^s} + \sum_{n=m+1}^{\infty} B_n \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s} \right) - \frac{B_m}{(m+1)^s} \\ &= \sum_{n=1}^m \frac{b_n}{n^s} + s \sum_{n=m+1}^{\infty} B_n \int_n^{n+1} \frac{du}{u^{s+1}} - \frac{B_m}{(m+1)^s}, \end{aligned}$$

mit Rücksicht auf $\varepsilon < \lambda - \alpha$ also für $\lambda \leq \sigma \leq 2$, $t \geq 1$, wenn $m = [t^{\frac{1}{1-\alpha}}]$ gesetzt wird,

$$\begin{aligned} |f(s)| &< \sum_{n=1}^{t^{\frac{1}{1-\alpha}}} \frac{|b_n|}{n^\lambda} + (2+t) a_{131} \sum_{n=t^{\frac{1}{1-\alpha}+1}}^{\infty} n^{\alpha+\varepsilon} \frac{1}{n^{1+\lambda}} + a_{132} \frac{\left(t^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)^{\alpha+\varepsilon}}{\left(t^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)^\lambda} \\ &< a_{133} t^{\frac{1-\lambda}{1-\alpha} + \frac{\varepsilon}{1-\alpha}} + a_{134} t \cdot t^{\frac{1}{1-\alpha}(\alpha-\lambda+\varepsilon)} + a_{132} t^{\frac{1}{1-\alpha}(\alpha-\lambda+\varepsilon)} \\ &= a_{133} t^{\frac{1-\lambda}{1-\alpha} + \frac{\varepsilon}{1-\alpha}} + a_{134} t^{\frac{1-\lambda}{1-\alpha} + \frac{\varepsilon}{1-\alpha}} + a_{132} t^{\frac{\alpha-\lambda}{1-\alpha} + \frac{\varepsilon}{1-\alpha}} \\ &< a_{135} t^{\frac{1-\lambda}{1-\alpha} + \frac{\varepsilon}{1-\alpha}} \\ &= a_{135} t^{\frac{1-\lambda}{1-\alpha} + \delta}. \end{aligned}$$

Dieser Hilfssatz werde auf den Fall

$$b_n = T(n) - \log n - 2C$$

angewendet, wo $T(n)$ die Anzahl der Teiler von n und C die EULER'sche Konstante bezeichnet. Herr VORONOI ^{7a)} hat bewiesen, dass

$$\sum_{n=1}^x T(n) = x \log x + (2C - 1)x + O(\sqrt[3]{x} \log x)$$

^{7a)} Sur un problème du calcul des fonctions asymptotiques [Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. CXXVI (1903), S. 241-282].

ist; daher ist

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^x b_n &= x \log x + (2C - 1)x + O(\sqrt[3]{x} \log x) - x \log x + x - 2Cx \\ &= O(\sqrt[3]{x} \log x),\end{aligned}$$

also (207) für $s > \frac{1}{3}$ konvergent; ferner ist (207) für $s > 1$ absolut konvergent, und es ist

$$f(s) = \zeta^2(s) + \zeta'(s) - 2C\zeta(s).$$

Für $1 > \lambda > \frac{1}{3}$, $\delta > 0$ ist also im Gebiet $\sigma \geq \lambda$, $t \geq 1$

$$|f(s)| < a_{136} t^{\frac{3}{2}(1-\lambda)+\delta},$$

$$(209) \quad |\zeta^2(s)| < a_{136} t^{\frac{3}{2}(1-\lambda)+\delta} + |\zeta'(s)| + 2C|\zeta(s)|.$$

Nun ist für $2 \geq \sigma \geq \lambda$, $t \geq 2$ nach (24)

$$\begin{aligned}|\zeta(s)| &< \sum_{n=1}^{t+1} \frac{1}{n^\lambda} + \frac{1}{t-1} \frac{1}{([t]+1)^{\lambda-1}} + (2+t) \sum_{n=t+1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\lambda}} \\ &< a_{137} t^{1-\lambda} + a_{138} t^{-\lambda} + a_{139} t^{1-\lambda} \\ &< a_{140} t^{1-\lambda},\end{aligned}$$

also für $\sigma \geq \lambda$, $t \geq 1$

$$(210) \quad |\zeta(s)| < a_{141} t^{1-\lambda}.$$

Daraus folgt, wenn $\delta > 0$ und $\delta < \lambda - \frac{1}{3}$ gewählt wird, für $\sigma \geq \lambda - \delta$, $t \geq 1$

$$(211) \quad |\zeta(s)| < a_{142} t^{1-\lambda+\delta};$$

daher ist für $\sigma \geq \lambda$, $t \geq 1 + \delta$, wenn (211) auf den Kreis mit dem Mittelpunkt s und dem Radius δ angewendet wird,

$$\begin{aligned}|\zeta'(s)| &< \frac{a_{142}(t+\delta)^{1-\lambda+\delta}}{\delta} \\ &< a_{143} t^{1-\lambda+\delta},\end{aligned}$$

also ⁷⁴⁾, wenn $\delta > 0$ beliebig gegeben ist, für $\sigma \geq \lambda$, $t \geq 1$

$$(212) \quad |\zeta'(s)| < a_{144} t^{1-\lambda+\delta}.$$

Aus (209), (210) und (212) folgt für $\sigma \geq \lambda$, $t \geq 1$

$$\begin{aligned}|\zeta^2(s)| &< a_{136} t^{\frac{3}{2}(1-\lambda)+\delta} + a_{144} t^{1-\lambda+\delta} + a_{145} t^{1-\lambda} \\ &< a_{146} t^{\frac{3}{2}(1-\lambda)+\delta},\end{aligned}$$

⁷⁴⁾ Es liesse sich mittels direkter Behandlung der durch Differentiation aus (24) entstehenden Reihe für $\zeta'(s)$ leicht auf der rechten Seite von (212) t^δ durch $\log t$ ersetzen; aber für meinen Zweck genügt die Gestalt des Textes.

also ⁷⁵⁾ bei gegebenem $\delta > 0$ für $\sigma \geq \lambda$, $t \geq 1$

$$(213) \quad |\zeta(s)| < a_{147} t^{\frac{3}{4}(1-\lambda)+\delta}.$$

Es sei nun wahr, dass für $\sigma > \frac{1}{2}$

$$\zeta(s) \neq 0$$

ist, und $1 > \lambda > \frac{1}{2}$, $\delta > 0$; dann ist für $\sigma \geq \lambda$, $t \geq 1$

$$F(s) = \log \zeta(s)$$

regulär und nach (213)

$$\Re F(s) < a_{148} + \left(\frac{3}{4}(1-\lambda) + \delta\right) \log t,$$

also für $t \geq t_0$, $\sigma \geq \lambda$

$$(214) \quad \Re F(s) < \left(\frac{3}{4}(1-\lambda) + 2\delta\right) \log t.$$

In

$$(215) \quad |\Re F(s)| \leq |\beta| \frac{r+\rho}{r-\rho} + 2A \frac{\rho}{r-\rho} \quad (|s-s_0| \leq \rho < r)$$

setze ich nun

$$s_0 = 1 + ti$$

und nehme

$$0 < \rho < r < \frac{1}{2}$$

an, wobei die genauere Verfügung über die von t unabhängigen Konstanten ρ und r noch vorbehalten bleibt. Wenn in (214)

$$\lambda = 1 - r$$

gesetzt wird, so ergibt sich, da für $t \geq t_0 + r$ der Kreis $|s-s_0| \leq r$ dem Gebiete $t \geq t_0$, $\sigma \geq \lambda$ angehört, aus (214) für $t \geq t_0 + r$ auf diesem Kreise

$$\Re F(s) < \left(\frac{3}{4}r + 2\delta\right) \log(t+r),$$

also für $t \geq t_1$ auf dem Kreise

$$\Re F(s) < \left(\frac{3}{4}r + 3\delta\right) \log t.$$

Ferner ist für $t \geq t_1$ wegen

$$\zeta(1+ti) = O(\log t)$$

nebst

$$\frac{1}{\zeta(1+ti)} = O(\log^c t)$$

$$|\beta| = |\Re \log \zeta(1+ti)| = |\log |\zeta(1+ti)|| \\ < a_{149} \log \log t.$$

⁷⁵⁾ Es liesse sich leicht in (213) rechts t^δ durch $\sqrt[3]{\log t}$ ersetzen; doch kommt es für meine Zwecke nur auf den Exponenten von t an. Übrigens habe ich (213) für $\sigma = \beta$, $t \geq 1$ (in der Fassung mit $\sqrt[3]{\log t}$) schon früher bewiesen; vergl. meine Arbeit *Sur quelques inégalités dans la théorie de la fonction $\zeta(s)$ de RIEMANN* [Bulletin de la Société Mathématique de France, Bd. XXXIII (1905), S. 229-241], S. 232-237, sowie S. 128-129 meiner in Anm. 32) zitierten Abhandlung. Für meinen gegenwärtigen Zweck gebrauchte ich aber die — nicht viel tiefer liegende — Tatsache, dass die Abschätzung gleichmässig für alle $\sigma \geq \beta$ gilt.

(215) liefert also für $t \geq t_1$, $|s - 1 - ti| \leq \rho < r < \frac{1}{2}$

$$|\Re F(s)| < a_{149} \log \log t \frac{r + \rho}{r - \rho} + \left(\frac{3}{2}r + 6\delta\right) \log t \frac{\rho}{r - \rho},$$

folglich für $t \geq t_2$, $|s - 1 - ti| \leq \rho < r < \frac{1}{2}$

$$|\Re F(s)| < \left(\frac{3}{2}r + 7\delta\right) \log t \frac{\rho}{r - \rho}.$$

Wenn

$$7\delta \frac{\rho}{r - \rho} = \varepsilon$$

gesetzt wird, so ist also für $t \geq t_2$, $|s - 1 - ti| \leq \rho < r < \frac{1}{2}$

$$\log |\zeta(s)| = \Re \log \zeta(s) = \Re F(s) > - \left(\frac{3}{2}r \frac{\rho}{r - \rho} + \varepsilon\right) \log t,$$

$$\left| \frac{1}{\zeta(s)} \right| < t^{\frac{3}{2} \frac{r\rho}{r - \rho} + \varepsilon}$$

Für $t \geq 1$, $|s - 1 - ti| \leq \rho < r < \frac{1}{2}$ ist daher

$$\left| \frac{1}{\zeta(s)} \right| < a_{150} t^{\frac{3}{2} \frac{r\rho}{r - \rho} + \varepsilon}.$$

Speziell für $t \geq 1$, $1 - \rho \leq \sigma \leq 1 + \rho$, wo $0 < \rho < \frac{1}{2}$ ist, ist also, wenn r irgend eine Zahl zwischen ρ und $\frac{1}{2}$ bezeichnet und $\varepsilon > 0$ ist,

$$\left| \frac{1}{\zeta(\sigma + ti)} \right| < a_{150} t^{\frac{3}{2} \frac{r\rho}{r - \rho} + \varepsilon}$$

Da für $\sigma \geq 1 + \rho$

$$\left| \frac{1}{\zeta(s)} \right| < a_{151}$$

ist, ist also für $|t| \geq 1$, $\sigma \geq 1 - \rho$, falls $0 < \rho < r < \frac{1}{2}$ und $\varepsilon > 0$ ist,

$$(216) \quad \left| \frac{1}{\zeta(s)} \right| < a_{152} |t|^{\frac{3}{2} \frac{r\rho}{r - \rho} + \varepsilon}.$$

Der Satz (IX) ist demnach auf die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \frac{1}{\zeta(s)}$$

anwendbar und liefert offenbar das vorteilhafteste Resultat, wenn der Exponent von $|t|$ auf der rechten Seite von (216) kleiner als 1 ist und dabei (216) möglichst weit giltig ist. Die Ungleichung

$$(217) \quad \frac{3}{2} \frac{r\rho}{r - \rho} < 1$$

mit den Nebenbedingungen

$$0 < \rho < r < \frac{1}{2}$$

liefert für ρ die obere Grenze $\frac{2}{7}$. Denn aus (217) folgt

$$\rho < \frac{r}{\frac{3}{2}r + 1},$$

was von selbst $< r$ ist, und, wenn r nahe an $\frac{1}{2}$ liegt, liegt ρ nahe an $\frac{2}{7}$. Also ist für jedes $\eta > \frac{5}{7}$ im Gebiet $|t| \geq 1$, $\sigma \geq \eta$

$$\left| \frac{1}{\zeta(s)} \right| < B |t|^k,$$

wo $k < 1$ ist; nach dem Satz (IX) ist also

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$$

für

$$\begin{aligned} \Re(s) &> 1 - \frac{1 - \frac{5}{7}}{2} \\ &= \frac{6}{7} \end{aligned}$$

konvergent, wenn die RIEMANN'sche Vermutung richtig ist.

Damit habe ich, wie oben angekündigt, die vorangehenden Entwicklungen bis zur numerischen Angabe einer nicht allzu nahe an 1 gelegenen Schranke verschärft; vielleicht untersucht ein Leser genauer, wieweit dies $\frac{6}{7}$ noch erniedrigt werden kann. Ich schaue nicht gern zu weit einem Wege nach, vor dem noch ein Abgrund liegt, der vielleicht nie ausgefüllt werden wird.

§ 14.

SATZ (X). — Die DIRICHLET'sche Reihe

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s}$$

sei für $\Re(s) > \alpha$ konvergent. Dann existiert für jedes reelle $\sigma > \alpha$ der Grenzwert

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} f(\sigma + ti) dt$$

und ist $= b_1$.

Beweis: Da die Reihe

$$f(\sigma + ti) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^{\sigma+ti}}$$

für $0 \leq t \leq \omega$ gleichmäßig konvergiert, ist

$$\begin{aligned} \int_0^{\omega} f(\sigma + ti) dt &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^{\sigma}} \int_0^{\omega} \frac{dt}{n^{ti}} \\ &= b_1 \omega - i \sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_n}{n^{\sigma} \log n} \left(1 - \frac{1}{n^{\omega i}} \right) \\ (218) \quad &= b_1 \omega + c + i \sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_n}{n^{\sigma+\omega i} \log n}, \end{aligned}$$

wo c von ω unabhängig ist.

Aus der Konvergenz von

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s}$$

für $\Re(s) > \alpha$ folgt unmittelbar die Konvergenz von

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_n}{n^s \log n}$$

für $\Re(s) > \alpha$; genauer ergibt sich wegen

$$S_x = \sum_{n=2}^x \frac{b_n}{n^{\alpha+\delta} \log n} = O(1),$$

wo δ jede positive Zahl bedeuten kann und $< \sigma - \alpha$ gewählt sei, für festes $\sigma > \alpha$ und wachsendes ω , falls $\sigma \leq \alpha + 1$ ist,

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_n}{n^{\sigma+\omega i} \log n} &= \sum_{n=2}^{\omega} \frac{b_n}{n^{\sigma+\omega i} \log n} + \sum_{n=\omega+1}^{\infty} \frac{S_n - S_{n-1}}{n^{\sigma-\alpha-\delta+\omega i}} \\ &= \sum_{n=2}^{\omega} \frac{b_n}{n^{\sigma+\omega i} \log n} + (\sigma - \alpha - \delta + \omega i) \sum_{n=\omega+1}^{\infty} S_n \int_n^{n+1} \frac{du}{u^{1+\sigma-\alpha-\delta+\omega i}} - \frac{S_{\omega}}{([\omega] + 1)^{\sigma-\alpha-\delta+\omega i}} \\ &= O \sum_{n=2}^{\omega} \frac{|b_n|}{n^{\sigma}} + O \left(\omega \sum_{n=\omega+1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\sigma-\alpha-\delta}} \right) + O \left(\frac{1}{\omega^{\sigma-\alpha-\delta}} \right) \\ &= O \sum_{n=2}^{\omega} \frac{n^{\alpha+\delta}}{n^{\sigma}} + O(\omega \cdot \omega^{\alpha-\sigma+\delta}) + O(\omega^{\alpha-\sigma+\delta}) \\ (219) \quad &= O(\omega^{1+\alpha-\sigma+\delta}); \end{aligned}$$

falls $\sigma > \alpha + 1$ ist, ist wegen der absoluten Konvergenz

$$(220) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_n}{n^{\sigma+\omega i} \log n} = O(1).$$

In jedem Falle folgt aus (219) oder (220)

$$(221) \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{\omega} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_n}{n^{\sigma+\omega i} \log n} = 0,$$

und (218), (221) ergeben vereinigt, dass

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} f(\sigma + ti) dt = b_1$$

ist, was zu beweisen war.

Dies benutze ich jetzt zu dem (bisher nirgends gelieferten) Nachweise, dass das formal gebildete Produkt zweier für $s > \alpha$ konvergenter DIRICHLET'scher Reihen nicht stets für $s > \alpha$ konvergiert. Wäre dies doch der Fall, so wäre, wie ich a. a. O. ⁷⁶⁾ bewiesen habe, für $\frac{1}{2} < \sigma < 1$ und jedes $\delta > 0$

$$\zeta(\sigma + ti) = O(t^{\frac{1}{2}-\sigma+\delta}),$$

⁷⁶⁾ Vergl. S. 124 der in Anm. ³²⁾ zitierten Abhandlung.

also gewiss für $\frac{1}{2} < \sigma < 1$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \zeta(\sigma + ti) = 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (1 - 2^{1-\sigma-ti}) \zeta(\sigma + ti) = 0,$$

folglich a fortiori

$$(222) \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} (1 - 2^{1-\sigma-ti}) \zeta(\sigma + ti) dt = 0.$$

Die DIRICHLET'sche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}$$

konvergiert nun für $\Re(s) > 0$ und stellt dort die Funktion $(1 - 2^{1-s})\zeta(s)$ dar. Nach dem Satz (X) ist also

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} (1 - 2^{1-\sigma-ti}) \zeta(\sigma + ti) dt = 1,$$

im Gegensatz zu (222).

§ 15.

Aus den Voraussetzungen des Satzes (X) folgt wegen

$$\int_{-\omega}^{\omega} f(\sigma + ti) dt = 2b_1\omega + i \sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_n}{n^{\sigma+\omega i} \log n} - i \sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_n}{n^{\sigma-\omega i} \log n}$$

durch die Schlüsse des § 14 auch, dass

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} f(\sigma + ti) dt = b_1$$

ist. Herr HADAMARD hatte folgenden merkwürdigen Satz ⁷⁷⁾ bewiesen, welcher (da er absolute Konvergenz voraussetzt) dies nicht als Spezialfall enthält, mich aber zur Auffindung des für meine Zwecke so nützlichen Satzes (X) und einer Reihe anderer Erweiterungen für das Gebiet bedingter Konvergenz angeregt hat:

Wenn die DIRICHLET'sche Reihe

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s}$$

⁷⁷⁾ Vergl. das Zitat in Anm. ³⁴⁾. Auf den von Herrn HADAMARD genau ebenso im absoluten Konvergenzbereich behandelten allgemeineren Reihentypus $\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\lambda_n s}$ gehe ich hier nicht ein, da ich bereits für die DIRICHLET'schen Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s},$$

welche namentlich in der Zahlentheorie angewandt werden, Neues bringe. Natürlich ist auch für den allgemeinen Reihentypus durch meine Methode die Ausdehnung des HADAMARD'schen Satzes unter entsprechenden Voraussetzungen über die Grenzgerade absoluter Konvergenz hinaus möglich.

für $\Re(s) = \beta$ und die DIRICHLET'sche Reihe

$$g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s}$$

für $\Re(s) = \gamma$ absolut konvergiert, so existiert für positives ω

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} f(\beta + ti) g(\gamma - ti) dt$$

und ist

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n c_n}{n^{\beta+\gamma}}.$$

Herr HADAMARD bewies dies folgendermassen. In der Doppelreihe

$$\begin{aligned} f(\beta + ti) g(\gamma - ti) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^{\beta+ti}} \frac{c_m}{m^{\gamma-ti}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n c_n}{n^{\beta+\gamma}} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{m=1 \\ n \geq m}}^{\infty} \frac{b_n c_m}{n^{\beta} m^{\gamma}} \left(\frac{m}{n}\right)^{ti} \end{aligned}$$

konvergiert die Summe der absoluten Beträge, und zwar gleichmässig für alle t . Daher ist zunächst

$$\int_{-\omega}^{\omega} f(\beta + ti) g(\gamma - ti) dt = 2\omega \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n c_n}{n^{\beta+\gamma}} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{m=1 \\ n \geq m}}^{\infty} \frac{b_n c_m}{n^{\beta} m^{\gamma}} \int_{-\omega}^{\omega} \left(\frac{m}{n}\right)^{ti} dt,$$

also wegen

$$\begin{aligned} \int_{-\omega}^{\omega} \left(\frac{m}{n}\right)^{ti} dt &= \frac{1}{i \log \frac{m}{n}} \left(\left(\frac{m}{n}\right)^{\omega i} - \left(\frac{m}{n}\right)^{-\omega i} \right) \\ &= \frac{2 \sin \left(\omega \log \frac{m}{n} \right)}{\log \frac{m}{n}} \end{aligned}$$

$$(223) \quad \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} f(\beta + ti) g(\gamma - ti) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n c_n}{n^{\beta+\gamma}} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{m=1 \\ n \geq m}}^{\infty} \frac{b_n c_m}{n^{\beta} m^{\gamma}} \frac{\sin \left(\omega \log \frac{m}{n} \right)}{\omega \log \frac{m}{n}}.$$

Die Doppelreihe auf der rechten Seite von (223) ist für alle $\omega > 0$ gleichmässig konvergent, da stets

$$\left| \frac{\sin \left(\omega \log \frac{m}{n} \right)}{\omega \log \frac{m}{n}} \right| < 1$$

ist und

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|b_n| |c_m|}{n^{\beta} m^{\gamma}}$$

konvergiert; ferner hat jedes Glied der Doppelreihe für $\omega = \infty$ den Limes 0; aus (223) folgt daher die Behauptung

$$(224) \quad \lim_{\omega=\infty} \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} f(\beta + ti) g(\gamma - ti) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n c_n}{n^{\beta+\gamma}}.$$

Wenn speziell für alle n

$$b_n = c_n,$$

also

$$f(s) = g(s)$$

ist, so ist nach (224)

$$(225) \quad \lim_{\omega=\infty} \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} f(\beta + ti) f(\gamma - ti) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n^2}{n^{\beta+\gamma}},$$

wenn nur die Reihe für $\Re(s) = \beta$ und $\Re(s) = \gamma$ absolut konvergiert. Noch spezieller ist, wenn $f(s)$ reelle Koeffizienten hat und für $\Re(s) = \beta$ absolut konvergiert, wie sich für $\gamma = \beta$ aus (225) ergibt,

$$(226) \quad \lim_{\omega=\infty} \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} |f(\beta + ti)|^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n^2}{n^{2\beta}}.$$

Wenn $f(s)$ für $\Re(s) = \beta$ absolut konvergiert und komplexe Koeffizienten hat, folgt aus (224), indem $g(s)$ die Reihe mit konjugiert komplexen Koeffizienten bezeichnet,

$$\lim_{\omega=\infty} \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} |f(\beta + ti)|^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|b_n|^2}{n^{2\beta}}.$$

Von (226) hat Herr HADAMARD eine interessante Folgerung über die RIEMANN'sche Zetafunktion gezogen und an diese eine Frage geknüpft, welche ich durch Ausdehnung des HADAMARD'schen Satzes auf ein Stück des Streifens bedingter Konvergenz einer DIRICHLET'schen Reihe zu beantworten imstande bin. Herr HADAMARD ⁷⁸⁾ schloss für

$$\begin{aligned} f(s) &= \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s}, \end{aligned}$$

wo $\lambda(n)$ die bekannte LIOUVILLE'sche zahlentheoretische Funktion

$$\lambda(n) = (-1)^{\alpha_1 + \dots + \alpha_v} \quad \text{für } n = p_1^{\alpha_1} \dots p_v^{\alpha_v}$$

bezeichnet, im Falle $\beta > 1$ mit Rücksicht auf

$$\lambda^2(n) = 1$$

aus (226) die Gleichung

$$(227) \quad \lim_{\omega=\infty} \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} \left| \frac{\zeta(2\beta + 2ti)}{\zeta(\beta + ti)} \right|^2 dt = \zeta(2\beta).$$

Er bemerkte, dass auch im Falle der Richtigkeit der RIEMANN'schen Vermutung, d. h.

⁷⁸⁾ l. c., S. 62-63.

im Falle, dass

$$\frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)}$$

für $\Re(s) > \frac{1}{2}$ regulär ist, die Gleichung (227) für kein $\beta \leq 1$ bewiesen sei und dass sogar nicht einmal feststehe, ob aus der Richtigkeit der RIEMANN'schen Vermutung die Existenz des Limes auf der linken Seite von (227) folgen würde. Ich kann aber jetzt doch beweisen: Im Falle der Richtigkeit der RIEMANN'schen Vermutung und bereits in dem Falle, dass die obere Grenze $\mathfrak{z}$ der reellen Teile der Nullstellen von $\zeta(s)$ kleiner als 1 ist, gilt (227) für $\beta = 1$ und gewisse $\beta < 1$. Aus $\mathfrak{z} < 1$ folgt nämlich nach § 13 die Konvergenz von

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$$

für $s > \alpha$, wo $\alpha < 1$ ist. Also folgt auch die Konvergenz von

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s}$$

für $s > \alpha$; dies kann man analog direkt beweisen oder aus

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2s}}$$

nach dem Satz von STIELTJES ⁷⁹⁾ schliessen: Das formal gebildete Produkt einer konvergenten und einer absolut konvergenten DIRICHLET'schen Reihe konvergiert. Die Gültigkeit von (227) für $\beta = 1$ und gewisse $\beta < 1$ ist unter der Annahme der Richtigkeit der RIEMANN'schen Vermutung gewiss bewiesen, wenn ich nachweisen kann ⁸⁰⁾:

SATZ (XI). — Es sei

$$(228) \quad b_n = O(1),$$

$$(229) \quad c_n = O(1),$$

also a fortiori

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s}$$

und

$$g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s}$$

für $s > 1$ absolut konvergent. Diese Reihen seien ferner für $s > \alpha$, wo $0 \leq \alpha < 1$ ist, konvergent. Dann ist für

$$(230) \quad \beta > \alpha + \frac{7 - \sqrt{17}}{4} (1 - \alpha)$$

$$(231) \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} f(\beta + ti) g(\beta - ti) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n c_n}{n^{2\beta}}.$$

⁷⁹⁾ Note sur la multiplication de deux séries [Nouvelles Annales de Mathématiques, Ser. III, Bd. VI (1887), S. 210-215], S. 214.

⁸⁰⁾ Satz (XI) ist natürlich von der RIEMANN'schen Vermutung unabhängig und steht auf festem Boden.

Aus diesem Satz (XI) folgt auch: Wenn die obere Grenze der reellen Teile der Nullstellen von $\zeta(s)$ kleiner als 1 ist, so ist für $\beta = 1$ und gewisse $\beta < 1$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} \frac{1}{|\zeta(\beta + ti)|^2} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\mu(n))^2}{n^{2\beta}} \\ = \sum_q \frac{1}{q^{2\beta}},$$

wo q alle quadratfreien Zahlen durchläuft, also

$$= \frac{\zeta(2\beta)}{\zeta(4\beta)}.$$

Ich führe nun den Beweis des Satzes (XI) genau durch, obgleich ich nachher einen viel allgemeineren Satz beweisen werde; aber ich möchte dem Leser das Eindringen in die etwas komplizierte Beweismethode erleichtern. Zur Orientierung über die Voraussetzung (230) bemerke ich zunächst, dass

$$\frac{7 - \sqrt{17}}{4} = 0,719 \dots \\ < 1,$$

also

$$\alpha + \frac{7 - \sqrt{17}}{4} (1 - \alpha) < 1$$

ist, so dass der Satz nicht nur — wie schon durch Herrn HADAMARD bekannt ist — in dem Gebiete absoluter Konvergenz (inkl. seines Randes, wenn die Reihen dort absolut konvergieren) die Giltigkeit von (231) feststellt, sondern auch in einem gewissen Streifen des Gebietes der bedingten Konvergenz.

Beweis des Satzes (XI): Die Reihe auf der rechten Seite von (231) konvergiert jedenfalls wegen

$$2\beta > 1$$

und

$$\frac{b_n c_n}{n^{2\beta}} = O\left(\frac{1}{n^{2\beta}}\right).$$

Für $\beta > 1$ ist der Satz durch Herrn HADAMARD bekannt; ich darf daher $\beta \leq 1$ annehmen und habe ihn also für

$$\alpha + \frac{7 - \sqrt{17}}{4} (1 - \alpha) < \beta \leq 1$$

zu beweisen. Wenn δ eine beliebige positive Grösse ist, so ergibt sich aus den Voraussetzungen zunächst

$$B_x = \sum_{n=1}^x b_n = O(x^{\alpha+\delta}),$$

$$C_x = \sum_{n=1}^x c_n = O(x^{\alpha+\delta}).$$

Für positives wachsendes t ist nach dem in § 13 durch die Formel (208) bewiesenen

Hilfssatz, der hier nur auf den Fall einer einzigen vertikalen Geraden angewendet wird,

$$(232) \quad f(\beta + ti) = O(t^{\frac{1-\beta}{1-\alpha}+\delta});$$

genau derselbe Beweis lehrt, dass

$$(233) \quad f(\beta - ti) = O(t^{\frac{1-\beta}{1-\alpha}+\delta})$$

ist ⁸¹⁾. Ebenso ist

$$(234) \quad g(\beta + ti) = O(t^{\frac{1-\beta}{1-\alpha}+\delta}),$$

$$(235) \quad g(\beta - ti) = O(t^{\frac{1-\beta}{1-\alpha}+\delta}).$$

Ferner ergibt sich für konstantes positives ρ , wenn ω positiv unendlich wird und $-\omega \leq t \leq \omega$ ist, gleichmässig ⁸²⁾ für alle diese t

$$\sum_{n=\omega^{\rho+1}}^{\infty} \frac{b_n}{n^{\beta+ti}} = (\beta + ti) \sum_{n=\omega^{\rho+1}}^{\infty} B_n \int_n^{\omega^{n+1}} \frac{du}{u^{t+\beta+ti}} - \frac{B_{\omega^{\rho}}}{([\omega^{\rho}] + 1)^{\beta+ti}},$$

also, wenn ein positives $\delta < \beta - \alpha$ gewählt wird,

$$\begin{aligned} \sum_{n=\omega^{\rho+1}}^{\infty} \frac{b_n}{n^{\beta+ti}} &= O\left(\omega \sum_{n=\omega^{\rho+1}}^{\infty} n^{\alpha+\delta} \frac{1}{n^{1+\beta}}\right) + O(\omega^{\rho(\alpha-\beta+\delta)}) \\ &= O(\omega^{1-\rho(\beta-\alpha)+\rho\delta}), \end{aligned}$$

folglich für $0 < \delta < \rho(\beta - \alpha)$

$$(236) \quad \sum_{n=\omega^{\rho+1}}^{\infty} \frac{b_n}{n^{\beta+ti}} = O(\omega^{1-\rho(\beta-\alpha)+\delta});$$

da (236) für diese δ bewiesen ist, gilt ⁸³⁾ es a fortiori für alle $\delta > 0$; ebenso ergibt sich

$$(237) \quad \sum_{n=\omega^{\rho+1}}^{\infty} \frac{c_n}{n^{\beta-ti}} = O(\omega^{1-\rho(\beta-\alpha)+\delta}).$$

⁸¹⁾ (233) folgt auch aus (232), wenn man den Satz (232) auf die Reihe

$$\bar{f}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{b}_n}{n^s}$$

anwendet und

$$|f(\beta - ti)| = |\bar{f}(\beta + ti)|$$

berücksichtigt.

⁸²⁾ D. h. das Zeichen $O(\varphi(\omega))$ bezeichnet eine Funktion von t und ω , deren Quotient durch $\varphi(\omega)$ für alle hinreichend grossen ω nebst $|t| \leq \omega$ dem absoluten Betrage nach unterhalb einer von t und ω unabhängigen Schranke liegt.

⁸³⁾ Für einen späteren Zweck mache ich darauf aufmerksam, dass dieser Beweis von (236) und (237) für alle $\beta > \alpha$ (auch für $\beta > 1$) gilt und dass auch die Voraussetzungen (228), (229) nicht benutzt wurden. Dagegen sind die vorangehenden Relationen (232) bis (235) offenbar für $\beta > 1$ nicht gültig, da sonst stets

$$\lim_{t=\infty} f(\beta + ti) = 0$$

sein müsste.

ρ sei nun im Falle $\beta < 1$ so gewählt, dass

$$(238) \quad \frac{2 - \beta - \alpha}{(1 - \alpha)(\beta - \alpha)} < \rho < \frac{1}{2(1 - \beta)}$$

ist, im Falle $\beta = 1$ so, dass die erste der beiden Ungleichungen (238) erfüllt ist. Eine solche Wahl ist nach (230) möglich; denn aus

$$1 \geq \frac{\beta - \alpha}{1 - \alpha} > \frac{7 - \sqrt{17}}{4}$$

folgt

$$(239) \quad 4 - 7 \frac{\beta - \alpha}{1 - \alpha} + 2 \left(\frac{\beta - \alpha}{1 - \alpha} \right)^2 < 0,$$

da die quadratische Gleichung

$$4 - 7y + 2y^2 = 0$$

die Wurzeln

$$\frac{7 \pm \sqrt{17}}{4}$$

besitzt, und aus (239) ergibt sich weiter

$$4(1 - \alpha)^2 - 7(1 - \alpha)(\beta - \alpha) + 2(\beta - \alpha)^2 < 0,$$

$$2(1 - \beta)(2 - \beta - \alpha) < (1 - \alpha)(\beta - \alpha),$$

also im Fall $\beta < 1$

$$(240) \quad \frac{2 - \beta - \alpha}{(1 - \alpha)(\beta - \alpha)} < \frac{1}{2(1 - \beta)},$$

so dass ρ zwischen beiden Seiten von (240) eingeschoben werden kann.

Ich zerlege nun die Summen $f(\beta + ti)$ und $g(\beta - ti)$ in je zwei Teile und setze

$$\begin{aligned} f(\beta + ti) &= \sum_{n=1}^{\omega^{\rho}} \frac{b_n}{n^{\beta+ti}} + \sum_{n=\omega^{\rho}+1}^{\infty} \frac{b_n}{n^{\beta+ti}} \\ &= \Sigma_1 + \Sigma_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(\beta - ti) &= \sum_{n=1}^{\omega^{\rho}} \frac{c_n}{n^{\beta-ti}} + \sum_{n=\omega^{\rho}+1}^{\infty} \frac{c_n}{n^{\beta-ti}} \\ &= \Sigma_3 + \Sigma_4. \end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} f(\beta + ti)g(\beta - ti) &= (\Sigma_1 + \Sigma_2)(\Sigma_3 + \Sigma_4) \\ &= \Sigma_1 \Sigma_3 + (\Sigma_1 + \Sigma_2) \Sigma_4 + \Sigma_2(\Sigma_3 + \Sigma_4) - \Sigma_2 \Sigma_4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\omega}^{\omega} f(\beta + ti)g(\beta - ti)dt &= \int_{-\omega}^{\omega} \Sigma_1 \Sigma_3 dt + \int_{-\omega}^{\omega} (\Sigma_1 + \Sigma_2) \Sigma_4 dt + \int_{-\omega}^{\omega} \Sigma_2(\Sigma_3 + \Sigma_4) dt - \int_{-\omega}^{\omega} \Sigma_2 \Sigma_4 dt \\ (241) \quad &= F_1(\omega) + F_2(\omega) + F_3(\omega) + F_4(\omega). \end{aligned}$$

Nach (236) und (237) ist gleichmässig für $-\omega \leq t \leq \omega$

$$(242) \quad \Sigma_2 = O(\omega^{1-\rho(\beta-\alpha)+\delta}),$$

$$(243) \quad \Sigma_4 = O(\omega^{1-\rho(\beta-\alpha)+\delta}).$$

Aus der ersten Hälfte von (238) folgt wegen $\beta \leq 1$

$$\begin{aligned} \rho &> \frac{2 - \beta - \alpha}{1 - \alpha} \frac{1}{\beta - \alpha} \\ &= \left(1 + \frac{1 - \beta}{1 - \alpha}\right) \frac{1}{\beta - \alpha} \\ &\geq \frac{1}{\beta - \alpha}. \end{aligned}$$

Nach (242), (243) ist also gleichmässig für $-\omega \leq t \leq \omega$

$$\lim_{\omega=\infty} \Sigma_2 = 0,$$

$$\lim_{\omega=\infty} \Sigma_4 = 0,$$

also

$$\lim_{\omega=\infty} \Sigma_2 \Sigma_4 = 0.$$

Folglich ist a fortiori

$$\begin{aligned} \lim_{\omega=\infty} \frac{1}{\omega} F_4(\omega) &= - \lim_{\omega=\infty} \frac{1}{\omega} \int_{-\omega}^{\omega} \Sigma_2 \Sigma_4 dt \\ &= 0. \end{aligned} \quad (244)$$

Aus (232) und (235) folgt gleichmässig für $-\omega \leq t \leq \omega$

$$\Sigma_1 + \Sigma_2 = O(\omega^{\frac{1-\beta}{1-\alpha}+\delta}), \quad (245)$$

$$\Sigma_3 + \Sigma_4 = O(\omega^{\frac{1-\beta}{1-\alpha}+\delta}). \quad (246)$$

(245) und (243) ergeben

$$\begin{aligned} (\Sigma_1 + \Sigma_2) \Sigma_4 &= O(\omega^{1-\rho(\beta-\alpha)+\frac{1-\beta}{1-\alpha}+2\delta}) \\ &= O(\omega^{\frac{2-\beta-\alpha}{1-\alpha}-\rho(\beta-\alpha)+2\delta}). \end{aligned}$$

Nach der ersten Hälfte von (238) ist

$$\frac{2 - \beta - \alpha}{1 - \alpha} - \rho(\beta - \alpha) < 0;$$

daher ist gleichmässig

$$\lim_{\omega=\infty} (\Sigma_1 + \Sigma_2) \Sigma_4 = 0,$$

also

$$\begin{aligned} \lim_{\omega=\infty} \frac{1}{\omega} F_2(\omega) &= \lim_{\omega=\infty} \frac{1}{\omega} \int_{-\omega}^{\omega} (\Sigma_1 + \Sigma_2) \Sigma_4 dt \\ &= 0. \end{aligned} \quad (247)$$

Ebenso folgt aus (246) und (242)

$$\lim_{\omega=\infty} \frac{1}{\omega} F_3(\omega) = 0. \quad (248)$$

Aus (241), (244), (247) und (248) ergibt sich

$$\lim_{\omega=\infty} \left(\frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} f(\beta + ti) g(\beta - ti) dt - \frac{F_1(\omega)}{2\omega} \right) = 0. \quad (249)$$

Was nun $F_1(\omega)$ betrifft, so ist

$$\begin{aligned} \Sigma_1 \Sigma_3 &= \sum_{n=1}^{\omega^0} \frac{b_n}{n^{\beta+ti}} \sum_{m=1}^{\omega^0} \frac{c_m}{m^{\beta-ti}} \\ &= \sum_{n=1}^{\omega^0} \frac{b_n c_n}{n^{2\beta}} + \sum_{n=1}^{\omega^0} \sum_{\substack{m=1 \\ n \geq m}}^{\omega^0} \frac{b_n c_m}{n^\beta m^\beta} \left(\frac{m}{n}\right)^{ti}, \\ F_1(\omega) &= \int_{-\omega}^{\omega} \Sigma_1 \Sigma_3 dt = 2\omega \sum_{n=1}^{\omega^0} \frac{b_n c_n}{n^{2\beta}} + \sum_{n=1}^{\omega^0} \sum_{\substack{m=1 \\ n \geq m}}^{\omega^0} \frac{b_n c_m}{n^\beta m^\beta} \int_{-\omega}^{\omega} \left(\frac{m}{n}\right)^{ti} dt, \\ \frac{F_1(\omega)}{2\omega} - \sum_{n=1}^{\omega^0} \frac{b_n c_n}{n^{2\beta}} &= \frac{1}{2\omega} \sum_{n=1}^{\omega^0} \sum_{\substack{m=1 \\ n \geq m}}^{\omega^0} \frac{b_n c_m}{n^\beta m^\beta} \frac{\left(\frac{m}{n}\right)^{\omega i} - \left(\frac{m}{n}\right)^{-\omega i}}{i \log \frac{m}{n}}, \\ \left| \frac{F_1(\omega)}{2\omega} - \sum_{n=1}^{\omega^0} \frac{b_n c_n}{n^{2\beta}} \right| &\leq \frac{1}{\omega} \sum_{n=1}^{\omega^0} \sum_{\substack{m=1 \\ n \geq m}}^{\omega^0} \frac{|b_n| |c_m|}{n^\beta m^\beta} \frac{1}{\left| \log \frac{m}{n} \right|} \\ (250) \quad &= O\left(\frac{1}{\omega} \sum_{n=1}^{\omega^0} \frac{1}{n^\beta} \sum_{\substack{m=1 \\ m \geq n}}^{\omega^0} \frac{1}{m^\beta} \frac{1}{\left| \log \frac{m}{n} \right|} \right). \end{aligned}$$

Nach (249) und (250) ist die Behauptung (231) des Satzes (XI) bewiesen, wenn die Richtigkeit der Gleichung

$$\lim_{\omega=\infty} \frac{1}{\omega} \sum_{n=1}^{\omega^0} \frac{1}{n^\beta} \sum_{\substack{m=1 \\ m \geq n}}^{\omega^0} \frac{1}{m^\beta} \frac{1}{\left| \log \frac{m}{n} \right|} = 0$$

festgestellt werden kann, und aus Symmetriegründen brauchen nur die Wertepaare m, n berücksichtigt zu werden, bei denen $m < n$ ist, d. h. es ist hinreichend, die Gleichung

$$(251) \quad \lim_{\omega=\infty} \frac{1}{\omega} \sum_{n=2}^{\omega^0} \frac{1}{n^\beta} \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m^\beta} \frac{1}{\log \frac{n}{m}} = 0$$

zu beweisen.

Dies geschieht folgendermassen. Es ist für $n > 2$

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m^\beta} \frac{1}{\log \frac{n}{m}} &= \sum_{m=1}^{\frac{n}{2}} \frac{1}{m^\beta} \frac{1}{\log \frac{n}{m}} + \sum_{m=\frac{n}{2}+1}^{n-1} \frac{1}{m^\beta} \frac{1}{\log \frac{n}{m}} \\ &< \frac{1}{\log 2} \sum_{m=1}^{\frac{n}{2}} \frac{1}{m^\beta} + \left(\frac{n}{2}\right)^\beta \sum_{m=\frac{n}{2}+1}^{n-1} \frac{1}{\log \frac{n}{m}}. \end{aligned}$$

Hierin ist, wenn sich die Abschätzung auf grosse n bezieht,

$$\left. \sum_{m=1}^{\frac{n}{2}} \frac{1}{m^\beta} \right\} = O(n^{1-\beta}) \text{ für } \beta < 1,$$

$$\left. \sum_{m=1}^{\frac{n}{2}} \frac{1}{m^\beta} \right\} = O(\log n) \text{ für } \beta = 1,$$

also in beiden Fällen

$$= O(n^{1-\beta} \log n).$$

Daher ist

$$\sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m^\beta} \frac{1}{\log \frac{n}{m}} = O(n^{1-\beta} \log n) + O\left(n^{-\beta} \sum_{m=\frac{n}{2}+1}^{n-1} \frac{1}{\log \frac{n}{m}}\right)$$

$$= O(n^{1-\beta} \log n) + O\left(n^{-\beta} \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} \frac{1}{\log \frac{n}{n-k}}\right).$$

Nun ist für

$$0 < y < 1$$

$$-\log(1-y) = y + \frac{y^2}{2} + \dots$$

$$> y,$$

also hier in jedem Summenglied

$$\log \frac{n}{n-k} = -\log\left(1 - \frac{k}{n}\right)$$

$$> \frac{k}{n};$$

daher ist

$$\sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m^\beta} \frac{1}{\log \frac{n}{m}} = O(n^{1-\beta} \log n) + O\left(n^{-\beta} \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} \frac{n}{k}\right)$$

$$= O(n^{1-\beta} \log n) + O(n^{1-\beta} \log n)$$

$$= O(n^{1-\beta+\delta}).$$

Hieraus folgt weiter

$$\sum_{n=2}^{\omega^2} \frac{1}{n^\beta} \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m^\beta} \frac{1}{\log \frac{n}{m}} = O \sum_{n=2}^{\omega^2} \frac{1}{n^\beta} n^{1-\beta+\delta}$$

$$(252) \quad = O(\omega^{\rho(2-2\beta+\delta)});$$

nach der zweiten Hälfte von (238) ist im Fall $\beta < 1$

$$\rho(2-2\beta) < 1;$$

für $\beta = 1$ ist dies auch der Fall; also ist (251), d. h. der Satz (XI) durch (252) bewiesen.

Den allgemeinen Sätzen schicke ich zwei beim Beweise anzuwendende Hilfsabschätzungen voraus:

1) Es sei

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s}$$

für $s > \alpha$ konvergent, und die positive Zahl τ habe die Eigenschaft ⁸⁴⁾, dass bei jedem $\delta > 0$

$$b_n = O(n^{\alpha+\tau-1+\delta})$$

ist; dann ist a fortiori $f(s)$ für $s > \alpha + \tau$ absolut konvergent. Es sei $\alpha < \beta \leq \alpha + \tau$, $\delta > 0$; ich behaupte, dass im Intervall $-\omega \leq t \leq \omega$ bei wachsendem ω gleichmässig

$$(253) \quad f(\beta + ti) = O(\omega^{\frac{\beta-\alpha}{1-\tau}+\delta})$$

ist.

In der Tat ist

$$S_x = \sum_{n=1}^x \frac{b_n}{n^{\alpha+\delta}} = O(1),$$

wo (ohne Beschränkung der Allgemeinheit) das positive $\delta < \beta - \alpha$ gewählt sei, also, wenn sich die Abschätzung vorläufig auf unendlich wachsendes $|t|$ bezieht,

$$\begin{aligned} f(\beta + ti) &= \sum_{n=1}^{|t|^{\frac{1}{\tau}}} \frac{b_n}{n^{\beta+ti}} + (\beta - \alpha - \delta + ti) \sum_{n=|t|^{\frac{1}{\tau}+1}}^{\infty} S_n \int_n^{n+1} \frac{du}{u^{1+\beta-\alpha-\delta+ti}} - \frac{S_{|t|^{\frac{1}{\tau}}}}{([|t|^{\frac{1}{\tau}}] + 1)^{\beta-\alpha-\delta+ti}} \\ &= O \sum_{n=1}^{|t|^{\frac{1}{\tau}}} \frac{n^{\alpha+\tau-1+\delta}}{n^{\beta}} + O\left(|t| \sum_{n=|t|^{\frac{1}{\tau}+1}}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\beta-\alpha-\delta}}\right) + O\left(\frac{1}{|t|^{\frac{1}{\tau}(\beta-\alpha-\delta)}}\right) \\ &= O(|t|^{\frac{1}{\tau}(\alpha-\beta+\tau+\delta)}) + O(|t| \cdot |t|^{\frac{1}{\tau}(\alpha-\beta+\delta)}) + O(|t|^{\frac{1}{\tau}(\alpha-\beta+\delta)}) \\ &= O(|t|^{\frac{\beta-\alpha}{1-\tau}+\delta}), \end{aligned}$$

womit offenbar (253) bewiesen ist.

2) Wenn $f(s)$ für $s > \alpha$ konvergiert, so ist für $\beta > \alpha$, $\delta > 0$ und konstantes $\rho > 0$ gleichmässig mit $-\omega \leq t \leq \omega$

$$(254) \quad \sum_{n=\omega^{\rho+1}}^{\infty} \frac{b_n}{n^{\beta+ti}} = O(\omega^{1-\rho(\beta-\alpha)+\delta}),$$

wie für $0 \leq \alpha < 1$ schon beim Beweise des Satzes (XI) festgestellt wurde ⁸⁵⁾ und sich für beliebiges α analog so beweisen lässt: Es ist, wenn $0 < \delta < \beta - \alpha$ ist,

$$\begin{aligned} \sum_{n=\omega^{\rho+1}}^{\infty} \frac{b_n}{n^{\beta+ti}} &= (\beta - \alpha - \delta + ti) \sum_{n=\omega^{\rho+1}}^{\infty} S_n \int_n^{n+1} \frac{du}{u^{1+\beta-\alpha-\delta+ti}} - \frac{S_{\omega^{\rho}}}{([\omega^{\rho}] + 1)^{\beta-\alpha-\delta+ti}} \\ &= O\left(\omega \sum_{n=\omega^{\rho+1}}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\beta-\alpha-\delta}}\right) + O(\omega^{\rho(\alpha-\beta+\delta)}) \\ &= O(\omega^{1-\rho(\beta-\alpha)+\rho\delta}), \end{aligned}$$

womit offenbar (254) allgemein bewiesen ist.

⁸⁴⁾ Übrigens hat $\tau = 1$ sicherlich diese Eigenschaft, ebenso jedes $\tau > 1$

⁸⁵⁾ Vergl. Anm. ⁸³⁾.

Ich behaupte nun sechs Sätze (XII) bis (XVII); von diesen enthält der letzte — dessen Wortlaut, wie auch der des Satzes (XIV), recht kompliziert ist — alle vorigen (wie genauer ausgeführt werden wird), so dass ich nur ihn zu beweisen brauche; ich habe die Spezialfälle, deren Sinn viel klarer ist, mit Absicht besonders formuliert:

SATZ (XII). — *Die Reihe*

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s}$$

sei für $s > \alpha$ konvergent; dann ist für

$$\beta > \alpha + \frac{7 - \sqrt{17}}{4}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} |f(\beta + ti)|^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|b_n|^2}{n^{2\beta}}.$$

SATZ (XIII). — *Die Reihen*

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s}$$

und

$$g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s}$$

seien für $s > \alpha$ konvergent; dann ist für

$$\beta > \alpha + \frac{7 - \sqrt{17}}{4}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} f(\beta + ti)g(\beta - ti) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n c_n}{n^{2\beta}}.$$

SATZ (XIV). — *Die Reihe*

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s}$$

sei für $s > \alpha_1$ konvergent, die Reihe

$$g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s}$$

für $s > \alpha_2$. Es sei $\beta > \alpha_1$, $\gamma > \alpha_2$, und zwischen den Zahlen

$$\beta - \alpha_1 = x_1, \quad \gamma - \alpha_2 = x_2$$

mögen entweder die Beziehungen bestehen:

$$(255) \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 < x_1 \leq 1, \\ 0 < x_2 \leq 1, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_1^2 - 5x_1x_2 - x_2^2 + x_1x_2^2 + x_1^2x_2 < 0, \end{array} \right.$$

oder es mögen zwischen ihnen die Beziehungen bestehen:

$$(256) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 > 1, \\ 1 \geq x_2 > \frac{1}{2}, \end{array} \right.$$

oder es mögen zwischen ihnen die Beziehungen bestehen:

$$(257) \quad \begin{cases} 1 \geq x_1 > \frac{1}{2}, \\ x_2 > 1. \end{cases}$$

Dann ist

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} f(\beta + ti) g(\gamma - ti) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n c_n}{n^{\beta+\gamma}}.$$

SATZ (XV). — Die Reihe

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s}$$

sei für $s > \alpha$ konvergent; es sei das positive $\tau \leq 1$ so beschaffen, dass bei jedem $\delta > 0$

$$b_n = O(n^{\alpha+\tau-1+\delta})$$

ist. Dann ist für

$$\beta > \alpha + \frac{7 - \sqrt{17}}{4} \tau$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} |f(\beta + ti)|^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|b_n|^2}{n^{2\beta}}.$$

SATZ (XVI). — Die Reihen

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s}$$

und

$$g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s}$$

seien für $s > \alpha$ konvergent; es sei das positive $\tau \leq 1$ so beschaffen, dass bei jedem $\delta > 0$

$$(258) \quad b_n = O(n^{\alpha+\tau-1+\delta})$$

und

$$(259) \quad c_n = O(n^{\alpha+\tau-1+\delta})$$

ist. Dann ist für

$$\beta > \alpha + \frac{7 - \sqrt{17}}{4} \tau$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} f(\beta + ti) g(\beta - ti) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n c_n}{n^{2\beta}}.$$

SATZ (XVII). — Die Reihe

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s}$$

sei für $s > \alpha_1$ konvergent; es sei das positive $\tau_1 \leq 1$ so beschaffen, dass für alle $\delta > 0$

$$(260) \quad b_n = O(n^{\alpha_1+\tau_1-1+\delta})$$

ist. Die Reihe

$$g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s}$$

sei für $s > \alpha_2$ konvergent; es sei das positive $\tau_2 \leq 1$ so beschaffen, dass

$$(261) \quad c_n = O(n^{\alpha_2+\tau_2-1+\delta})$$

ist. Wenn $\beta > \alpha_1$, $\gamma > \alpha_2$ ist und

$$\frac{\beta - \alpha_1}{\tau_1} = x_1, \quad \frac{\gamma - \alpha_2}{\tau_2} = x_2$$

gesetzt wird, so mögen die positiven Zahlen x_1 und x_2 entweder die Beziehungen (255) oder die Beziehungen (256) oder die Beziehungen (257) erfüllen. Dann ist

$$(262) \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} f(\beta + ti)g(\gamma - ti)dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n c_n}{n^{\beta+\gamma}}.$$

Ich zeige zunächst, dass im Satz (XVII) die fünf vorangehenden enthalten sind.

Zur Orientierung über den Sinn des Satzes (XVII) mache ich darauf aufmerksam, dass die Ungleichungen (255) sicher für solche Zahlenpaare x_1, x_2 erfüllt sind, für welche

$$x_2 = x_1$$

und

$$\frac{7 - \sqrt{17}}{4} < x_1 = x_2 \leq 1$$

ist. Denn dann ist

$$4 - 7x_1 + 2x_1^2 < 0,$$

$$4x_1 - 7x_1^2 + 2x_1^3 < 0.$$

Diese Bemerkung setzt zugleich in Evidenz, dass im Satz (XVII) durch die Spezialisierung $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, $\tau_1 = \tau_2 = \tau$, $\beta = \gamma$ der Satz (XVI) für

$$\alpha + \tau \geq \beta > \alpha + \frac{7 - \sqrt{17}}{4} \tau$$

enthalten ist; da er für

$$\beta > \alpha + \tau$$

wegen der nach (258) und (259) absoluten Konvergenz der Reihen $f(s)$ und $g(s)$ durch Herrn HADAMARD bekannt ist, wird also mit (XVII) der Satz (XVI) vollständig bewiesen sein. Im Satz (XVI) ist offenbar für

$$c_n = \bar{b}_n$$

der Satz (XV) enthalten. Dass in (XVII) der Satz (XIV) enthalten ist, ergibt sich daraus, dass zufolge der Konvergenz der Reihen $f(s)$ und $g(s)$ für $s > \alpha_1$ bzw. $s > \alpha_2$ die Relation (260) sicher für $\tau_1 = 1$ und die Relation (261) sicher für $\tau_2 = 1$ erfüllt ist. Aus demselben Grunde ist (XIII) in (XVI) und (XII) in (XV) enthalten. Ich habe also nur den Satz (XVII) zu beweisen und zwar wegen der Symmetrie der Relationen (256) und (257) nur unter der Annahme (255) und unter der Annahme (256). Übrigens ist der oben schon bewiesene Satz (XI) in (XVI) als Spezialfall enthalten, wenn $\tau = 1 - \alpha$ gesetzt wird.

Beweis von (XVII): 1) Es seien die Relationen (255) erfüllt, d. h.

$$(263) \quad 0 < x_1 \leq 1,$$

$$(264) \quad 0 < x_2 \leq 1,$$

$$(265) \quad 2x_1 + 2x_2 - x_1^2 - 5x_1x_2 - x_2^2 + x_1x_2^2 + x_1^2x_2 < 0.$$

Aus (265) ergibt sich weiter

$$(266) \quad 1 < x_1 + x_2;$$

denn (265) liefert zunächst

$$2(x_1 + x_2) - (x_1 + x_2)^2 - x_1 x_2 (3 - (x_1 + x_2)) < 0;$$

nach (263) und (264) ist

$$3 - (x_1 + x_2) > 0;$$

wegen

$$x_1 x_2 \leq \frac{1}{4}(x_1 + x_2)^2$$

ist also

$$2(x_1 + x_2) - (x_1 + x_2)^2 - \frac{1}{4}(x_1 + x_2)^2 (3 - (x_1 + x_2)) < 0,$$

$$8 - 4(x_1 + x_2) - (x_1 + x_2)(3 - (x_1 + x_2)) < 0,$$

$$8 - 7(x_1 + x_2) + (x_1 + x_2)^2 < 0,$$

$$\frac{7 - \sqrt{17}}{2} < x_1 + x_2,$$

also gewiss

$$(266) \quad 1 < x_1 + x_2.$$

Dass die Reihe auf der rechten Seite von (262) konvergiert, ersieht man nach (260), (261) und (266) aus

$$\begin{aligned} \frac{b_n c_n}{n^{\beta+\gamma}} &= O(n^{\alpha_1+\tau_1-1+\alpha_2+\tau_2-1-\beta-\gamma+\delta}) \\ &= O(n^{(1-x_1)\tau_1+(1-x_2)\tau_2-2+\delta}) \\ &= O(n^{1-x_1+1-x_2-2+\delta}) \\ &= O(n^{-x_1-x_2+\delta}). \end{aligned}$$

Die Voraussetzung (265) lässt sich auch so schreiben:

$$\frac{2-x_2}{x_1}(1-x_1) + \frac{2-x_1}{x_2}(1-x_2) < 1,$$

$$(267) \quad \frac{2\tau_2-\gamma+\alpha_2}{\beta-\alpha_1} \cdot \frac{\tau_1-\beta+\alpha_1}{\tau_2} + \frac{2\tau_1-\beta+\alpha_1}{\gamma-\alpha_2} \cdot \frac{\tau_2-\gamma+\alpha_2}{\tau_1} < 1.$$

Zwei Zahlen ρ_1 und ρ_2 mögen, was nach (267) möglich ist, so gewählt werden, dass folgende drei Relationen (268), (269) und (270) erfüllt sind:

$$(268) \quad \frac{2}{\beta-\alpha_1} - \frac{\gamma-\alpha_2}{\beta-\alpha_1} \frac{1}{\tau_2} = \frac{2\tau_2-\gamma+\alpha_2}{(\beta-\alpha_1)\tau_2} < \rho_1,$$

$$(269) \quad \frac{2}{\gamma-\alpha_2} - \frac{\beta-\alpha_1}{\gamma-\alpha_2} \frac{1}{\tau_1} = \frac{2\tau_1-\beta+\alpha_1}{(\gamma-\alpha_2)\tau_1} < \rho_2,$$

$$(270) \quad \rho_1(\tau_1-\beta+\alpha_1) + \rho_2(\tau_2-\gamma+\alpha_2) < 1.$$

Aus (268) folgt wegen

$$\gamma \leq \alpha_2 + \tau_2$$

a fortiori

$$\rho_1 > \frac{1}{\beta-\alpha_1} + \left(1 - \frac{\gamma-\alpha_2}{\tau_2}\right) \frac{1}{\beta-\alpha_1}$$

$$(271) \quad \geq \frac{1}{\beta-\alpha_1}$$

und ebenso aus (269)

$$(272) \quad \rho_2 > \frac{1}{\gamma - \alpha_2}.$$

Nun zerlege ich

$$\begin{aligned} f(\beta + ti) &= \sum_{n=1}^{\omega^{\rho_1}} \frac{b_n}{n^{\beta+ti}} + \sum_{n=\omega^{\rho_1+1}}^{\infty} \frac{b_n}{n^{\beta+ti}} \\ &= \Sigma_1 + \Sigma_2, \\ g(\gamma - ti) &= \sum_{n=1}^{\omega^{\rho_2}} \frac{c_n}{n^{\gamma-ti}} + \sum_{n=\omega^{\rho_2+1}}^{\infty} \frac{c_n}{n^{\gamma-ti}} \\ &= \Sigma_3 + \Sigma_4; \end{aligned}$$

dann ist

$$\begin{aligned} f(\beta + ti)g(\gamma - ti) &= \Sigma_1 \Sigma_3 + (\Sigma_1 + \Sigma_2) \Sigma_4 + \Sigma_2 (\Sigma_3 + \Sigma_4) - \Sigma_2 \Sigma_4, \\ \int_{-\omega}^{\omega} f(\beta + ti)g(\gamma - ti)dt &= \int_{-\omega}^{\omega} \Sigma_1 \Sigma_3 dt + \int_{-\omega}^{\omega} (\Sigma_1 + \Sigma_2) \Sigma_4 dt + \int_{-\omega}^{\omega} \Sigma_2 (\Sigma_3 + \Sigma_4) dt - \int_{-\omega}^{\omega} \Sigma_2 \Sigma_4 dt \\ (273) \quad &= F_1(\omega) + F_2(\omega) + F_3(\omega) + F_4(\omega). \end{aligned}$$

Nach (254) ist für $-\omega \leq t \leq \omega$ gleichmässig

$$\begin{aligned} \Sigma_2 &= O(\omega^{1-\rho_1(\beta-\alpha_1)+\delta}), \\ (274) \quad \Sigma_4 &= O(\omega^{1-\rho_2(\gamma-\alpha_2)+\delta}); \end{aligned}$$

wegen (271) und (272) ist also gleichmässig

$$\begin{aligned} \lim_{\omega=\infty} \Sigma_2 &= 0, \\ \lim_{\omega=\infty} \Sigma_4 &= 0, \end{aligned}$$

folglich

$$\begin{aligned} \lim_{\omega=\infty} \frac{1}{\omega} F_4(\omega) &= - \lim_{\omega=\infty} \frac{1}{\omega} \int_{-\omega}^{\omega} \Sigma_2 \Sigma_4 dt \\ (275) \quad &= 0. \end{aligned}$$

Nach (253) ist gleichmässig für $-\omega \leq t \leq \omega$

$$\begin{aligned} \Sigma_1 + \Sigma_2 &= f(\beta + ti) \\ &= O(\omega^{1-\frac{\beta-\alpha_1}{\tau_1}+\delta}), \end{aligned}$$

also in Verbindung mit (274)

$$\begin{aligned} (\Sigma_1 + \Sigma_2) \Sigma_4 &= O(\omega^{1-\frac{\beta-\alpha_1}{\tau_1}+1-\rho_2(\gamma-\alpha_2)+2\delta}) \\ &= O(\omega^{2-\frac{\beta-\alpha_1}{\tau_1}-\rho_2(\gamma-\alpha_2)+2\delta}), \end{aligned}$$

folglich nach (269) gleichmässig

$$\lim_{\omega=\infty} (\Sigma_1 + \Sigma_2) \Sigma_4 = 0$$

und daher

$$\begin{aligned} \lim_{\omega=\infty} \frac{1}{\omega} F_2(\omega) &= \lim_{\omega=\infty} \frac{1}{\omega} \int_{-\omega}^{\omega} (\Sigma_1 + \Sigma_2) \Sigma_4 dt \\ (276) \quad &= 0. \end{aligned}$$

Aus Symmetriegründen ist ebenso

$$(277) \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{\omega} F_3(\omega) = 0.$$

Aus (273), (275), (276), (277) ergibt sich

$$(278) \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} f(\beta + ti) g(\gamma - ti) dt - \frac{F_1(\omega)}{2\omega} \right) = 0.$$

Nun ist, wenn ρ_1 die kleinere der beiden Zahlen ρ_1, ρ_2 ist ($\rho_1 \leq \rho_2$), was aus Symmetriegründen keine Beschränkung der Allgemeinheit bedeutet,

$$\begin{aligned} \Sigma_1 \Sigma_3 &= \sum_{n=1}^{\omega^{\rho_1}} \frac{b_n}{n^{\beta+ti}} \sum_{m=1}^{\omega^{\rho_2}} \frac{c_m}{m^{\gamma-ti}} \\ &= \sum_{n=1}^{\omega^{\rho_1}} \frac{b_n c_n}{n^{\beta+\gamma}} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \geq m}}^{\omega^{\rho_1}} \sum_{m=1}^{\omega^{\rho_2}} \frac{b_n c_m}{n^{\beta} m^{\gamma}} \left(\frac{m}{n} \right)^{ti}, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} F_1(\omega) &= \int_{-\omega}^{\omega} \Sigma_1 \Sigma_3 dt \\ &= 2\omega \sum_{n=1}^{\omega^{\rho_1}} \frac{b_n c_n}{n^{\beta+\gamma}} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \geq m}}^{\omega^{\rho_1}} \sum_{m=1}^{\omega^{\rho_2}} \frac{b_n c_m}{n^{\beta} m^{\gamma}} \frac{\left(\frac{m}{n} \right)^{\omega i} - \left(\frac{m}{n} \right)^{-\omega i}}{i \log \frac{m}{n}}, \\ \left| \frac{F_1(\omega)}{2\omega} - \sum_{n=1}^{\omega^{\rho_1}} \frac{b_n c_n}{n^{\beta+\gamma}} \right| &\leq \frac{1}{\omega} \sum_{\substack{n=1 \\ n \geq m}}^{\omega^{\rho_1}} \sum_{m=1}^{\omega^{\rho_2}} \frac{|b_n| |c_m|}{n^{\beta} m^{\gamma}} \frac{1}{\left| \log \frac{m}{n} \right|} \\ &= O \left(\frac{1}{\omega} \sum_{\substack{n=1 \\ n \geq m}}^{\omega^{\rho_1}} \sum_{m=1}^{\omega^{\rho_2}} \frac{n^{\alpha_1+\tau_1-i+\delta} m^{\alpha_2+\tau_2-i+\delta}}{n^{\beta} m^{\gamma}} \frac{1}{\left| \log \frac{m}{n} \right|} \right) \\ (279) \quad &= O \left(\frac{1}{\omega} \sum_{n=1}^{\omega^{\rho_1}} n^{\alpha_1+\tau_1-\beta-i+\delta} \sum_{\substack{m=1 \\ m \geq n}}^{\omega^{\rho_2}} m^{\alpha_2+\tau_2-\gamma-i+\delta} \frac{1}{\left| \log \frac{m}{n} \right|} \right). \end{aligned}$$

Nun ist, wenn zur Abkürzung die oberhalb von -1 gelegene Zahl

$$\alpha_2 + \tau_2 - \gamma - 1 + \delta = \eta$$

gesetzt wird,

$$\sum_{\substack{m=1 \\ m \geq n}}^{\omega^{\rho_2}} \frac{m^{\eta}}{\left| \log \frac{m}{n} \right|} = \sum_{m=1}^{n-1} \frac{m^{\eta}}{\log \frac{n}{m}} + \sum_{m=n+1}^{\omega^{\rho_2}} \frac{m^{\eta}}{\log \frac{m}{n}}.$$

Es ist, wenn die Abschätzung sich auf wachsendes n bezieht,

$$\begin{aligned}
 \sum_{m=1}^{n-1} \frac{m^\eta}{\log \frac{n}{m}} &= \sum_{m=1}^{\frac{n}{2}} \frac{m^\eta}{\log \frac{n}{m}} + \sum_{m=\frac{n}{2}+1}^{n-1} \frac{m^\eta}{\log \frac{n}{m}} \\
 &= O \sum_{m=1}^{\frac{n}{2}} m^\eta + O \left(n^\eta \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} \frac{1}{\log \frac{n}{n-k}} \right) \\
 &= O(n^{1+\eta}) + O \left(n^\eta \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} \frac{1}{\frac{k}{n}} \right) \\
 &= O(n^{1+\eta}) + O(n^{1+\eta} \log n) \\
 &= O(n^{1+\eta+\delta}),
 \end{aligned}$$

ebenso

$$\begin{aligned}
 \sum_{m=n+1}^{\frac{3n}{2}} m^\eta \frac{1}{\log \frac{m}{n}} &= O \left(n^\eta \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} \frac{1}{\log \frac{n+k}{n}} \right) \\
 &= O \left(n^\eta \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} \frac{1}{\frac{k}{n}} \right) \\
 &= O(n^{1+\eta} \log n) \\
 &= O(n^{1+\eta+\delta}).
 \end{aligned}$$

Im Falle

$$\omega^{\rho_2} > \frac{3}{2} n$$

ist also

$$\begin{aligned}
 \sum_{\substack{m=1 \\ m \leq n}}^{\omega^{\rho_2}} m^\eta \frac{1}{\left| \log \frac{m}{n} \right|} &= \sum_{m=1}^{n-1} m^\eta \frac{1}{\log \frac{n}{m}} + \sum_{m=n+1}^{\frac{3}{2}n} m^\eta \frac{1}{\log \frac{m}{n}} + \sum_{m=\frac{3}{2}n+1}^{\omega^{\rho_2}} m^\eta \frac{1}{\log \frac{m}{n}} \\
 &= O(n^{1+\eta+\delta}) + O(n^{1+\eta+\delta}) + O \sum_{m=\frac{3}{2}n+1}^{\omega^{\rho_2}} m^\eta \frac{1}{\log \frac{3}{2}} \\
 &= O(n^{1+\eta+\delta}) + O(\omega^{\rho_2(1+\eta)}) \\
 &= O(\omega^{\rho_2(1+\eta+\delta)}),
 \end{aligned}$$

gleichmässig für alle jene n ; im Falle

$$\omega^{\rho_2} \leq \frac{3}{2} n$$

ist wegen

$$\begin{aligned}
 n &\leq \omega^{\rho_1} \leq \omega^{\rho_2} \\
 \sum_{\substack{m=1 \\ m \geq n}}^{\omega^{\rho_2}} m^{\eta} \frac{1}{\left| \log \frac{m}{n} \right|} &= \sum_{m=1}^{n-1} m^{\eta} \frac{1}{\log \frac{n}{m}} + \sum_{m=n+1}^{\omega^{\rho_2}} m^{\eta} \frac{1}{\log \frac{m}{n}} \\
 &\leq \sum_{m=1}^{n-1} m^{\eta} \frac{1}{\log \frac{n}{m}} + \sum_{m=n+1}^{\frac{3}{2}n} m^{\eta} \frac{1}{\log \frac{m}{n}} \\
 &= O(n^{1+\eta+\delta}) \\
 &= O(\omega^{\rho_2(1+\eta+\delta)}).
 \end{aligned}
 \tag{280}$$

(280) gilt also in jedem Falle gleichmässig in n und liefert weiter

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{\omega^{\rho_1}} n^{\alpha_1+\tau_1-\beta-1+\delta} \sum_{\substack{m=1 \\ m \geq n}}^{\omega^{\rho_2}} m^{\alpha_2+\tau_2-\gamma-1+\delta} \frac{1}{\left| \log \frac{m}{n} \right|} &= O\left(\omega^{\rho_2(\alpha_2+\tau_2-\gamma+\delta)} \sum_{n=1}^{\omega^{\rho_1}} n^{\alpha_1+\tau_1-\beta-1+\delta}\right) \\
 &= O(\omega^{\rho_1(\alpha_1+\tau_1-\beta+\delta)+\rho_2(\alpha_2+\tau_2-\gamma+\delta)});
 \end{aligned}$$

also ist nach (279) für alle $\delta > 0$

$$\frac{F_i(\omega)}{2\omega} - \sum_{n=1}^{\omega^{\rho_1}} \frac{b_n c_n}{n^{\beta+\gamma}} = O(\omega^{-1+\rho_1(\alpha_1+\tau_1-\beta)+\rho_2(\alpha_2+\tau_2-\gamma)+\delta}),$$

was nach (270) bei passend kleinem δ für $\omega = \infty$ den Limes 0 hat.

Damit ist nach (278) der erste, schwierigere Teil des Satzes (XVII) bewiesen.

2) Es seien die Relationen (256) erfüllt, d. h. es sei

$$x_1 > 1,
 \tag{281}$$

$$1 \geq x_2 > \frac{1}{2}.
 \tag{282}$$

Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n c_n}{n^{\beta+\gamma}}$$

auf der rechten Seite der Behauptung (262) konvergiert jedenfalls, da

$$\begin{aligned}
 \frac{b_n c_n}{n^{\beta+\gamma}} &= O(n^{\alpha_1+\tau_1-1+\alpha_2+\tau_2-1-\beta-\gamma+\delta}) \\
 &= O(n^{(1-x_1)\tau_1+(1-x_2)\tau_2-2+\delta}) \\
 &= O(n^{1-x_2-2+\delta}) \\
 &= O(n^{-\frac{3}{2}+\delta})
 \end{aligned}$$

ist. ρ ist nach (282) derart wählbar, dass

$$\frac{1}{\gamma - \alpha_2} < \rho < \frac{1}{\tau_2 - \gamma + \alpha_2}
 \tag{283}$$

ist; im Falle $x_2 = 1$, d. h. $\gamma = \tau_2 + \alpha_2$, ist eben die zweite Hälfte von (283) von selbst erfüllt.

Es ist nun

$$(284) \int_{-\omega}^{\omega} f(\beta + ti) g(\gamma - ti) dt = \int_{-\omega}^{\omega} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^{\beta+ti}} \sum_{m=1}^{\omega^p} \frac{c_m}{m^{\gamma-ti}} dt + \int_{-\omega}^{\omega} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^{\beta+ti}} \sum_{n=\omega^p+1}^{\infty} \frac{c_n}{n^{\gamma-ti}} dt.$$

Hierin ist für $-\omega \leq t \leq \omega$ gleichmässig nach (281)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^{\beta+ti}} = O(1)$$

und nach (254)

$$\sum_{n=\omega^p+1}^{\infty} \frac{c_n}{n^{\gamma-ti}} = O(\omega^{1-\rho(\gamma-\alpha_2)+\delta}),$$

also nach der ersten Hälfte von (283) gleichmässig

$$\lim_{\omega=\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^{\beta+ti}} \sum_{n=\omega^p+1}^{\infty} \frac{c_n}{n^{\gamma-ti}} = 0.$$

Daher ist

$$\lim_{\omega=\infty} \frac{1}{\omega} \int_{-\omega}^{\omega} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^{\beta+ti}} \sum_{n=\omega^p+1}^{\infty} \frac{c_n}{n^{\gamma-ti}} dt = 0,$$

also nach (284)

$$(285) \lim_{\omega=\infty} \left(\frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} f(\beta + ti) g(\gamma - ti) dt - \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^{\beta+ti}} \sum_{m=1}^{\omega^p} \frac{c_m}{m^{\gamma-ti}} dt \right) = 0.$$

Nun ist

$$\int_{-\omega}^{\omega} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^{\beta+ti}} \sum_{m=1}^{\omega^p} \frac{c_m}{m^{\gamma-ti}} dt = 2\omega \sum_{n=1}^{\omega^p} \frac{b_n c_n}{n^{\beta+\gamma}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^{\beta}} \sum_{\substack{m=1 \\ m \geq n}}^{\omega^p} \frac{c_m}{m^{\gamma}} \frac{\left(\frac{m}{n}\right)^{\omega i} - \left(\frac{m}{n}\right)^{-\omega i}}{i \log \frac{m}{n}},$$

folglich

$$\frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^{\beta+ti}} \sum_{m=1}^{\omega^p} \frac{c_m}{m^{\gamma-ti}} dt - \sum_{n=1}^{\omega^p} \frac{b_n c_n}{n^{\beta+\gamma}} = O\left(\frac{1}{\omega} \sum_{m=1}^{\omega^p} \frac{|c_m|}{m^{\gamma}} \sum_{\substack{n=1 \\ n \geq m}}^{\infty} \frac{|b_n|}{n^{\beta}} \frac{1}{\left|\log \frac{m}{n}\right|}\right),$$

also, wenn

$$\begin{aligned} \delta &< \beta - \alpha_1 - \tau_1 \\ &= (x_1 - 1)\tau_1 \end{aligned}$$

gewählt wird (um die Konvergenz der auftretenden Reihe zu sichern),

$$(286) \quad = O\left(\frac{1}{\omega} \sum_{m=1}^{\omega^p} m^{\alpha_2+\tau_2-1-\gamma+\delta} \sum_{\substack{n=1 \\ n \geq m}}^{\infty} n^{\alpha_1+\tau_1-1-\beta+\delta} \frac{1}{\left|\log \frac{m}{n}\right|}\right).$$

Es ist für wachsendes m und festes $z > 1$

$$\begin{aligned}
 \sum_{n \geq m} n^{-x} \frac{1}{\left| \log \frac{m}{n} \right|} &= \sum_{n=1}^{\frac{m}{2}} n^{-x} \frac{1}{\log \frac{m}{n}} + \sum_{n=\frac{m}{2}+1}^{m-1} n^{-x} \frac{1}{\log \frac{m}{n}} + \sum_{n=m+1}^{\frac{3}{2}m} n^{-x} \frac{1}{\log \frac{n}{m}} \\
 &\quad + \sum_{n=\frac{3}{2}m+1}^{\infty} n^{-x} \frac{1}{\log \frac{n}{m}} \\
 &< \frac{1}{\log 2} \sum_{n=1}^{\frac{m}{2}} n^{-x} + \frac{1}{\left(\frac{m}{2}\right)^x} \sum_{n=\frac{m}{2}+1}^{m-1} \frac{1}{\log \frac{m}{n}} + \frac{1}{m^x} \sum_{n=m+1}^{\frac{3}{2}m} \frac{1}{\log \frac{n}{m}} + \frac{1}{\log \frac{3}{2}} \sum_{n=\frac{3}{2}m+1}^{\infty} n^{-x} \\
 &= O(1) + O(m^{-x} m \log m) + O(m^{-x} m \log m) + O(m^{1-x}) \\
 (287) \quad &= O(1),
 \end{aligned}$$

da schon früher die Relationen

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=\frac{m}{2}+1}^{m-1} \frac{1}{\log \frac{m}{n}} &= O(m \log m), \\
 \sum_{n=m+1}^{\frac{3}{2}m} \frac{1}{\log \frac{n}{m}} &= O(m \log m)
 \end{aligned}$$

festgestellt waren.

(287) ergibt, in (286) eingesetzt,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^{\beta+ti}} \sum_{m=1}^{\omega^{\rho}} \frac{c_m}{m^{\gamma-ti}} dt - \sum_{n=1}^{\omega^{\rho}} \frac{b_n c_n}{n^{\beta+\gamma}} &= O\left(\frac{1}{\omega} \sum_{m=1}^{\omega^{\rho}} m^{\alpha_2+\tau_2-1-\gamma+\delta}\right) \\
 &= O(\omega^{-1+\rho(\alpha_2+\tau_2-\gamma+\delta)}),
 \end{aligned}$$

also nach der zweiten Hälfte von (283) bei passender Wahl von δ

$$(288) \quad = O(\omega^{-\eta}),$$

wo

$$\eta > 0$$

ist.

Aus (285) und (288) folgt endlich die Behauptung (262), womit der Satz (XVII) vollständig bewiesen ist.

Er lehrt, dass die Gleichung

$$(262) \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} f(\beta + ti) g(\gamma - ti) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n c_n}{n^{\beta+\gamma}}$$

nicht nur für $x_1 > 1$, $x_2 > 1$ gilt ist, was Herr HADAMARD bewiesen hat, sondern, dass es zu jedem x_2 im Intervall

$$\frac{1}{2} < x_2 \leq 1$$

einen Spielraum

$$\varphi(x_2) < x_1,$$

wo

$$\varphi(x_2) < 1$$

ist, gibt, für welchen (262) gilt ⁸⁶⁾. In der Tat ist die Ungleichung

$$(265) \quad 2x_1 + 2x_2 - x_1^2 - 5x_1x_2 - x_2^2 + x_1x_2^2 + x_1^2x_2 < 0$$

für $x_1 = 1$ identisch erfüllt, was auch jenes x_2 sei, da sie alsdann

$$1 - 2x_2 < 0$$

lautet; (265) gilt also für

$$\varphi(x_2) < x_1 \leq 1,$$

und für $\frac{1}{2} < x_2 \leq 1$, $x_1 > 1$ ist (262) nach dem zweiten Teil des Satzes (XVII) gewiss gültig. Übrigens ist für $x_2 = 1$

$$\varphi(x_2) = \frac{1}{2},$$

für $\frac{1}{2} < x_2 < 1$

$$(289) \quad \varphi(x_2) = \frac{2 - 5x_2 + x_2^2 + \sqrt{4 - 12x_2 + 17x_2^2 - 6x_2^3 + x_2^4}}{2(1 - x_2)},$$

natürlich zeigt (289), dass

$$\lim_{x_2 \rightarrow \frac{1}{2}} \varphi(x_2) = 1$$

und

$$\lim_{x_2 \rightarrow 1} \varphi(x_2) = \frac{1}{2} = \varphi(1)$$

ist.

Der Gültigkeitsbereich der Relation

$$(262) \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} f(\beta + ti) g(\gamma - ti) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n c_n}{n^{\beta+\gamma}}$$

lässt sich übrigens noch über das durch den Satz (XVII) gegebene Mass ausdehnen, z. B. durch Kombination des Satzes (XVII) mit dem

SATZ (XVIII). — Die Reihe

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s}$$

sei für $s > \alpha_1$ konvergent; es sei das positive $\tau_1 \leq 1$ so beschaffen, dass für alle $\delta > 0$

$$(260) \quad b_n = O(n^{\alpha_1 + \tau_1 - 1 + \delta})$$

ist. Die Reihe

$$g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s}$$

sei für $s > \alpha_2$ konvergent; es sei das positive $\tau_2 \leq 1$ so beschaffen, dass

$$(261) \quad c_n = O(n^{\alpha_2 + \tau_2 - 1 + \delta})$$

⁸⁶⁾ Und entsprechend, wenn die Indices 1 und 2 vertauscht werden.

ist. Es sei

$$\begin{aligned}
 & \beta > \alpha_1, \\
 & \gamma > \alpha_2, \\
 (290) \quad & \frac{\beta - \alpha_1}{\tau_1} + \frac{\gamma - \alpha_2}{\tau_2} > 1, \\
 & \beta' > \alpha_1, \\
 & \gamma' > \alpha_2, \\
 (291) \quad & \frac{\beta' - \alpha_1}{\tau_1} + \frac{\gamma' - \alpha_2}{\tau_2} > 1
 \end{aligned}$$

und

$$\beta + \gamma = \beta' + \gamma'.$$

Dann ist

$$(292) \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\omega} \left(\int_{-\omega}^{\omega} f(\beta + ti)g(\gamma - ti)dt - \int_{-\omega}^{\omega} f(\beta' + ti)g(\gamma' - ti)dt \right) = 0.$$

Beweis: Es ist, wenn die komplexe Variable $s = \sigma + ti$ eingeführt wird,

$$\int_{-\omega}^{\omega} f(\beta + ti)g(\gamma - ti)dt = \frac{1}{i} \int_{\beta - \omega i}^{\beta + \omega i} f(s)g(\beta + \gamma - s)ds,$$

wo das Integral geradlinig zu erstrecken ist. Der Integrand stellt eine für

$$(293) \quad \alpha_1 < \Re(s) < \beta + \gamma - \alpha_2$$

reguläre analytische Funktion dar, da für diese s

$$\alpha_1 < \sigma$$

und

$$\alpha_2 < \beta + \gamma - \sigma$$

ist. Die Gerade

$$\Re(s) = \beta'$$

gehört dem Streifen (293) an, da nach den gemachten Voraussetzungen

$$\alpha_1 < \beta'$$

und

$$\begin{aligned}
 \beta' &= \beta + \gamma - \gamma' \\
 &< \beta + \gamma - \alpha_2
 \end{aligned}$$

ist. Nach dem CAUCHY'schen Satz ist also, wenn über das Rechteck mit den Ecken $\beta \pm \omega i$, $\beta' \pm \omega i$ integriert wird,

$$\begin{aligned}
 & \int_{\beta - \omega i}^{\beta + \omega i} f(s)g(\beta + \gamma - s)ds \\
 (294) \quad &= \int_{\beta' - \omega i}^{\beta' + \omega i} f(s)g(\beta + \gamma - s)ds + \int_{\beta - \omega i}^{\beta' - \omega i} f(s)g(\beta + \gamma - s)ds + \int_{\beta' + \omega i}^{\beta + \omega i} f(s)g(\beta + \gamma - s)ds.
 \end{aligned}$$

Die beiden horizontalen Rechtecksseiten haben die Länge $|\beta - \beta'|$, also, wenn $\beta < \beta'$ angenommen wird (was keine Beschränkung der Allgemeinheit ist) die Länge $\beta' - \beta$. In den beiden letzten Integralen auf der rechten Seite von (294) ist also die Länge des Integrationsweges von ω unabhängig. Ich werde zeigen, dass der Integrand in allen

Punkten des Integrationsweges gleichmässig $= O(\omega^s)$ ist, wo $s < 1$ ist; damit ist die Behauptung (292) dann vollständig bewiesen, da

$$\frac{1}{i} \int_{\beta' - \omega i}^{\beta' + \omega i} f(s) g(\beta + \gamma - s) ds = \int_{-\omega}^{\omega} f(\beta' + ti) g(\gamma' - ti) dt$$

ist.

Der fehlende Nachweis der für $\beta \leq \sigma \leq \beta'$ gleichmässig geltenden Relationen

$$\begin{aligned} f(\sigma + \omega i) g(\beta + \gamma - \sigma - \omega i) &= O(\omega^s), \\ f(\sigma - \omega i) g(\beta + \gamma - \sigma + \omega i) &= O(\omega^s) \end{aligned} \quad (s < 1)$$

wird nun folgendermassen erbracht.

Es werde

$$\sum_{n=1}^x \frac{b_n}{n^{\alpha_1 + \delta}} = S_x$$

gesetzt. Wenn die Abschätzung sich auf wachsendes ω bezieht und gleichmässig für $\beta \leq \sigma \leq \beta'$ gilt⁸⁷⁾, so ist bei gegebenem $\delta > 0$, wo $\delta < \beta - \alpha_1$ gewählt sei,

1) soweit $\sigma < \alpha_1 + \tau_1 + \frac{\delta}{2}$ ist,

$$\begin{aligned} f(\sigma \pm \omega i) &= \sum_{n=1}^{\frac{1}{\tau_1}} \frac{b_n}{n^{\sigma \pm \omega i}} + (\sigma - \alpha_1 - \delta \pm \omega i) \sum_{n=\omega}^{\infty} S_n \int_n^{\infty} \frac{du}{u^{1 + \sigma - \alpha_1 - \delta \pm \omega i}} - \frac{S_{\frac{1}{\tau_1}}}{([\omega^{\frac{1}{\tau_1}}] + 1)^{\sigma - \alpha_1 - \delta \pm \omega i}} \\ &= O \sum_{n=1}^{\frac{1}{\tau_1}} \frac{n^{\alpha_1 + \tau_1 - 1 + \delta}}{n^{\sigma}} + O \left(\omega \sum_{n=\omega}^{\infty} \frac{1}{n^{1 + \sigma - \alpha_1 - \delta}} \right) + O \left(\frac{1}{\omega^{\frac{1}{\tau_1}(\sigma - \alpha_1 - \delta)}} \right) \\ &= O \left(\frac{1}{\alpha_1 + \tau_1 + \delta - \sigma} \omega^{\frac{1}{\tau_1}(\alpha_1 + \tau_1 + \delta - \sigma)} \right) + O \left(\omega \frac{1}{\sigma - \alpha_1 - \delta} \omega^{\frac{1}{\tau_1}(\alpha_1 - \sigma + \delta)} \right) + O(\omega^{\frac{1}{\tau_1}(\alpha_1 - \sigma + \delta)}) \\ &= O \left(\frac{1}{\frac{\delta}{2}} \omega^{\frac{1}{\tau_1}(\alpha_1 + \tau_1 + \delta - \sigma)} \right) + O \left(\omega \frac{1}{\beta - \alpha_1 - \delta} \omega^{\frac{1}{\tau_1}(\alpha_1 - \sigma + \delta)} \right) + O(\omega^{\frac{1}{\tau_1}(\alpha_1 - \sigma + \delta)}) \\ &= O(\omega^{\frac{1}{\tau_1}(\alpha_1 - \sigma + \tau_1 + \delta)}) + O(\omega \cdot \omega^{\frac{1}{\tau_1}(\alpha_1 - \sigma + \delta)}) + O(\omega^{\frac{1}{\tau_1}(\alpha_1 - \sigma + \delta)}) \\ (295) \quad &= O(\omega^{1 - \frac{\sigma - \alpha_1}{\tau_1} + \frac{\delta}{\tau_1}}), \end{aligned}$$

⁸⁷⁾ D. h. die in (295) bzw. (296) mit $O(\omega^{1 - \frac{\sigma - \alpha_1}{\tau_1} + \frac{\delta}{\tau_1}})$ bzw. $O(\omega^0)$ bezeichnete Funktion ist eine Funktion von σ und ω , deren Quotient durch $\omega^{1 - \frac{\sigma - \alpha_1}{\tau_1} + \frac{\delta}{\tau_1}}$ bzw. 1 dem absoluten Betrage nach für alle hinreichend grossen ω und alle σ des Intervalls $(\beta \dots \beta')$, soweit σ überdies $< \alpha_1 + \tau_1 + \frac{\delta}{2}$ bzw. $\geq \alpha_1 + \tau_1 + \frac{\delta}{2}$ ist, unterhalb einer von ω und σ unabhängigen Schranke liegt. (295) ist eine schärfere Fassung der oben durch (253) bewiesenen Tatsache.

2) soweit $\sigma \geq \alpha_1 + \tau_1 + \frac{\delta}{2}$ ist,

$$(296) \quad f(\sigma \pm \omega i) = O(1) = O(\omega^0).$$

Durch Buchstabenvertauschung ergibt sich aus (295) und (296), wenn δ positiv und $< \gamma - \alpha_2$ gewählt wird, gleichmässig für $\beta \leq \sigma \leq \beta'$ (da alsdann $\gamma' \leq \beta + \gamma - \sigma \leq \gamma$ ist)

1) soweit $\beta + \gamma - \sigma < \alpha_2 + \tau_2 + \frac{\delta}{2}$ ist,

$$(297) \quad g(\beta + \gamma - \sigma \pm \omega i) = O(\omega^{1 - \frac{\beta + \gamma - \sigma - \alpha_2}{\tau_2} + \frac{\delta}{\tau_2}}),$$

2) soweit $\beta + \gamma - \sigma \geq \alpha_2 + \tau_2 + \frac{\delta}{2}$ ist,

$$(298) \quad g(\beta + \gamma - \sigma \pm \omega i) = O(1) = O(\omega^0).$$

In jedem Fall ist bei passender Wahl von δ die Summe $\Theta = \Theta(\sigma)$ der Exponenten von ω in der durch (295), (296), (297), (298) gelieferten Abschätzung

$$f(\sigma \pm \omega i)g(\beta + \gamma - \sigma \mp \omega i) = O(\omega^\Theta)$$

unterhalb einer für $\beta \leq \sigma \leq \beta'$ von σ unabhängigen Zahl $\varepsilon < 1$ gelegen. Denn es ist entweder

$$(299) \quad \Theta = 1 - \frac{\sigma - \alpha_1}{\tau_1} + \frac{\delta}{\tau_1} + 1 - \frac{\beta + \gamma - \sigma - \alpha_2}{\tau_2} + \frac{\delta}{\tau_2}$$

oder

$$(300) \quad \Theta = 1 - \frac{\sigma - \alpha_1}{\tau_1} + \frac{\delta}{\tau_1}$$

oder

$$(301) \quad \Theta = 1 - \frac{\beta + \gamma - \sigma - \alpha_2}{\tau_2} + \frac{\delta}{\tau_2}$$

oder

$$(302) \quad \Theta = 0;$$

die rechte Seite von (299) ist eine lineare Funktion von σ , welche für $\sigma = \beta$

$$2 - \frac{\beta - \alpha_1}{\tau_1} - \frac{\gamma - \alpha_2}{\tau_2} + \frac{\delta}{\tau_1} + \frac{\delta}{\tau_2}$$

und für $\sigma = \beta'$

$$2 - \frac{\beta' - \alpha_1}{\tau_1} - \frac{\gamma' - \alpha_2}{\tau_2} + \frac{\delta}{\tau_1} + \frac{\delta}{\tau_2}$$

ist, also nach (290) und (291) bei passender Wahl von δ für $\sigma = \beta$ und $\sigma = \beta'$, also für $\beta \leq \sigma \leq \beta'$ kleiner als 1 ist. Für (300) ist unmittelbar klar, dass bei passend gewähltem δ

$$\Theta \leq 1 - \frac{\beta - \alpha_1}{\tau_1} + \frac{\delta}{\tau_1} < 1$$

ist, ebenso für (301), dass alsdann

$$\Theta \leq 1 - \frac{\gamma' - \alpha_2}{\tau_2} + \frac{\delta}{\tau_2} < 1$$

ist, und für (302) ist

$$\Theta = 0 < 1.$$

Also ist, wie behauptet, in den zwei letzten Integralen auf der rechten Seite von (294) gleichmässig

$$(303) \quad f(s)g(\beta + \gamma - s) = O(\omega^3) \quad (\omega < 1);$$

der Quotient jedes dieser Integrale durch ω hat nach (303) den Grenzwert 0, und die Behauptung (292) des Satzes (XVIII) ist bewiesen.

Er lehrt speziell, wenn

$$\tau_1 = \tau_2 = 1$$

ist, d. h. die — alsdann trivialen — Voraussetzungen (260) und (261) weggelassen werden: Falls $f(s)$ für $s > \alpha_1$, $g(s)$ für $s > \alpha_2$ konvergiert und die Zahlen

$$\beta - \alpha_1 = x_1, \quad \beta' - \alpha_1 = x'_1, \quad \gamma - \alpha_2 = x_2, \quad \gamma' - \alpha_2 = x'_2$$

die Relationen

$$x_1 > 0, \quad x'_1 > 0, \quad x_2 > 0, \quad x'_2 > 0, \\ x_1 + x_2 = x'_1 + x'_2 > 1$$

erfüllen, so sind die Gleichungen

$$(262) \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} f(\beta + ti)g(\gamma - ti)dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n c_n}{n^{\beta+\gamma}}$$

und

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} f(\beta' + ti)g(\gamma' - ti)dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n c_n}{n^{\beta'+\gamma'}}$$

entweder beide gültig oder beide nicht gültig. Anders ausgedrückt: Wenn im Falle $\tau_1 = \tau_2 = 1$ die Gleichung (262) für ein positives Wertepaar x_1, x_2 gilt, für das

$$x_1 + x_2 > 1$$

ist, so gilt (262) für jedes positive Wertepaar x'_1, x'_2 , für welches

$$x'_1 + x'_2 = x_1 + x_2$$

ist. Dies erweitert den Satz (XIV) etwas; da (262) für

$$x_1 = x_2 > \frac{7 - \sqrt{17}}{4}$$

als gültig festgestellt wurde, so gilt (262) mit jedem $x'_1 > 0$ für

$$x'_2 = x_1 + x_2 - x'_1,$$

wenn dies positiv ist, also für jedes positive

$$x'_2 > \frac{7 - \sqrt{17}}{2} - x'_1, \\ = 1,438 \dots - x'_1.$$

Dies ist z. B. für $x'_1 > 1$ mehr als die Abgrenzung

$$x'_2 > \frac{1}{2},$$

welche durch den Satz (XIV) festgestellt wurde; für $x'_1 > \frac{7 - \sqrt{17}}{2}$ darf x'_2 sogar jede positive Zahl bezeichnen.

Herr HADAMARD hat am Ende seiner Arbeit ⁸⁸⁾ noch einige andere in seinem Satz enthaltene Identitäten über die RIEMANN'sche Zetafunktion im absoluten Konvergenzbereich besonders hervorgehoben, nämlich

$$(304) \quad \lim_{\omega=\infty} \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} |\zeta(\beta + ti)|^2 dt = \zeta(2\beta) \quad (\beta > 1),$$

und, wenn $\zeta^{(v)}(s)$ die v -te Ableitung von $\zeta(s)$ bezeichnet,

$$(305) \quad \lim_{\omega=\infty} \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} |\zeta^{(v)}(\beta + ti)|^2 dt = \zeta^{(2v)}(2\beta) \quad (\beta > 1);$$

in der Tat ist ja für $\Re(s) > 1$, wenn

$$\zeta^{(v)}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^v \log^v n}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s}$$

gesetzt wird,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n^2}{n^{2\beta}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log^{2v} n}{n^{2\beta}} \\ &= \zeta^{(2v)}(2\beta). \end{aligned}$$

Die Sätze, welche ich in diesem Paragraphen über DIRICHLET'sche Reihen im bedingten Konvergenzbereich bewiesen habe, gestatten mir nicht, (304) und (305) für ein $\beta < 1$ zu folgern ⁸⁹⁾; denn die betreffenden Reihen konvergieren gewiss nicht jenseits der Geraden $\sigma = 1$. Aber meine Beweismethode ist mutatis mutandis doch anwendbar und wird die Gültigkeit von (304) und (305) für gewisse $\beta < 1$ liefern.

Zunächst sei von (304), d. h. von $\zeta(s)$ selbst die Rede. Ich behaupte, dass (304) für

$$\frac{7 - \sqrt{17}}{4} < \beta < 1$$

gilt ⁹⁰⁾. ρ werde so gewählt, dass

$$(306) \quad \frac{2 - \beta}{\beta} < \rho < \frac{1}{2(1 - \beta)}$$

ist. Nach (24) ist

$$\zeta(\beta + ti) = \sum_{n=1}^{\omega^\rho} \frac{1}{n^{\beta+ti}} + \frac{1}{\beta - 1 + ti} \frac{1}{[\omega^\rho]^{\beta-1+ti}} - (\beta + ti) \sum_{n=\omega^\rho}^{\infty} \int_0^1 \frac{u du}{(n+u)^{1+\beta+ti}},$$

also, wenn sich die Abschätzung auf grosse ω bezieht, für $-\omega \leq t \leq \omega$ gleichmässig

$$\zeta(\beta + ti) = \sum_{n=1}^{\omega^\rho} \frac{1}{n^{\beta+ti}} + O\left(\frac{\omega^{\rho(1-\beta)}}{1+|t|}\right) + O(\omega^{1-\rho\beta}),$$

⁸⁸⁾ Vergl. S. 62 der in Anm. 34) zitierten Arbeit.

⁸⁹⁾ Für $\beta = 1$ hat offenbar die linke Seite dieser Relationen keinen Sinn.

⁹⁰⁾ Übrigens würde die Benutzung der Relation (213) an Stelle von (307) die untere Schranke $\frac{7 - \sqrt{17}}{4}$ etwas herabzusetzen gestatten. Doch will ich die Analogie mit den vorangehenden Beweisen durch die Form des Textes deutlicher hervortreten lassen.

ebenso

$$\zeta(\beta - ti) = \sum_{n=1}^{\omega^{\rho}} \frac{1}{n^{\beta-ti}} + O\left(\frac{\omega^{\rho(1-\beta)}}{1+|t|}\right) + O(\omega^{1-\rho\beta}),$$

also mit Rücksicht auf die durch (210) festgestellte Relation

$$(307) \quad \zeta(\beta + ti) = O(\omega^{1-\beta})$$

$$\begin{aligned} |\zeta(\beta + ti)|^2 &= \zeta(\beta + ti)\zeta(\beta - ti) \\ &= \sum_{n=1}^{\omega^{\rho}} \frac{1}{n^{\beta+ti}} \sum_{m=1}^{\omega^{\rho}} \frac{1}{m^{\beta-ti}} + \zeta(\beta + ti) \left(\zeta(\beta - ti) - \sum_{m=1}^{\omega^{\rho}} \frac{1}{m^{\beta-ti}} \right) \\ &+ \left(\zeta(\beta + ti) - \sum_{n=1}^{\omega^{\rho}} \frac{1}{n^{\beta+ti}} \right) \zeta(\beta - ti) - \left(\zeta(\beta + ti) - \sum_{n=1}^{\omega^{\rho}} \frac{1}{n^{\beta+ti}} \right) \left(\zeta(\beta - ti) - \sum_{m=1}^{\omega^{\rho}} \frac{1}{m^{\beta-ti}} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\omega^{\rho}} \frac{1}{n^{\beta+ti}} \sum_{m=1}^{\omega^{\rho}} \frac{1}{m^{\beta-ti}} + O\left(\frac{\omega^{1-\beta+\rho(1-\beta)}}{1+|t|}\right) + O(\omega^{1-\beta+1-\rho\beta}) \\ &\quad + O\left(\frac{\omega^{2\rho(1-\beta)}}{(1+|t|)^2}\right) + O\left(\frac{\omega^{\rho(1-\beta)+1-\rho\beta}}{1+|t|}\right) + O(\omega^{2-2\rho\beta}) \\ &= \sum_{n=1}^{\omega^{\rho}} \frac{1}{n^{2\beta}} + \sum_{n=1}^{\omega^{\rho}} \sum_{\substack{m=1 \\ m \geq n}}^{\omega^{\rho}} \frac{1}{n^{\beta+ti}} \frac{1}{m^{\beta-ti}} + O\left(\frac{\omega^{2\rho(1-\beta)}}{(1+|t|)^2}\right) + O\left(\frac{\omega^{1-\beta+\rho(1-\beta)}}{1+|t|}\right) + O(\omega^{2-\beta-\rho\beta}), \\ \int_{-\omega}^{\omega} |\zeta(\beta + ti)|^2 dt - 2\omega \sum_{n=1}^{\omega^{\rho}} \frac{1}{n^{2\beta}} &= O \sum_{n=1}^{\omega^{\rho}} \frac{1}{n^{\beta}} \sum_{\substack{m=1 \\ m \geq n}}^{\omega^{\rho}} \frac{1}{m^{\beta}} \left| \log \frac{m}{n} \right| \\ &+ O(\omega^{2\rho(1-\beta)}) + O(\omega^{1-\beta+\rho(1-\beta)} \log \omega) + O(\omega^{3-\beta-\rho\beta}), \end{aligned}$$

folglich nach (306) und (252)

$$\begin{aligned} &= O(\omega^{\rho(2-2\beta+\delta)}) + O(\omega^{2\rho(1-\beta)}) + O(\omega^{1-\beta+\rho(1-\beta)+\delta}) + O(\omega^{3-\beta-\rho\beta}) \\ &= O(\omega^3), \end{aligned}$$

wo bei passender Wahl von δ

$$\delta < 1$$

ist. Damit ist (304) bewiesen.

Ebenso ergibt sich die Richtigkeit von (305) für

$$\frac{7 - \sqrt{17}}{4} < \beta < 1.$$

Denn aus (24) folgt in der Halbebene $\Re(s) > 0$ (exkl. $s = 1$) für alle m

$$(308) \quad \left\{ \begin{aligned} \zeta^{(v)}(s) &= \sum_{n=1}^{m+1} \frac{(-1)^v \log^v n}{n^s} + \frac{d^v}{ds^v} \left(\frac{1}{s-1} \frac{1}{(m+1)^{s-1}} \right) \\ &- v(-1)^{v-1} \sum_{n=m+1}^{\infty} \int_0^1 \frac{u \log^{v-1}(n+u) du}{(n+u)^{s+1}} - s(-1)^v \sum_{n=m+1}^{\infty} \int_0^1 \frac{u \log^v(n+u) du}{(n+u)^{s+1}}; \end{aligned} \right.$$

wenn $m = [\omega^{\rho}] - 1$ ($\rho > 0$) gesetzt wird, ist nach (308) bei gegebenem $\delta > 0$ für $-\omega \leq t \leq \omega$ gleichmässig

$$(309) \quad \zeta^{(v)}(\beta + ti) = (-1)^v \sum_{n=1}^{\omega^{\rho}} \frac{\log^v n}{n^{\beta+ti}} + O\left(\frac{\omega^{\rho(1-\beta)+\delta}}{1+|t|}\right) + O(\omega^{1-\rho\beta+\delta});$$

ferner ist, wie für $\rho = 1$ aus (309) folgt,

$$(310) \quad \zeta^{(\nu)}(\beta + ti) = O(\omega^{1-\beta+\delta}).$$

ρ sei jetzt so gewählt, dass die Ungleichungen (306) erfüllt sind. Aus (309) und (310) ergibt sich (analog wie oben im Falle $\nu = 0$) gleichmässig für $-\omega \leq t \leq \omega$

$$\begin{aligned} |\zeta^{(\nu)}(\beta + ti)|^2 &= \sum_{n=1}^{\omega^2} \frac{\log^\nu n}{n^{\beta+ti}} \sum_{m=1}^{\omega^2} \frac{\log^\nu m}{m^{\beta-ti}} + O\left(\frac{\omega^{1-\beta+\rho(1-\beta)+2\delta}}{1+|t|}\right) \\ &+ O(\omega^{1-\beta+1-\rho\beta+2\delta}) + O\left(\frac{\omega^{2\rho(1-\beta)+2\delta}}{(1+|t|)^2}\right) + O\left(\frac{\omega^{\rho(1-\beta)+1-\rho\beta+2\delta}}{1+|t|}\right) + O(\omega^{2-2\rho\beta+2\delta}), \\ \int_{-\omega}^{\omega} |\zeta^{(\nu)}(\beta + ti)|^2 dt - 2\omega \sum_{n=1}^{\omega^2} \frac{\log^{2\nu} n}{n^{2\beta}} &= O \sum_{n=1}^{\omega^2} \frac{1}{n^{\beta-\delta}} \sum_{\substack{m=1 \\ m \geq n}}^{\omega^2} \frac{1}{m^{\beta-\delta}} \frac{1}{\left|\log \frac{m}{n}\right|} \\ &+ O(\omega^{2\rho(1-\beta)+2\delta}) + O(\omega^{1-\beta+\rho(1-\beta)+2\delta} \log \omega) + O(\omega^{1-\beta-\rho\beta+2\delta}) \\ &= O(\omega^3), \end{aligned}$$

wo bei passender Wahl von δ

$$\vartheta < 1$$

ist, und damit ist (305) im behaupteten Bereich bewiesen.

Ebenso liesse sich der Integrand $\zeta^{(\nu_1)}(\beta + ti)\zeta^{(\nu_2)}(\gamma - ti)$ behandeln.

Zum Schluss dieses Paragraphen will ich beweisen, dass

$$(311) \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} \left| \frac{\zeta(2+2ti)}{\zeta(1+ti)} \right|^2 dt = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

und

$$(312) \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} \frac{1}{|\zeta(1+ti)|^2} dt = \frac{\zeta(2)}{\zeta(4)} = \frac{15}{\pi^2}$$

ist. Am Anfang dieses Paragraphen waren (311) und (312) (und die entsprechenden Relationen mit $\beta < 1$) nur unter der Annahme der Richtigkeit der RIEMANN'schen Vermutung bewiesen worden; ich bin aber durch Einführung meiner Ergebnisse über

$$M(x) = \sum_{n=1}^x \mu(n)$$

und

$$\sum_{n=1}^x \lambda(n)$$

in die obige Methode instande, wirklich die Existenz der Grenzwerte in (311) und (312) und die Richtigkeit der betreffenden Gleichungen auf der (von Herrn HADAMARD wegen der Divergenz der Reihen der absoluten Beträge hier nicht erreichten) Grenzgeraden absoluter Konvergenz zu beweisen.

Nach (186) ist ⁹¹⁾ a fortiori

$$(313) \quad M(x) = O\left(\frac{x}{\log^5 x}\right),$$

also

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^{1+ti}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M(n) - M(n-1)}{n^{1+ti}}$$

konvergent (da

$$M(n) \left(\frac{1}{n^{1+ti}} - \frac{1}{(n+1)^{1+ti}} \right) = O\left(\frac{n}{\log^5 n} \cdot \frac{1}{n^2}\right)$$

ist) und, wenn die Abschätzung gleichmässig für $-\omega \leq t \leq \omega$ gilt,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta(1+ti)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^{1+ti}} \\ &= \sum_{n=1}^{\sqrt[3]{\omega}} \frac{\mu(n)}{n^{1+ti}} + \sum_{\substack{n=e^{\sqrt[3]{\omega}}+1 \\ n=1}}^{\infty} \frac{M(n) - M(n-1)}{n^{1+ti}} \\ &= \sum_{n=1}^{\sqrt[3]{\omega}} \frac{\mu(n)}{n^{1+ti}} + (1+ti) \sum_{\substack{n=e^{\sqrt[3]{\omega}}+1 \\ n=1}}^{\infty} M(n) \int_n^{n+1} \frac{du}{u^{2+ti}} - \frac{M(e^{\sqrt[3]{\omega}})}{([e^{\sqrt[3]{\omega}}] + 1)^{1+ti}} \\ &= \sum_{n=1}^{\sqrt[3]{\omega}} \frac{\mu(n)}{n^{1+ti}} + O\left(\omega \sum_{\substack{n=e^{\sqrt[3]{\omega}}+1 \\ n=1}}^{\infty} \frac{n}{\log^5 n} \cdot \frac{1}{n^2}\right) + O\left(\frac{e^{\sqrt[3]{\omega}}}{(\sqrt[3]{\omega})^5 e^{\sqrt[3]{\omega}}}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\sqrt[3]{\omega}} \frac{\mu(n)}{n^{1+ti}} + O\left(\omega \frac{1}{\log^4(e^{\sqrt[3]{\omega}})}\right) + O(\omega^{-\frac{5}{3}}) \\ &= \sum_{n=1}^{\sqrt[3]{\omega}} \frac{\mu(n)}{n^{1+ti}} + O(\omega^{-\frac{1}{3}}) + O(\omega^{-\frac{5}{3}}) \\ &= \sum_{n=1}^{\sqrt[3]{\omega}} \frac{\mu(n)}{n^{1+ti}} + O(\omega^{-\frac{1}{3}}). \end{aligned}$$

Ferner ist für jedes $\delta > 0$

$$\frac{1}{\zeta(1+ti)} = O(\omega^\delta),$$

⁹¹⁾ Ich habe (313) zuerst auf S. 548 der in Anm. ⁶⁹⁾ genannten Arbeit bewiesen.

also

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{|\zeta(1+ti)|^2} = \frac{1}{\zeta(1+ti)} \frac{1}{\zeta(1-ti)} \\
 &= \sum_{n=1}^{\sqrt[3]{\omega}} \frac{\mu(n)}{n^{1+ti}} \sum_{m=1}^{\sqrt[3]{\omega}} \frac{\mu(m)}{m^{1-ti}} + \frac{1}{\zeta(1+ti)} \left(\frac{1}{\zeta(1-ti)} - \sum_{m=1}^{\sqrt[3]{\omega}} \frac{\mu(m)}{m^{1-ti}} \right) \\
 &+ \left(\frac{1}{\zeta(1+ti)} - \sum_{n=1}^{\sqrt[3]{\omega}} \frac{\mu(n)}{n^{1+ti}} \right) \frac{1}{\zeta(1-ti)} - \left(\frac{1}{\zeta(1+ti)} - \sum_{n=1}^{\sqrt[3]{\omega}} \frac{\mu(n)}{n^{1+ti}} \right) \left(\frac{1}{\zeta(1-ti)} - \sum_{m=1}^{\sqrt[3]{\omega}} \frac{\mu(m)}{m^{1-ti}} \right) \\
 &= \sum_{n=1}^{\sqrt[3]{\omega}} \frac{\mu(n)}{n^{1+ti}} \sum_{m=1}^{\sqrt[3]{\omega}} \frac{\mu(m)}{m^{1-ti}} + O(\omega^{\delta-\frac{1}{3}}) + O(\omega^{\delta-\frac{1}{3}}) + O(\omega^{-\frac{2}{3}}) \\
 &= \sum_{n=1}^{\sqrt[3]{\omega}} \frac{(\mu(n))^2}{n^2} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \geq m}}^{\sqrt[3]{\omega}} \sum_{m=1}^{\sqrt[3]{\omega}} \frac{\mu(n)}{n^{1+ti}} \frac{\mu(m)}{m^{1-ti}} + O(\omega^{-\eta}),
 \end{aligned}$$

wo $1 > \eta > 0$ ist, folglich

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\omega}^{\omega} \frac{1}{|\zeta(1+ti)|^2} dt = 2\omega \sum_{n=1}^{\sqrt[3]{\omega}} \frac{(\mu(n))^2}{n^2} = \sum_{n=1}^{\sqrt[3]{\omega}} \frac{\mu(n)}{n} \sum_{\substack{m=1 \\ m \leq n}}^{\sqrt[3]{\omega}} \frac{\mu(m)}{m} \frac{\left(\frac{m}{n}\right)^{\omega i} - \left(\frac{m}{n}\right)^{-\omega i}}{i \log \frac{m}{n}} + O(\omega^{1-\eta}) \\
 &= O \sum_{n=2}^{\sqrt[3]{\omega}} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m} \frac{1}{\log \frac{n}{m}} + O(\omega^{1-\eta}) \\
 &= O \sum_{n=2}^{\sqrt[3]{\omega}} \frac{1}{n} \left(\sum_{m=1}^{\frac{n}{2}} \frac{1}{m} \frac{1}{\log 2} + \frac{1}{\frac{n}{2}} \sum_{m=\frac{n}{2}+1}^{n-1} \frac{1}{\log \frac{n}{m}} \right) + O(\omega^{1-\eta}) \\
 &= O \sum_{n=2}^{\sqrt[3]{\omega}} \frac{1}{n} \left(\log n + \frac{1}{n} \cdot n \log n \right) + O(\omega^{1-\eta}) \\
 &= O \sum_{n=2}^{\sqrt[3]{\omega}} \frac{\log n}{n} + O(\omega^{1-\eta}) \\
 &= O((\sqrt[3]{\omega})^2) + O(\omega^{1-\eta}) \\
 &= O(\omega^3),
 \end{aligned}$$

wo $\eta < 1$ ist. Also ist

$$\begin{aligned}
 \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} \frac{1}{|\zeta(1+ti)|^2} dt &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\mu(n))^2}{n^2} \\
 &= \frac{\zeta(2)}{\zeta(4)},
 \end{aligned}$$

womit (312) bewiesen ist. (312) zeigt u. a., dass $\frac{1}{\zeta(1+ti)}$ nicht für $t = \infty$ den Grenzwert 0 haben kann.

Genau ebenso ergibt sich (311) aus der von mir früher bewiesenen Relation ⁹²⁾

$$\sum_{n=1}^x \lambda(n) = O\left(\frac{x}{\log^s x}\right).$$

§ 16.

Nach diesen schwierigen Betrachtungen will ich zum Schluss einfachere Dinge besprechen und einige neue Beweisordnungen für die — bei DIRICHLET's Beweise des Satzes von der arithmetischen Progression gebrauchte — Tatsache angeben: Die unendliche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n},$$

in welcher $\chi(n)$ einen vom Hauptcharakter verschiedenen reellen Charakter der Gruppe der zu k teilerfremden Restklassen bezeichnet, hat einen von Null verschiedenen Wert.

Ich habe den mit funktionentheoretischen Hilfsmitteln operierenden Beweis Herrn DE LA VALLÉE POUSSIN's ⁹³⁾ in einer früheren Note ⁹⁴⁾ durch einen kürzeren ersetzt, bei dem ich allerdings einen neueren funktionentheoretischen Hilfssatz über DIRICHLET'sche Reihen mit positiven Gliedern anwandte. Ich habe aber inzwischen erkannt, dass sich die Einführung dieses Satzes noch vermeiden lässt, und bin dadurch zu folgender Be-weisanordnung gelangt.

Wenn

$$(314) \quad f(n) = \sum_{m|n} \chi(m)$$

gesetzt wird, so ist für $\Re(s) > 1$

$$(315) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$$

und stets

$$(316) \quad f(n) \geq 0, \quad f(m^2) \geq 1;$$

(316) folgt z. B. aus folgender Produktdarstellung, in welcher q alle Primzahlen durchläuft, für welche $\chi(q) = +1$ ist, r alle, für welche $\chi(r) = -1$ ist, und u alle, für

⁹²⁾ Vergl. S. 567 der in Anm. ⁶⁹⁾ genannten Arbeit.

⁹³⁾ Vergl. seine in Anm. ³⁸⁾ erwähnte Abhandlung, S. 24-29.

⁹⁴⁾ Über das Nichtverschwinden einer DIRICHLET'schen Reihe [Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1906, S. 314-320], S. 319-320.

welche $\chi(u) = 0$ ist:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} &= \prod_p \frac{1}{1 - \frac{\chi(p)}{p^s}} = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} \\ &= \prod_q \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{q^s}\right)^2} \prod_r \frac{1}{1 - \frac{1}{r^{2s}}} \prod_u \frac{1}{1 - \frac{1}{u^s}} \\ &= \prod_q \left(1 + \frac{1}{q^s} + \frac{1}{q^{2s}} + \dots\right)^2 \prod_r \left(1 + \frac{1}{r^{2s}} + \frac{1}{r^{4s}} + \dots\right) \prod_u \left(1 + \frac{1}{u^s} + \frac{1}{u^{2s}} + \dots\right). \end{aligned}$$

Aus (315) folgt

$$(317) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} \cdot \zeta(s).$$

Für

$$\sum_{n=1}^x \chi(n) = S(x)$$

ist

$$(318) \quad S(x) = O(1),$$

also

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$$

für $\Re(s) > 0$ konvergent. Die für $\Re(s) > 1$ durch

$$(319) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$$

definierte Funktion ist also nach (317) für $\Re(s) > 0$ mit etwaiger Ausnahme des Punktes $s = 1$ regulär; dieser Punkt ist im Falle

$$L = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n} = 0$$

regulär, im Falle

$$L \neq 0$$

ein Pol erster Ordnung.

Nun ist

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^x f(n) &= \sum_{nm \leq x} \chi(n) \cdot 1 \\ &= \sum_{n=1}^{\sqrt{x}} \chi(n) \sum_{m=1}^{\frac{x}{n}} 1 + \sum_{n=1}^{\sqrt{x}} 1 \sum_{n=\sqrt{\frac{x}{m+1}}}^{\frac{x}{m}} \chi(n) \\ &= \sum_{n=1}^{\sqrt{x}} \chi(n) \frac{x}{n} + O \sum_{n=1}^{\sqrt{x}} 1 + O \sum_{m=1}^{\sqrt{x}} 1 \\ (320) \quad &= Lx + x O \sum_{n=\sqrt{x+1}}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n} + O(\sqrt{x}). \end{aligned}$$

Nach (318) ist

$$\begin{aligned}\sum_{n=y}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n} &= \sum_{n=y}^{\infty} \frac{S(n) - S(n-1)}{n} \\ &= \sum_{n=y}^{\infty} S(n) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) - \frac{S(y-1)}{[y]} \\ &= O\left(\frac{1}{y}\right).\end{aligned}$$

(320) liefert also

$$\sum_{n=1}^x f(n) = Lx + x O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) + O(\sqrt{x})$$

(321) Wäre nun

$$= Lx + O(\sqrt{x}).$$

$$L = 0,$$

so wäre

$$\sum_{n=1}^x f(n) = O(\sqrt{x}),$$

also (319) für $\Re(s) > \frac{1}{2}$ konvergent, also (317) ebenda gültig. Nun wäre für reelle $s > \frac{1}{2}$ nach (316)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} > \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{2s}};$$

wenn s zu $\frac{1}{2}$ abnimmt, würde also die linke Seite von (317) über alle Grenzen wachsen, während die rechte Seite dem endlichen Grenzwert

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{\sqrt{n}} \cdot \zeta\left(\frac{1}{2}\right)$$

zustrebt. Daher ist

$$L \neq 0.$$

Dieser Beweis lässt sich — wobei er natürlich etwas länger wird — so wenden, dass die Theorie der Funktionen komplexen Argumentes vermieden wird, indem die auftretenden Reihen nur für reelle s betrachtet werden.

Wenn nämlich $f(n)$ durch (314) definiert wird, so ist für $s > 1$ (315) gültig, und es sind die Relationen (316) erfüllt. Ferner ist wie oben zu ersehen, dass (321) gilt.

Nun betrachte ich die zunächst für $s > 1$ gültige Identität

$$(322) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s},$$

deren rechte Seite als das formale Produkt der Reihen links definiert ist, d. h. wo

$$g(n) = \sum_{m+k=n} \chi(m) (-1)^{k+1}$$

ist. Die beiden Reihen auf der linken Seite von (322) konvergieren für $s > 0$, ihr Produkt rechts also mindestens für $s > \frac{1}{2}$; dies folgt aus einem Satze von STIELTJES ⁹⁵⁾

⁹⁵⁾ Dieser Satz lautet: Wenn zwei DIRICHLET'sche Reihen für $s = \rho$ konvergieren, so konvergiert ihr formal gebildetes Produkt für $s = \rho + \frac{1}{2}$. Er ist von STIELTJES auf S. 215 der Note ausgesprochen worden, welche in Anm. 79) zitiert wurde. Ein Beweis steht auf S. 113-114 meiner in Anm. 32) zitierten Arbeit.

oder auch ohne ihn direkt so:

$$\sum_{n=1}^x \chi(n) = O(1),$$

$$\sum_{n=1}^x (-1)^{n+1} = O(1),$$

also

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^x g(n) &= \sum_{n=1}^{\sqrt{x}} \chi(n) \sum_{m=1}^{\frac{x}{n}} (-1)^{m+1} + \sum_{m=1}^{\sqrt{x}} (-1)^{m+1} \sum_{n=\sqrt{x+1}}^{\frac{x}{m}} \chi(n) \\ &= O \sum_{n=1}^{\sqrt{x}} 1 \cdot 1 + O \sum_{n=1}^{\sqrt{x}} 1 \cdot 1 \\ &= O(\sqrt{x}). \end{aligned}$$

Wäre nun

$$L = 0,$$

so wäre nach (321)

$$(323) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$$

für $s > \frac{1}{2}$ konvergent. Da ferner für $s > 1$

$$(324) \quad \left(1 - \frac{2}{2^s}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s},$$

d. h.

$$\begin{aligned} g(n) &= f(n) \quad \text{für ungerade } n, \\ g(n) &= f(n) - 2f\left(\frac{n}{2}\right) \quad \text{für gerade } n \end{aligned}$$

ist, so gilt (324) überall da, wo (323) konvergiert, also mindestens für $s > \frac{1}{2}$. Es wäre also für $s > \frac{1}{2}$

$$(325) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s} = \left(1 - \frac{2}{2^s}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}.$$

Wenn s zu $\frac{1}{2}$ abnimmt, hat die linke Seite von (325) den endlichen Grenzwert

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{\sqrt{n}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}},$$

während die rechte Seite nach (316) gegen $-\infty$ strebt. Also ist

$$L \neq 0.$$

Dieser Beweis lässt sich auch ganz ohne Anwendung der Variablen s führen. Alsdann kommt ungefähr ein älterer MERTENS'scher ⁹⁶⁾ elementarer Beweis heraus. Der elementare Gedankengang lässt sich so darstellen. Wird

$$f(n) = \sum_{m|n} \chi(m)$$

⁹⁶⁾ Ueber Multiplication und Nichtverschwinden DIRICHLET'scher Reihen [Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. CXVII (1897), S. 169-184], S. 181-184.

gesetzt, so ist stets

$$(316) \quad f(n) \geq 0, \quad f(m^2) \geq 1,$$

wie aus

$$f(ab) = f(a)f(b) \quad \text{für teilerfremde } a, b$$

nebst

$$\begin{aligned} f(p^v) &= \chi(1) + \chi(p) + \cdots + \chi(p^v) \\ &= 1 + \chi(p) + (\chi(p))^2 + \cdots + (\chi(p))^v \end{aligned}$$

folgt. Also ist wegen

$$\sum_{n=1}^x \frac{f(n)}{\sqrt{n}} \geq \sum_{m=1}^{\sqrt{x}} \frac{1}{m}$$

(326)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^x \frac{f(n)}{\sqrt{n}} = +\infty.$$

Wegen

$$\sum_{n=1}^x \chi(n) = O(1)$$

ist

$$\sum_{n=1}^x \frac{\chi(n)}{\sqrt{n}} = O(1),$$

$$\sum_{n=x}^{\infty} \frac{\chi(n)}{\sqrt{n}} = O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

und

$$\sum_{n=x}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n} = O\left(\frac{1}{x}\right);$$

ausserdem ist bekanntlich, wie aus

$$\sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \frac{1}{2\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$$

unmittelbar folgt,

$$\sum_{n=1}^x \frac{1}{\sqrt{n}} = 2\sqrt{x} + B + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right),$$

wo B eine Konstante bezeichnet. Dies ergibt

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^x \frac{f(n)}{\sqrt{n}} &= \sum_{n=1}^{\sqrt{x}} \frac{\chi(n)}{\sqrt{n}} \sum_{m=1}^{\frac{x}{n}} \frac{1}{\sqrt{m}} + \sum_{m=1}^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{n=\sqrt{x}+1}^{\frac{x}{m}} \frac{\chi(n)}{\sqrt{n}} \\ &= \sum_{n=1}^{\sqrt{x}} \frac{\chi(n)}{\sqrt{n}} \left(2\sqrt{\frac{x}{n}} + B \right) + O \sum_{n=1}^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{x}} + O \sum_{m=1}^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{m}} \frac{1}{\sqrt{x}} \\ &= 2\sqrt{x} \sum_{n=1}^{\sqrt{x}} \frac{\chi(n)}{n} + B \sum_{n=1}^{\sqrt{x}} \frac{\chi(n)}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}} \sqrt{x}\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}} \sqrt{x}\right) \\ &= 2\sqrt{x} \left(L + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \right) + O(1) + O(1) + O(1) \\ &= 2L\sqrt{x} + O(1); \end{aligned}$$

daher ist mit Rücksicht auf (326)

$$L \neq 0.$$

Übrigens hat Herr MERTENS schliesslich ⁹⁷⁾ einen anderen elementaren Beweis angegeben, der insofern noch einfacher ist, als die Abschätzung des irrationalen Ausdrucks $\sum_{n=1}^x \frac{1}{\sqrt{n}}$ nicht gebraucht wird, und jenen einfachsten MERTENS'schen Beweis habe ich ⁹⁸⁾ noch kürzer dargestellt.

Berlin, den 11^{ten} Januar 1908.

EDMUND LANDAU.

BERICHTIGUNG.

Auf S. 239, Z. 11 ist am Schluss hinzuzufügen: $+\frac{1}{\log 2}$

E. L.

⁹⁷⁾ *Eine asymptotische Aufgabe* [Sitzungsberichte der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien, mathematisch-naturwissenschaftliche Classe, Bd. CVIII (1899), Abt. IIa, S. 32-37].

⁹⁸⁾ Vergl. S. 315-319 meiner in Anm. ⁹⁴⁾ genannten Arbeit.