SULLE SUPERFICIE IPERELLITTICHE.

Nota di **Giuseppe Chillemi** (Catania).

Adunanza dell'8 agosto 1909.

1. Consideriamo le funzioni θ normali pari a caratteristica nulla d'ordine ottavo corrispondenti alla tabella di periodi:

$$\begin{vmatrix} \frac{\pi i}{4} & 0 & a & b \\ 0 & \pi i & b & c \end{vmatrix}.$$

Esse sono 10. Prendendole come coordinate omogenee di un punto nello spazio ∞^3 si ottiene una superficie F d'ordine 16 avente 16 punti doppi.

Consideriamo, su di essa, i sistemi di curve d'ordine ottavo, definite dalle funzioni θ normali d'ordine 4.

Esistono 4 reti di curve d'ottavo ordine. La curva generica di una rete passa per una quaterna di punti doppi. Questi rimangono così divisi in 4 quaterne.

Per i rimanenti 12 punti doppi, per i quali non passa la curva generica di una rete, passa una curva razionale d'ottavo ordine. Avremo quindi 4 di tali curve.

Esistono poi 24 fasci di curve ellittiche d'ottavo ordine. Le curve di un fascio passano per 8 punti doppi. Questi fasci si accoppiano in 12 paia, in maniera che una curva di un fascio ed una dell'altro fascio della coppia, contengono i 16 punti doppi della superficie.

2. Proiettiamo la superficie nello spazio ordinario.

Per questo, imponiamo al sistema lineare delle sezioni iperpiane un punto quadruplo e due punti doppi rispettivamente nei tre punti doppi della superficie $(41')$, $(42')$, $(43')$ ¹⁾ appartenenti ad una stessa quaterna. Si ottiene un sistema Γ , ∞^3 , di grado 4, completo.

Nello spazio ordinario, consideriamo la superficie F' che ha, per sezioni piane, curve del sistema triplamente infinito così ottenuto.

Essa è del 4° ordine, con 3 curve razionali isolate: una quartica e due coniche, immagini dei 3 punti doppi $(41')$, $(42')$, $(43')$.

¹⁾ Per i semiperiodi che annullano le funzioni θ normali vedasi l'appendice alla Tesi in dottorato del sig. TRAYNARD: *Sur les fonctions θ de deux variables et les surfaces hyperelliptiques* [Annales scientifiques de l'École Normale supérieure (Paris), 3^e série, t. XXIV (1907), pp. 77-177].

Consideriamo su F la rete di curve di ottavo ordine che passano per la quaterna dei punti doppi: $(41')$, $(42')$, $(43')$, $(44')$ e che indichiamo con $[44']$.

La curva A di questa rete che ha un punto triplo nel punto $(41')$ risulta fondamentale pel sistema Γ essendo il numero delle sue intersezioni con una curva di questo uguale a $\frac{1}{2}(2.8 - 3.4 - 2.1.2) = 0$.

Quindi essa si proietta in un punto A' ch'è doppio per la superficie F' ; ad esso risulta infinitamente vicino l'immagine del punto doppio $(44')$. Tale punto l'indichiamo con $[A', (44')]$.

D'altra parte, accoppiando la A ad una qualunque curva della rete, si ottiene una sezione iperpiana del sistema Γ .

La curva variabile appoggia in un punto alla curva fondamentale e passa pel punto $(44')$.

Sulla F' a tale rete di curve corrisponderà una rete di sezioni piane che sono quartiche di genere due.

La superficie poi non è un cono doppio giacchè il grado di tale rete è > 0 essendo $-2 + 2 + 2 = 2$.

La quartica $(41')$ immagine del punto $(41')$ viene ad avere in A' un punto triplo ed è la sezione piana immagine di quell'iperpiano che tocca la superficie F secondo la curva A .

Le due coniche $(42)'$ e $(43)'$ passano per A .

La superficie possiede inoltre 12 punti doppi isolati immagini degli altri 12 punti doppi di F . Per essi passa una curva razionale dell'ottavo ordine avente un punto quadruplo in A' .

3. Proponiamoci di dimostrare il teorema:

Data una superficie F' del 4° ordine con 12 punti doppi isolati, due altri infinitamente vicini $[A', (44')]$, una quartica $(41)'$ e due coniche $(42)'$, $(43)'$ isolate tra loro aventi la prima un punto triplo e le seconde un punto semplice in A' , essa è iperellittica, se possiede una curva razionale dell'ottavo ordine, passante con un sol ramo per i 12 punti doppi isolati, ed avente un punto quadruplo in A' .

Infatti la superficie è regolare ed ha tutti i plurigeneri uguali all'unità.

Indicando con K la sezione piana generica, consideriamo il sistema lineare completo:

$$|C| = |K + 2(41)' + (42)' + (43)'|.$$

Tale sistema ha il grado 16, la dimensione ed il genere uguali a nove, e le sue curve hanno un punto ottuplo in A' .

La quartica $(41)'$ e le coniche risultano fondamentali pel sistema $|C|$.

Allora nello spazio ∞^9 consideriamo la superficie F che ha per sezioni iperpiane le curve del sistema $|C|$.

Al punto A' corrisponde su F una curva A dell'ottavo ordine, mentre ai rimanenti punti doppi ed alle curve isolate corrispondono 16 punti doppi isolati.

La curva razionale A passa con un ramo per i punti doppi $(42')$, $(43')$, $(44')$

immagini delle coniche $(42')'$, $(43')'$ e del punto doppio $(44')'$, ed ha un punto triplo nel punto doppio $(41')'$ immagine della quartica razionale $(41')'$.

La curva A è poi di contatto della superficie F con un iperpiano.

Infatti il sistema lineare completo:

$$|C_1| = |2A + 3(41') + (42') + (43') + (44')|$$

coincide col sistema delle sezioni iperpiane.

La curva razionale dell'ottavo ordine data, che indichiamo con H' , ha per immagine su F una curva H dell'ottavo ordine passante con un ramo per i 12 punti doppi, immagini dei 12 punti doppi isolati di F' .

Anch'essa è curva di contatto della superficie con un iperpiano giacchè, se indichiamo con α_i (per $i = 1, \dots, 12$) i dodici punti doppi per i quali essa passa, il sistema lineare completo

$$|C'| = |2H + \alpha_1 + \dots + \alpha_{12}|$$

coincide col sistema delle sezioni iperpiane.

Allora, esistendo sulla superficie F due curve dell'ottavo ordine, il cui complesso passa con un numero impari di rami per ogni punto doppio della superficie, ed ognuna delle quali è curva di contatto della superficie con un iperpiano, concludiamo ²⁾ che la superficie è iperellittica regolare, di rango 2.

4. Studiamo qualche proprietà della superficie F' .

Il punto $[A', (44')']$ è biplanare. I due piani tangenti sono le immagini l'uno dell'iperpiano toccante la superficie F secondo la curva fondamentale A , l'altro, dell'iperpiano secante secondo la A e la curva della rete che ha punto triplo in $(44')$.

Andiamo a considerare sulla F le altre 3 reti di curve iperellittiche che esistono oltre alla $[44']$.

In ognuna di esse l'insieme delle due curve, che hanno punti doppi l'una in $(41')$ e $(42')$ e l'altra in $(41')$ e $(43')$, è una sezione iperpiana del sistema Γ .

Ad essa corrisponde una sezione piana composta di due coniche segantisi in 4 punti, che sono i punti doppi della superficie relativi alla rete.

Si conclude che i 12 punti doppi isolati sono divisi in 3 quaterne piane.

Dei 24 fasci di curve ellittiche, consideriamo quei 4, le cui curve passano per $(42')$ e $(43')$ senza passare per $(41')$. Due di essi vengono definiti dalle funzioni θ normali pari di caratteristica $[21']$, $[31']$, gli altri due dalle θ normali impari di caratteristica $[41']$, $[11']$.

Consideriamo in uno dei 4 fasci la curva che ha punto doppio in $(41')$. Contandola due volte rappresenta una sezione iperpiana del sistema ∞^3 . In corrispondenza si avrà un piano toccante la superficie secondo una conica sulla quale trovansi 6 punti doppi.

Indicando le coniche con le caratteristiche delle θ che definiscono i fasci relativi, i

²⁾ Vedasi la mia Nota: *Sur les surfaces hyperelliptiques* [Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences (Paris), t. CXLVIII (1^{er} semestre 1909), pp. 1091-1093 (séance du 26 avril 1909)].

punti doppi che trovansi sopra ogni conica sono:

$$(I) \quad \begin{cases} [11'] & (11') (14'), (22') (23'), (32') (33') \\ [21'] & (12') (13'), (21') (24'), (32') (33') \\ [31'] & (12') (13'), (22') (23'), (31') (34') \\ [41'] & (11') (14'), (21') (24'), (31') (34'). \end{cases}$$

I 4 punti delle due prime colonne costituiscono una delle quaterne piane sopra accennate, così anche i punti della 3^a e 4^a colonna, e quelli delle ultime due costituiscono le altre due quaterne piane.

I piani (I) si segano a due a due secondo 6 raggi di una stella.

L'insieme dei 4 piani (I) e delle loro intersezioni costituisce un angolo tetraedro completo avente per triedro diagonale quello costituito dai tre piani delle tre quaterne.

5. Se sulla superficie F s'imponesse al sistema delle sezioni iperpiane il punto quadruplo ed un punto doppio in punti doppi della stessa quaterna e l'altro punto doppio in un punto doppio di un'altra quaterna, si otterrebbe nello spazio ordinario una superficie del 4° ordine con 13 punti doppi isolati. Di essi, 5 sono su due rette appartenenti alla superficie, due sopra una e tre sopra l'altra.

Gli altri otto appartengono a due quaterne piane.

6. Nel caso in cui i tre centri di proiezione sono tre punti doppi appartenenti a quaterne distinte, la superficie immagine ha ancora 13 punti doppi. Di essi però 6 sono su due rette, tre su ognuna, e gli altri 7, tre sopra un piano secante la superficie secondo due coniche, e gli altri quattro sopra un piano secante anch'esso la superficie secondo due coniche.

7. Supponiamo ora d'imporre al sistema delle sezioni iperpiane di F sei punti doppi nei 6 punti doppi della superficie: $(41')$, $(42')$, $(43')$, $(21')$, $(22')$, $(23')$. I primi tre appartengono ad una quaterna, e la rete di curve d'ordine ottavo relativa è quella delle θ normali pari di caratteristica $(44')$. Gli altri tre appartengono ad un'altra quaterna.

La rete relativa a questa è quella definita dalle θ normali pari di caratteristica $[24']$.

Andiamo a studiare sulla superficie immagine F' , del 4° ordine, dello spazio ordinario, con 10 punti doppi isolati e 6 coniche isolate, le immagini dei 32 sistemi di curve definite dalle θ normali pari d'ordine 4.

Nella rete definita dalle θ pari di caratteristica $[44']$ consideriamo quella curva che passa per due dei tre punti $(21')$, $(22')$, $(23')$. Ve ne sono 3. Ad ognuna di esse corrisponde su F' una retta asse di un fascio di cubiche ellittiche.

Le tre rette escono dallo stesso punto doppio $(44')$.

Esse formano un triedro le cui facce segano ulteriormente la superficie secondo una delle tre coniche immagini dei tre punti doppi $(21')$, $(22')$, $(23')$.

Analogamente si ottengono tre rette uscenti dal punto doppio immagine di $(24')$.

Il piano di due di tali rette sega ulteriormente la superficie, secondo una delle tre rimanenti coniche singolari.

Esistono poi due quintiche razionali per i rimanenti otto punti doppi, l'una passa per $(44')$ l'altra per $(24')$.

8. Seguendo il nostro metodo, può dimostrarsi che l'esistenza di una di queste due quintiche e di una delle tre rette che escono dal rimanente punto doppio, è condizione sufficiente per dimostrare che la superficie è iperellittica.

9. Delle 4 curve razionali, passanti ognuna di esse per 3 quaterne di punti doppi, due hanno per immagine le due suaccennate quintiche; le altre due hanno per immagine due coniche, su ognuna delle quali trovansi 6 punti doppi.

Indicando le coniche colle caratteristiche delle θ relative, i punti doppi che trovansi su ognuna sono:

$$[34'] \quad (44'), (24') (11') (12') (13') (14')$$

$$[14'] \quad (44'), (24') (31') (32') (33') (34').$$

Vi sono poi 6 piani seganti la superficie secondo 2 coniche. Sopra ogni piano trovansi 4 punti doppi.

Con gli otto piani considerati possiamo costituire due tetraedri aventi per vertici l'uno i punti

$$(11') (32') (33') (34')$$

e l'altro i vertici

$$(31') (12') (13') (14').$$

Ogni faccia di un tetraedro passa per un vertice dell'altro.

Antillo (Messina), 28 luglio 1909.

GIUSEPPE CHILLEMI.