Zur Theorie des Logarithmischen und des Newton'schen Potentials*).

VON C. NEUMANN in Leipzig.

§ 1.

Erste Mittheilung.

Unter diesem Titel beabsichtige ich eine Reihe von Mittheilungen zu machen über die vielfach behandelten Probleme der conformen Abbildung, des stationären Temperaturzustandes, des elektrostatischen und elektrodynamischen Gleichgewichts, und *gewisse allgemeine, von der Wahl eines geeigneten Coordinatensystems unabhängige Methoden* darzulegen, durch welche diese Probleme fast in allen Fällen gelöst werden können, wie die Begrenzung des zu behandelnden Gebietes auch beschaffen sein mag.

Ich werde diese Methoden, welche nicht nur zur Vermeidung des (mit Recht für bedenklich erklärten) Dirichlet'schen Princip, sondern auch in vielfachen andern Beziehungen von Wichtigkeit sein dürften, hier nur in flüchtigen Umrissen hinzeichnen; die dabei erforderlichen Begründungen, Entwicklungen und Beweise aber einer andern ausführlicheren Exposition vorbehalten.

Die unendliche Ebene mag — nach dem Vorgange Riemann's — angesehen werden als eine *geschlossene* Fläche, etwa als eine unendlich grosse Kugelfläche. Auf dieser Fläche sei eine in sich zurücklaufende Curve S gegeben, welche mit all' ihren Punkten in der Endlichkeit liegt. Von den beiden Theilen, in welche die geschlossene Fläche durch diese Curve zerlegt wird, mag der den unendlich fernen Punkt der Fläche enthaltende Theil mit Ω , der andere mit $\mathfrak{P}$ bezeichnet werden.

*) Aus den Berichten der Kgl. Sächs. Ges. der Wiss. vom 21. April und 31. October 1870.

Das Problem der conformen Abbildung kann bekanntlich mit Bezug auf die Fläche $\mathfrak{P}$ angesehen werden als ein Specialfall von folgendem *allgemeinern Problem*:

Es soll eine Function φ der rechtwinkligen Coordinaten x, y ermittelt werden, welche I) innerhalb $\mathfrak{P}$ überall der Gleichung $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$ genügt, welche II) sammt ihren Ableitungen $\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}$ innerhalb $\mathfrak{P}$ überall eindeutig und stetig ist, und welche endlich III) am Rande von $\mathfrak{P}$, d. i. auf der Curve S vorgeschriebene Werthe f besitzt.

Um andererseits das Problem der conformen Abbildung mit Bezug auf die Fläche Ω aussprechen zu können, bedarf es einiger Vorberreitungen. Es seien x, y die rechtwinkligen Coordinaten eines beliebigen zu Ω gehörigen Punktes, und es werde gesetzt:

$$(x + iy)(\xi + i\eta) = 1, \quad (i = \sqrt{-1}),$$

mithin

$$x = \frac{+\xi}{\xi^2 + \eta^2}, \quad \xi = \frac{+x}{x^2 + y^2},$$

$$y = \frac{-\eta}{\xi^2 + \eta^2}, \quad \eta = \frac{-y}{x^2 + y^2}.$$

Alsdann werden durch Angabe ξ, η die Werthe von x, y eindeutig bestimmt sein. Man kann daher als Coordinaten eines zu Ω gehörigen Punktes die Grössen x, y , mit demselben Recht aber auch die Grössen ξ, η benutzen. Bei Einführung dieser neuen Coordinaten ξ, η lässt sich nun das Problem der conformen Abbildung mit Bezug auf die Fläche Ω , oder vielmehr das zugehörige *allgemeinere Problem* folgendermassen aussprechen:

Es soll eine Function ψ der Coordinaten x, y oder ξ, η ermittelt werden, welche I) innerhalb Ω überall der Gleichung $\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} = 0$ Genüge leistet, welche II) sammt ihren Ableitungen $\frac{\partial \psi}{\partial \xi}, \frac{\partial \psi}{\partial \eta}$ innerhalb Ω überall eindeutig und stetig ist, und welche endlich III) am Rande von Ω , d. i. auf der Curve S die vorgeschriebenen Werthe f besitzt. Der grösseren Bequemlichkeit willen mag angenommen werden, dass diese vorgeschriebenen Randwerthe f für ψ dieselben sind, wie für φ .

Was nun die Lösung dieser beiden Probleme anbelangt, so mag — wenigstens vorläufig — vorausgesetzt werden, dass die gegebene Curve S überall convex und überall stetig gekrümmt sei, andererseits, dass die vorgeschriebenen Werthe f längs der Curve S überall stetig zusammenhängen.

Als positive Richtung der Curve S werde diejenige festgesetzt, welche angezeigt ist durch eine positive Umlaufung der Fläche $\mathfrak{P}$.

Gleichzeitig mögen die in positiver Richtung aufeinanderfolgenden Punkte der Curve bezeichnet werden mit

$$a, b, c, d, \dots s, \dots;$$

demgemäss werden $ab, bc, cd, \dots$ die aufeinanderfolgenden unendlich kleinen Elemente der Curve vorstellen. Endlich mögen unter

$$f_a, f_b, f_c, f_d, \dots f_s, \dots$$

die Werthe verstanden werden, welche die gegebene Function f besitzt in jenen Punkten $a, b, c, d, \dots s, \dots$

Es sei z ein beliebig gegebener (innerhalb $\mathfrak{P}$, oder innerhalb $\mathfrak{Q}$, oder auch auf der Curve S gelegener) Punkt; ferner seien $za, zb, zc, zd, \dots$ die von z aus nach den einzelnen Punkten der Curve gezogenen Radiivectores. Unter dem *Moment des Curvelements ab in Bezug auf z* mag diejenige Drehung verstanden werden, welche für den Radiusvector za durch jenes Element ab indicirt ist. Ist also ϑ der absolute Betrag des Winkels azb , so wird jenes Moment den Werth $+\vartheta$ oder den Werth $-\vartheta$ besitzen, jenachdem der Radiusvector za bei Durchlaufung des Winkelraumes azb eine positive oder eine negative Drehung auszuführen hat. Bezeichnet man diese den einzelnen Elementen

$$ab, bc, cd, \dots$$

mit Bezug auf z zugehörigen Momente mit

$$(ab)_z, (bc)_z, (cd)_z, \dots,$$

und bezeichnet man ferner die Summe aller dieser Elementarmomente mit Σ_z

$$\Sigma_z = (ab)_z + (bc)_z + (cd)_z + \dots,$$

so wird, wie leicht zu erkennen, der Werth von Σ_z sehr verschieden sein je nach der Lage des Punktes z , nämlich $= 2\pi$, $= \pi$ oder $= 0$ sein, jenachdem der Punkt z innerhalb $\mathfrak{P}$, auf S oder innerhalb $\mathfrak{Q}$ sich befindet.

Unter dem *Moment der gegebenen Function f in Bezug auf z* mag verstanden werden die Summe sämtlicher Elementarmomente der gegebenen Curve S , jedes multiplicirt mit dem zugehörigen Werthe f .

Dieses Moment, es mag Ω_z heissen, wird also den Werth haben:

$$\Omega_z = f_a(ab)_z + f_b(bc)_z + f_c(cd)_z + \dots,$$

die Summation ausgedehnt über sämtliche Elemente der Curve. Der Punkt z kann drei wesentlich verschiedene Lagen besitzen, und mag demgemäss verschieden bezeichnet werden, nämlich mit p , mit s , oder mit q , je nachdem er innerhalb $\mathfrak{P}$, auf S , oder innerhalb $\mathfrak{Q}$ sich be-

findet. Entsprechend diesen verschiedenen Lagen des Punktes z sind bei dem Momente Ω , dreierlei Werthe zu unterscheiden, die Werthe Ω_p , Ω_s und Ω_q . Diese Werthe gehen keineswegs stetig in einander über, und mögen daher zur leichtern Unterscheidung durch verschiedene Buchstaben markirt werden; es werde nämlich gesetzt:

$$\Omega_p = U_p, \quad \Omega_s = V_s, \quad \Omega_q = W_q.$$

Halten wir fest an der schon genannten Voraussetzung, dass f längs S stetig ist, so sind die Functionen U_p , V_s , W_q ebenfalls stetig, und zwar die erste für sämtliche Punkte p , die zweite für sämtliche Punkte s , endlich die dritte für sämtliche Punkte q . Zugleich treten in Betreff dieser Functionen folgende merkwürdige Relationen*) zu Tage:

$$U_s = V_s + \pi f_s.$$

$$W_s = V_s - \pi f_s,$$

Dabei ist unter s ein beliebiger Punkt der Curve S zu verstehen; f_s und V_s sind die Werthe der Functionen f und V in diesem Punkt; andererseits repräsentiren U_s und W_s die Grenzwerte, gegen welche U_p und W_q convergiren, falls die Punkte p und q näher und näher an s heranrücken.

Zweckmässig erscheint es, die Bezeichnung der Momente U_p , V_s , W_q noch ein wenig zu modificiren, nämlich zu setzen:

$$\frac{U_p}{2\pi} = u_p, \quad \frac{V_s}{\pi} = v_s, \quad \frac{W_q}{2\pi} = w_q,$$

jenen Momenten also einen gewissen Divisor beizugesellen, welcher für U und W den Werth 2π , für V hingegen den Werth π besitzt. In unmittelbarem Anschluss an eine allgemein übliche Ausdrucksweise, mag es gestattet sein, die Grösse u_p zu bezeichnen als das *arithmetische Mittel der gegebenen Functionswerthe f in Bezug auf den Punkt p* . Und ebenso mögen v_s und w_q bezeichnet werden als die *arithmetischen Mittel jener Werthe f in Bezug auf s und q* .

Bei Einführung dieser *arithmetischen Mittel* an Stelle der Momente gewinnen die vorhin angegebenen Relationen folgende Gestalt:

$$2u_s = v_s + f_s,$$

$$2w_s = v_s - f_s.$$

*) Der strenge Beweis dieser Relationen wird ungemein erleichtert durch Benutzung eines eleganten von P. du Bois-Reymond gefundenen Satzes (Borch. Journal Bd. 69, p. 82), für welchen später eine einfachere Deduction gegeben worden ist von H. Hankel (Schlömilch's Zeitschrift Jahrg. 14, p. 436), vgl. auch Meyer's Aufsatz (Math. Annalen Bd. VI, p. 313).

Ebenso wie aus den gegebenen Werthen f die Functionen

$$u_p, v_s, w_q$$

abgeleitet wurden; in genau derselben Weise mögen aus den Werthen v die Functionen

$$u_p', v_s', w_q'$$

entspringen [so dass also unter u_p', v_s', w_q' die arithmetischen Mittel der Werthe v in Bezug auf die Punkte p, s, q zu verstehen sind]; in genau derselben Weise mögen ferner aus den Werthen v' die Functionen

$$u_p'', v_s'', w_q''$$

entspringen; u. s. w. u. s. w.

Nun lässt sich nachweisen, dass die Functionen

$$f_s, v_s, v_s', v_s'', \dots v_s^{(n)}, \dots$$

in stetiger Weise gegen eine Constante convergiren, nämlich nachweisen, dass sämmtliche Werthe der Function $v_s^{(n)}$ von einander um weniger als eine a priori gegebene beliebig kleine Grösse differiren werden, falls man nur n gehörig gross macht. Um auf diesen Gegenstand genauer eingehen zu können, mögen a und s irgend zwei Punkte der gegebenen Curve S sein, von denen der erstere nach Belieben gewählt, aber fest, der zweite hingegen längs der Curve beweglich ist. Alsdann lässt sich nachweisen, dass bei einer solchen Bewegung des Punktes s die Differenz

$$v_s^{(n)} - v_a^{(n)}$$

ihrem absoluten Betrage nach niemals grösser werden kann als das Product

$$(M - m) \kappa^{n+1}.$$

Hier ist $M - m$ eine den gegebenen Functionswerthen f eigenthümliche Constante; denn es bedeutet M den grössten, und m den kleinsten unter jenen Werthen. Andererseits ist κ eine der gegebenen Curve S eigenthümlich zugehörige Constante, welche leicht genauer definiert werden kann, und deren Werth nothwendig kleiner als 1, nämlich jederzeit ein positiver ächter Bruch ist. Somit kann das Product

$$(M - m) \kappa^{n+1}$$

durch Vergrösserung von n beliebig nahe an 0 herangedrückt werden, wodurch alsdann gleichzeitig sämmtliche Werthe von $v_s^{(n)}$ beliebig nahe an $v_a^{(n)}$ herangedrückt werden.

Nunmehr endlich kann die Lösung der vorgelegten Probleme augenblicklich hingestellt werden. Die Werthe nämlich, welche die gesuchten

Functionen φ und ψ in irgend zwei Punkten p und q besitzen, sind folgende:

$$\varphi_p = v_a^{(2n+1)} + 2 [u_p - u'_p + u''_p - u'''_p \cdots - u_p^{(2n+1)}],$$

$$\psi_q = v_a^{(2n+1)} - 2 [w_q + w'_q + w''_q + w'''_q \cdots + w_q^{(2n+1)}],$$

wo $v_a^{(2n+1)}$ den Werth der Function $v_s^{(2n+1)}$ in dem (vorhin genannten) festen Punkte a repräsentirt, mithin eine *Constante* ist. Es lässt sich nämlich zeigen, dass die durch diese Formeln bestimmten Functionen φ_p und ψ_q einerseits den Bedingungen I) und II) mit absoluter Strenge entsprechen, und dass sie andererseits, was die Bedingung III) betrifft, Randwerthe besitzen, deren Abweichungen von den vorgeschriebenen Randwerthen f nirgends grösser sein können als

$$(M - m) \kappa^{2n+2}.$$

Während also die Bedingungen I) und II) beständig in absoluter Strenge befriedigt sind, kann gleichzeitig, durch Vergrösserung der Zahl n , die Bedingung III) in jedem gewünschten Grade der Annäherung erfüllt werden.

Zu bemerken ist, dass die Functionen φ_p und ψ_q mit Leichtigkeit sich darstellen lassen als die Logarithmischen Potentiale einer gewissen *Massenbelegung* der Curve S . Man findet nämlich:

$$\varphi_p = v_a^{(2n+1)} + \int ds \varrho_s^{(2n)} L_{sp},$$

$$\psi_q = v_a^{(2n+1)} + \int ds \varrho_s^{(2n)} L_{sq},$$

die Integrationen hinstreckt über alle Elemente ds der Curve S . Dabei sind unter L_{sp} und L_{sq} die natürlichen Logarithmen derjenigen Abstände zu verstehen, welche ds besitzt von p und von q aus. Die Function $\varrho_s^{(2n)}$ repräsentirt die Dichtigkeit der genannten Massenbelegung, und besitzt einen Werth, welcher darstellbar ist nach Belieben entweder durch die Formel

$$\varrho_s^{(2n)} = \frac{2}{\pi} \frac{\partial [u_s + u''_s + u'''_s \cdots + u_s^{(2n)}]}{\partial N},$$

oder durch die Formel:

$$\varrho_s^{(2n)} = \frac{2}{\pi} \frac{\partial [w_s + w''_s + w'''_s \cdots + w_s^{(2n)}]}{\partial N},$$

wo N die auf ds errichtete, in die Fläche $\mathfrak{P}$ hineinlaufende Normale repräsentiren soll.

Endlich mag bemerkt werden, dass die Functionen φ_p und ψ_q sich auch darstellen lassen als die Logarithmischen Potentiale gewisser *Doppelbelegungen* der Curve S . Man findet nämlich die Formeln:

$$\varphi_p = v_\alpha^{(2n+1)} + \int \frac{ds [-f_s + v_s - v'_s \cdots + v_s^{(2n)}]}{\pi} \frac{\partial L_{sp}}{\partial N},$$

$$\psi_q = v_\alpha^{(2n+1)} + \int \frac{ds [+f_s + v_s + v'_s \cdots + v_s^{(2n)}]}{\pi} \frac{\partial L_{sq}}{\partial N},$$

wo L_{sp} , L_{sq} , N die schon genannten Bedeutungen besitzen, und die Integrationen hinstreckt sind über sämtliche Elemente ds der Curve S .

Die hier exponirte Methode kann füglich bezeichnet werden als die *Methode des arithmetischen Mittels*. Sondern wir, was die gemachten Voraussetzungen anbelangt, diejenigen Voraussetzungen, welche nur leichte Modificationen bedingen, von denen ab, welche bei Anwendung dieser Methode unentbehrlich sind, so bleiben als wirklich nothwendige Voraussetzungen nur noch folgende übrig:

- 1) das betrachtete Flächegebiet darf nur *eine* Randcurve haben,
- 2) diese Randcurve muss *überall convex* sein.

Die durch diese Voraussetzungen ausgeschlossenen Fälle *mehrerer* Randcurven und *beliebig gestalteter* Randcurven lassen sich aber auf den hier behandelten Fall einer *einzigsten, überall convexen* Randcurve reduciren. Die zu dieser Reduction erforderliche Methode, welche ihrer Beschaffenheit nach etwa zu bezeichnen sein würde als die *Methode der Combination*, beabsichtige ich in einer folgenden Mittheilung darzulegen. Sodann endlich gedenke ich die analogen Methoden zu exponiren für diejenigen Probleme, welche sich auf den *Raum*, d. i. auf ein Gebiet von *drei* Dimensionen beziehen.

§ 2.

Zweite Mittheilung.

Bei den zunächst noch zu besprechenden Problemen der *Ebene* handelt es sich jedesmal um die Ermittlung einer Function der rechtwinkligen Coordinaten x, y , welche gewissen charakteristischen Bedingungen Genüge leistet. Obwohl diese Bedingungen bereits in meiner „*ersten Mittheilung*“ angegeben sind, so wird es doch zweckmässig sein, dieselben — sie mögen mit (Π.) bezeichnet werden — hier nochmals in einfacherer und zugleich strengerer Form hinzustellen.

Mit Bezug auf eine in der Ebene beliebig gegebene, endliche oder unendliche Fläche $\mathfrak{L}$, von welcher nur vorauszusetzen ist, dass ihre Randpunkte sämmtlich im Endlichen liegen, lassen sich diese Bedingungen so aussprechen:

(II.) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Von einer Function wird verlangt, sie solle in ganzer Erstreckung der gegebenen Fläche } \mathfrak{L} \text{ eindeutig und gleichmässig stetig sein. — Ueberdies wird, falls die Fläche } \mathfrak{L} \text{ unendlich ist, gleichzeitig noch verlangt, der Werth der Function solle für sämmtliche Punkte, die ins Unendliche sich entfernen, convergiren gegen irgend eine endliche [jedoch nicht vorgeschriebene] Constante.} \\ \text{Ferner wird verlangt, dass die Ableitungen der Function eindeutig und gleichmässig stetig sind in Erstreckung eines jeden Gebietes, welches vollständig innerhalb } \mathfrak{L} \text{ liegt, und dass gleichzeitig in Erstreckung eines jeden solchen Gebietes die Function der Gleichung } \Delta = 0. \end{array} \right.$

Unter den Ableitungen der Function sind dabei, falls die Function mit Φ bezeichnet wird, sämmtliche Ausdrücke:

$$\frac{\partial^{p+q} \Phi}{\partial x^p \partial y^q}$$

zu verstehen, in denen $p + q$ gleich 1 oder 2 ist; während andererseits unter der Gleichung $\Delta = 0$ die bekannte Differentialgleichung $\Delta \Phi = 0$, d. i. die Gleichung:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$$

zu verstehen ist. — Es mag bemerkt sein, dass diese Bedingungen (II.) und die aus ihnen fließenden Consequenzen, um einen festen Anhaltspunkt zu gewinnen, in möglichst sorgfältiger Weise von mir erörtert worden sind in den Mathematischen Annalen, Bd. III, Seite 325.

In meiner „ersten Mittheilung“ wurde der Fall ins Auge gefasst, dass die Fläche $\mathfrak{L}$ eine Fläche *einfachster Gattung* ist, dass sie nämlich nur eine einzige Randcurve besitzt, und dass diese Curve überall convex oder überall concav ist. In der That lässt sich zeigen, dass die damals angegebenen Operationen bei einer solchen Fläche einfachster Gattung, falls der Rand derselben keine Eckpunkte hat, zu einer Function führen, welche den eben genannten Bedingungen (II.) vollständig Genüge leistet, und ausserdem am Rande der Fläche vorgeschriebene Werthe besitzt. Selbstverständlich ist über diese vorgeschriebenen Randwerthe vorauszusetzen, dass sie eindeutig und gleichmässig stetig sind. — Ist hingegen der Rand einer solchen Fläche mit einzelnen Eckpunkten behaftet, so sind folgende Fälle zu unterscheiden:

- A. Der Rand ist zusammengesetzt aus Linien, unter denen wenigstens eine sich befindet, die *gekrümmt* ist.
- B. Der Rand besteht aus lauter *geraden* Linien.
 - B α . Die Anzahl dieser Linien ist grösser als 4.
 - B β . Die Anzahl derselben ist $= 4$ oder $= 3$.

In den Fällen A. und B α . führen die angegebenen Operationen mit geringen und leicht sich ergebenden Modificationen ebenfalls zum gewünschten Ziel. Im Falle B β . erscheinen hingegen dieselben nicht anwendbar, weil in diesem Falle die Convergenz des Verfahrens zweifelhaft wird. Mit voller Sicherheit jedoch kann dieser Fall B β . behandelt werden mit Hülfe der Methoden der Combination, von denen in meiner „ersten Mittheilung“ bereits die Rede war, und die im Folgenden näher angegeben werden sollen. — — — — —

Eine weitere Wiedergabe des nun folgenden ziemlich umfangreichen Inhalts dieser „zweiten Mittheilung“ scheint mir indessen nicht zweckmässig zu sein, schon deswegen, weil ich in nicht mehr ferner Zeit den ganzen Gegenstand in sorgfältiger Ausarbeitung und zugleich in einer mehr ansprechenden Form darlegen zu können hoffe.

Leipzig, Februar 1877.