Rappresentazione geometrica delle caratteristiche di genere 3 e di genere 4 e loro gruppi di sostituzioni.

(Di ERNESTO PASCAL, a Pavia.)

Un corso di matematiche superiori *sulla teoria delle sostituzioni*, da me dettato nell'anno scolastico 1891-92 nella Università di Pavia, mi ha dato occasione di completare gli studi che comincio a pubblicare con questo lavoro, il quale sarà seguito da altri lavori miei e dei miei discepoli. Con i quali altri lavori noi ci proporremo di mostrare tutto il vantaggio che si può trarre dall'idea fondamentale sviluppata qui applicandola massimamente allo studio di certe configurazioni note e di altre nuove.

Le caratteristiche di genere 3 furono studiate da WEBER, e quelle di genere 4 e di genere qualunque furono l'oggetto delle ricerche di NOETHER, di FROBENIUS e di altri.

È noto, dopo i lavori di CLEBSCH, il legame che esiste fra le caratteristiche e i sistemi di curve di contatto, per modo che lo studio della configurazione delle caratteristiche, o altrimenti lo studio del gruppo delle sostituzioni fra le caratteristiche diventa lo studio della configurazione dei diversi sistemi di curve di contatto, e in particolare, se si tratti di sole caratteristiche dispari, delle tangenti doppie della curva di 4.^o ordine (genere 3) o dei piani tritangenti della sestica storta (genere 4).

Siccome poi mediante le caratteristiche dispari si possono formare anche le pari, così una prima rappresentazione geometrica di tutte le caratteristiche ci verrebbe data dall'insieme di queste tangenti doppie, o di questi piani tritangenti.

Ma queste configurazioni sono troppo complicate, perchè noi le potessimo utilmente prendere per fondamento dei nostri studi.

Nelle ricerche di HESSE sulle curve di 4.^o ordine, le 28 tangenti doppie vengono a corrispondere alle 28 rette che congiungono a due a due otto punti fondamentali nello spazio. Il prof. KLEIN nelle sue lezioni a Göttingen si giovò di quest'ultima rappresentazione geometrica per ricavare alcune proprietà fondamentali delle caratteristiche di genere 3; io ho cercato di completare quest'idea ricavandone molti altri vantaggi fra cui la risoluzione di un problema già trattato in maniera completamente diversa dallo stesso prof. KLEIN (Math. Ann., Bd. 11), cioè un mezzo per assegnare le caratteristiche alle tangenti doppie di quella curva di 4.^o ordine a tangenti doppie reali studiata da PLÜCKER.

Ma la parte principale di questo lavoro è l'estensione di tale rappresentazione geometrica alle caratteristiche di genere 4 per le quali però ci manca qualcosa di analogo agli studi di HESSE; ma però per stabilire la rappresentazione non ci occorre altro che fondarci su di un teorema di NOETHER relativo all'esistenza di certi sistemi di dieci caratteristiche pari dotate di certe proprietà fondamentali.

Allora immaginando 10 punti nello spazio, nell'assieme dei 120 piani che li congiungono a tre a tre, noi possiamo avere il complesso di tutte le caratteristiche dispari, e abbiamo una figura che può considerarsi come la diretta estensione di quella figura che risulta dalle ricerche di HESSE.

Ciò fa supporre (e lo noto qui di passaggio, caso mai quest'idea possa venire utilmente raccolta da qualche geometra), che per la sestica storta di genere 4 si debba poter fare, introducendo lo spazio a 4 dimensioni, qualcosa di analogo a quello fatto da HESSE per la quartica piana; solo che mentre nella rappresentazione di HESSE si prende per fondamentale un solo sistema di contatto con caratteristica pari, per la sestica invece dovrebbero comparire come fondamentali 10 sistemi di contatto con caratteristica pari.

Prendendo come fondamento delle ricerche questa rappresentazione geometrica semplicissima ne risultano in modo facile tutti i teoremi già trovati da WEBER e NOETHER, e possiamo poi passare a considerare i sistemi completi di caratteristiche dispari che pel genere 3 corrispondono ai cosiddetti sistemi di ARONHOLD, e pel genere 4 sono i sistemi studiati da NOETHER.

Nella nostra rappresentazione i primi possono dar luogo solo a due figure diverse, mentre i secondi, come noi dimostriamo, danno luogo a 13 figure.

L'introduzione di questi sistemi ci porta a rappresentare geometricamente tutte le sostituzioni del gruppo di monodromia, mentre colla sola considerazione delle 28 rette che congiungono a due a due otto punti fondamentali, o dei 120 piani che congiungono a tre a tre 10 punti; si poteva rappresentare

solo quel sottogruppo di sostituzioni che lasciano inalterato l'assieme delle caratteristiche pari fondamentali.

Tenendo ora presenti gli studi di GEISER (Math. Ann., Bd. 1) sulla relazione fra le 27 rette della superficie di 3.^o ordine, e le 28 tangenti doppie della quartica piana si può anche passare a studiare il gruppo delle 27 rette della superficie cubica (JORDAN, pag. 317).

Di questo noi daremo qui solo un cenno in un capitolo finale; ci torneremo poi sopra di proposito in un prossimo lavoro.

Cogli stessi principii si potrebbe allora passare a studiare nello spazio a quattro dimensioni una configurazione di 119 piani analoga a quella delle 27 rette della superficie cubica nello spazio ordinario e una configurazione di 64 piani nel medesimo spazio analoga a sua volta a quella nota delle 16 rette della superficie di 4.^o ordine a conica doppia studiata da CLEBSCH. Ma ciò lo riserbiamo per un'altra occasione.

§ 1. Preliminari. — Teorema d'inversione.

In questo paragrafo non faremo che ricordare alcune nozioni generali per riordinarle secondo il punto di vista che ci occorrerà in seguito.

Si abbiano due gruppi di punti corresiduali su di una forma fondamentale di genere p :

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \dots & x_r \\ a_1 & a_2 & \dots & a_r. \end{array}$$

La condizione necessaria e sufficiente per la loro corresidualità è data dal teorema di ABEL ed è:

$$\int_{a_1}^{\omega_1} + \int_{a_2}^{\omega_2} + \dots + \int_{a_r}^{\omega_r} \equiv 0 \quad (\text{mod. periodi}),$$

dove l'integrando è quello di un integrale abeliano di 1.^a specie, e la corrispondenza fra i punti a e i punti x può stabilirsi in un modo arbitrario.

Con questo teorema può ricercarsi (*) quando è che una somma di integrali:

$$\int_{a_1}^{\omega_1} + \int_{a_2}^{\omega_2} + \dots + \int_{a_r}^{\omega_r},$$

(*) WEBER, *Abelsch. Funct.*, pag. 60.
Annali di Matematica, tomo XX.

Viene ora la domanda se questa corrispondenza è reciproca, cioè ad ogni punto del parallelepipedo corrisponde sempre un sistema di punti x . In altri termini si domanda se assegnati valori arbitrarii alle w , si possa sempre trovare un gruppo di punti x in modo che le relazioni precedenti sieno soddisfatte.

Il teorema d'inversione di WEIERSTRASS risponde a questa domanda, e dice che ad ogni punto w corrisponde un gruppo di punti x , ed uno solo.

Ciò torna a dire che: le funzioni razionali simmetriche dei p punti, sono funzioni monodrome delle w . Sotto questa forma il teorema era stato enunciato da JACOBI pel caso iperellittico, e la dimostrazione di JACOBI si fonda sulla teoria delle funzioni $\wp$ (*).

Immaginiamo ora le w dipendenti solo da $p-1$ punti. Allora esisterà fra le p w una unica relazione che corrisponderà ad una varietà immersa nello spazio a $2p$ dimensioni; per modo che mentre il punto w si muove su questa varietà, esisterà sempre il gruppo corrispondente di $p-1$ punti, e se il punto w sta fuori di questa varietà, non esisterà il gruppo di $p-1$ punti. Consideriamo il parallelepipedo iniziale, cioè quello di cui uno dei vertici sia il punto zero; e congiungiamo in esso il punto zero con tutti gli altri vertici, e troviamo i punti medii di queste diagonali. Se $P_1 P_2 \dots P_p$ sono le coordinate di un vertice, dove le P sono combinazioni lineari con coefficienti interi dei periodi di w , allora:

$$\frac{1}{2} P_1, \quad \frac{1}{2} P_2, \dots \quad \frac{1}{2} P_p,$$

saranno le coordinate di tali punti medii.

Ora dalla teoria delle $\wp$ risulta che tal punto medio sta su quella varietà di cui si è parlato avanti, sempre che il vertice (P) corrisponde ad un periodo dispari (**), cioè semprechè posto:

$$P_i = m_1 \omega_{i1} + m_2 \omega_{i2} + \dots + m_p \omega_{ip} + \\ + n_1 \omega_{ip+1} + n_2 \omega_{ip+2} + \dots + n_p \omega_{i2p},$$

si abbia:

$$m_1 n_1 + m_2 n_2 + \dots + m_p n_p$$

eguale ad un numero dispari.

(*) Per la dimostrazione di WEIERSTRASS si può riscontrare: WEIERSTRASS, Crelle, Bd. 52. — BURKHARDT, Math. Annalen, Bd. 32, pag. 429 e seg.

(**) CLEBSCH, *Géométrie*, III, pag. 238 e seg. (ediz. francese).

§ 2. Curve di contatto; tangenti doppie; funzioni e forme radicali.

Limitiamoci al caso del genere 3; allora la forma fondamentale è una curva piana generale di 4.^o ordine C_4 .

Chiameremo *curva di contatto* alla C_4 ogni curva che in ogni punto in cui tagli C_4 la *tocchi*.

Con un computo di costanti si può far vedere che *una* curva di ordine n di contatto alla C_4 esiste sempre (*).

Noi vogliamo ora studiare coi principii precedenti quante ve ne sono e quali proprietà hanno.

Sieno C'_n C_n due curve di contatto di ordine n , di cui una esiste sempre; sieno:

$$a_1 \quad a_2 \dots a_{2n},$$

i punti di contatto della prima, e

$$x_1 \quad x_2 \dots x_{2n},$$

quelli della seconda.

I punti a ciascuno contato due volte, formano un gruppo corresiduale ai punti x , ciascuno anche contato due volte; onde pel teorema di ABEL si ha che:

$$2 \left(\int_{a_1}^{x_1} + \dots + \int_{a_{2n}}^{x_{2n}} \right) dw_i \equiv 0 \quad (\text{mod. periodi}).$$

Deve cioè il primo membro essere eguale ad un periodo di w_i , cioè a

$$P_i = m_1 \omega_{i1} + m_2 \omega_{i2} + m_3 \omega_{i3} + \\ + n_1 \omega_{i4} + n_2 \omega_{i5} + n_3 \omega_{i6}.$$

Quindi si ha:

$$\int_{a_1}^{x_1} + \dots + \int_{a_{2n}}^{x_{2n}} \equiv \frac{P_i}{2} \quad (\text{mod. periodi}).$$

Ora qualunque sia il periodo P_i , essendo $2n > p$ per $n > 1$ e $p = 3$, si ha pel teorema d'inversione, che il sistema dei $2n$ punti x esisterà sempre, e sarà $2n - 3$ volte infinito.

Vi saranno dunque tanti sistemi di $2n$ punti corrispondenti a curve di

(*) CLEBSCH, *Géométrie*, III, pag. 230 nota.

contatto (ciascun sistema $2n - 3$ volte infinito), quante sono le quantità $\frac{P_i}{2}$ fra loro incongruenti, cioè $2^p = 2^6 = 64$.

Pel caso $n = 1$, cioè quando vogliamo considerare le tangenti doppie della curva di 4.^o ordine, $2n$ è minore di p , ed è eguale propriamente a $p - 1$, e quindi non possiamo applicare il teorema d'inversione. Ma in questo caso ci è utile l'osservazione fatta alla fine del paragrafo precedente, cioè che se il periodo P_i è dispari, allora esiste il sistema corrispondente di punti x , onde si ha che vi sono tante tangenti doppie quanti sono i periodi P_i dispari fra loro incongruenti, cioè 28.

Per $p = 4$ la forma fondamentale è una sestica storta e colle stesse considerazioni si giunge a far vedere che vi sono 120 piani tritangenti, mentre vi sono 256 sistemi di superficie di contatto S_n ciascuno $6n - 4$ volte infinito.

Sieno ora C_n C'_n i primi membri delle equazioni delle due curve di contatto. Allora:

$$\sqrt{\frac{C_n}{C'_n}},$$

sarà una funzione bidroma sulla superficie di RIEMANN, ed avrà per punti zero *semplici* i punti x , e per punti d'infinito *semplici* i punti a e solo essi; quindi sarà una funzione *non diramata*. La chiameremo una *funzione radicale* (*), mentre chiameremo $\sqrt{C_n}$ una *forma radicale* nel senso di KLEIN (**).

La periodicità della funzione radicale ha una relazione coi numeri interi m, n costituenti il periodo P_i .

Propriamente è facile trovare che percorrendo i $2p$ tagli canonici della superficie di RIEMANN, la funzione detta acquista rispettivamente i fattori

$$(-1)^{n_1}, \quad (-1)^{n_2}, \quad (-1)^{n_3}, \quad (-1)^{m_1}, \quad (-1)^{m_2}, \quad (-1)^{m_3} \quad (***)$$

Queste funzioni sono formate col quoziente di due forme radicali corrispondenti a due curve di contatto. Possiamo formare, nel caso di n dispari, una funzione mediante un'unica forma radicale, e un'altra forma fissa.

Costruiamo (n dispari)

$$\frac{\sqrt{C_n} \Omega(xy)}{\Gamma_{\frac{n-1}{2}}},$$

(*) Vedi il § 2 della Memoria: *Sulle funzioni sigma pari*, ecc. Annali di Matematica tom. 18.

(**) KLEIN, Math. Annalen, Bd. 36, pag. 30-32-49.

(***) Idem, pag. 33.

Consideriamo una curva di contatto C_n . Ad essa e a tutte quelle del suo sistema (e solo ad esse) appartengono i numeri m, n ; mutando il sistema muta il complesso di questi numeri.

Noi allora possiamo assumere questi numeri come rappresentanti il sistema cui appartiene C_n , e il complesso di questi numeri m, n lo chiamiamo la *caratteristica* del sistema.

Però osserviamo che il valore di questi numeri (mod. 2) dipende dalla scelta della curva C'_n che ha per punti di contatto i punti a . Quindi variando questa curva varia la caratteristica, almenochè non potessimo scegliere per la curva C'_n una tal curva di contatto che sia geometricamente distinta da tutte le altre. Ciò avviene nel caso di n pari, in cui possiamo considerare l'assieme di $\frac{n}{2}$ rette del piano ciascuna contata due volte. Tale assieme forma una curva di contatto degenerata; e distinta geometricamente da tutte le altre. Analogamente anche i numeri g, h possono assumersi come caratteristica del sistema, perchè abbiamo fatto vedere che essi non mutano facendo variare nel proprio sistema la curva di contatto.

Allora per le curve di contatto di ordine pari noi assumeremo come caratteristica l'assieme dei numeri (m, n) , prendendo per fondamentale la curva di contatto degenerata, e per quelle di ordine dispari noi assumeremo come caratteristica l'assieme dei numeri (g, h) . In ambo i casi allora queste caratteristiche figurano come caratteristiche assolute.

La caratteristica (gh) per la sua natura non potrebbe adattarsi a curve di contatto di ordine pari, mentre la caratteristica (mn) potrebbe anche adattarsi a curve di contatto di ordine dispari perdendo però il suo carattere *assoluto*. Seguendo il KLEIN, le caratteristiche (mn) si chiamano *elementari*, e le (gh) *prime*.

§ 3. Monodromia della superficie di Riemann.

Gruppo delle curve di contatto di ordine pari e dispari.

Gruppo delle caratteristiche.

Immaginiamo che i coefficienti della curva di 4.^o ordine descrivano nel piano complesso delle curve chiuse, cioè alteriamo i coefficienti e facciamoli poi tornare ai loro valori primitivi. Allora la curva di 4.^o ordine torna in sè stessa, e quindi considerando la superficie di RIEMANN corrispondente, questa torna in sè stessa, e tornano in loro stessi dopo aver subito una certa per-

tuzione abeliana come la chiama il JORDAN), è noto che fra i coefficienti debbono sussistere delle relazioni identiche (*).

Con queste trasformazioni dei periodi ω , si possono avere le formole di trasformazione delle caratteristiche (**).

Per le *caratteristiche elementari* si hanno le formole:

$$\left. \begin{aligned} m_1 &\equiv a_1 m'_1 + a_2 m'_2 + a_3 m'_3 + a_4 n'_1 + a_5 n'_2 + a_6 n'_3 \\ m_2 &\equiv b_1 m'_1 + \dots \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \pmod{2}. \quad (1)$$

E per le *caratteristiche prime* si hanno invece le formole:

$$\left. \begin{aligned} g_1 &\equiv a_1 g'_1 + a_2 g'_2 + a_3 g'_3 + a_4 h'_1 + a_5 h'_2 + a_6 h'_3 + \\ &\quad (a_1 a_4 + a_2 a_5 + a_3 a_6) \\ g_2 &\equiv \dots \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \pmod{2}. \quad (11)$$

Esaminiamo a parte i gruppi formati colle sostituzioni della 1.^a o della 2.^a specie.

Essendo omogenee le formole della prima trasformazione, si ha che dalla caratteristica (0) io passo sempre alla caratteristica (0), cioè per tutte le sostituzioni di monodromia vi è una caratteristica elementare che resta inalterata. Inoltre badando alle relazioni che debbono sussistere fra i coefficienti a , b , c ,... si trova che tali relazioni non danno alcuna altra limitazione, in modo che per una sostituzione (I) da un sistema di numeri (m, n) posso passare a qualunque altro meno il sistema (0, 0). Cioè il gruppo delle sostituzioni (I) è transitivo fra tutte le caratteristiche elementari, meno però per la caratteristica zero che non viene spostata da nessuna sostituzione.

Inoltre se abbiamo due caratteristiche

$$\begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} M_1 & M_2 & M_3 \\ N_1 & N_2 & N_3 \end{pmatrix},$$

si può formare la espressione

$$I \equiv \Sigma (m_i N_i - n_i M_i) \pmod{2},$$

(*) HERMITE, Comptes Rendus, tom. 40. — JORDAN, *Subst.*, pag. 171. — BURKHARDT, Math. Ann., Bd. 35, pag. 203.

(**) KLEIN, Math. Ann., Bd. 36, pag. 36.

Annali di Matematica, tomo XX.

e questa colla sostituzione (I) diventa esattamente

$$\Sigma(m'_i N'_i - n'_i M'_i) \pmod{2},$$

cioè resta inalterata; cioè esiste un invariante formato con due caratteristiche elementari, mentre non ne esiste uno formato con una sola caratteristica.

Da questi risultati si può passare ora senz'altro a considerazioni analoghe sulle curve di contatto di ordine pari. Geometricamente è chiaro che fra i sistemi di curve di contatto di ordine pari ne esiste uno (quello formato coll'assieme di $\frac{n}{2}$ rette del piano ciascuna contata due volte) che non si altera

con qualunque sostituzione di monodromia. Se noi allora a questo sistema diamo la caratteristica zero (come appunto abbiamo fatto avanti per ottenere caratteristiche assolute) noi ci accordiamo col fatto analitico che per le sostituzioni di monodromia la caratteristica elementare zero resta inalterata.

Allora siccome per le trasformazioni di monodromia rimane fisso sia quel tale sistema preso per base e sia la caratteristica che vi corrisponde, così quando la caratteristica (mn) è diventata $(m'n')$ noi possiamo concludere che il sistema di curve cui apparteneva (mn) è diventato il sistema cui apparteneva $(m'n')$. Ma abbiamo detto che il gruppo delle caratteristiche elementari è transitivo, cioè da ogni (mn) [meno (00)] posso passare ad ogni $(m'n')$, dunque per monodromia posso passare da ogni sistema di curve di contatto di ordine *pari* (meno il sistema di curve degenerate) in ogni altro sistema.

Stabilito però il passaggio da un sistema ad un altro resta limitata la permutazione di tutti gli altri sistemi, perchè colle caratteristiche di due sistemi si può formare, come si è visto avanti, un invariante e quindi stabilito il passaggio di un sistema, resta limitato il passaggio degli altri dalla condizione che la espressione I avanti considerata resti inalterata.

Passiamo ora alle *caratteristiche prime*.

Dalle formole di trasformazione risulta, poichè esse non sono più omogenee, che dalla caratteristica (0) si potrà passare ad un'altra caratteristica non necessariamente zero.

Inoltre con una sola caratteristica si può formare un'espressione invariante cioè:

$$J \equiv g_1 h_1 + g_2 h_2 + g_3 h_3 \pmod{2},$$

come è facile verificare, giovandosi delle sostituzioni generatrici di KRAZER (*);

(*) Annali, vol. 12.

onde allora viene la necessità di distinguere le caratteristiche prime in pari e dispari secondochè è pari o dispari il corrispondente invariante J .

Infine da ogni caratteristica pari si può passare ad ogni altra pari, e da ogni dispari ad ogni altra dispari.

Il gruppo delle sostituzioni fra le caratteristiche prime è dunque transitivo rispetto alle sole caratteristiche pari fra loro e dispari fra loro. Le pari sono 36 e le dispari 28. Passando ora a considerare le curve di contatto di ordine dispari si ha dunque che colle sostituzioni di monodromia non si può passare da ogni sistema ad ogni altro, ma tutti i 64 sistemi si dividono in due classi, e si possono permutare fra loro solo i sistemi di una stessa classe.

Questa scissione dei 64 sistemi di curve di contatto di ordine dispari in due classi corrisponde ad una proprietà geometrica di tali sistemi, cioè che fra i 64 sistemi di curve di contatto di ordine dispari ve ne sono 28 godenti di una proprietà geometrica di cui non godono gli altri. In primo luogo noi possiamo considerare una tangente doppia insieme con un complesso di rette contate due volte; allora si ha una curva di contatto che colle sostituzioni di monodromia non può evidentemente che mutarsi in una della stessa natura, e poichè di queste non se ne possono formare che 28 (corrispondenti alle 28 tangenti doppie), esistono 28 sistemi che possono trasformarsi fra loro ma non con alcuno dei 36 rimanenti; ognuno dei 28 sistemi resta dunque coordinato con una delle 28 tangenti doppie.

Si può poi dimostrare che per i punti di contatto di una curva di uno di tali sistemi e per i due punti di contatto della tangente doppia corrispondente si può far passare una curva di ordine $\frac{n+1}{2}$ (CLEBSCH.)

Evidentemente i due gruppi, quello delle sostituzioni fra i sistemi di curve di contatto di ordine pari, e quello per le curve di contatto di ordine dispari, sono fra loro *isomorfi ad un grado*, perchè ad ogni sostituzione dell'uno corrisponde una sostituzione dell'altro, e al prodotto di due sostituzioni di un gruppo corrisponde il prodotto delle sostituzioni corrispondenti dell'altro. Consideriamo ora l'assieme di due curve di contatto. Evidentemente si ha una nuova curva di contatto il cui ordine è quanto la somma degli ordini delle due curve date.

Ora supponendo le due curve ambedue di ordine pari o dispari, vogliamo ricercare la caratteristica che competerà alla curva di contatto che è l'assieme delle due.

Tenendo presente la definizione di caratteristica è facile vedere che in qualunque caso per trovare la caratteristica risultante basterà sommare i numeri corrispondenti alle due curve date. Intanto se si tratti di due curve di ordine dispari, il loro assieme sarà di ordine pari, quindi la somma delle due caratteristiche prime deve essere una caratteristica elementare.

Ricordando che siccome i numeri che figurano nelle caratteristiche sono presi mod. 2, così fare la loro somma o la loro differenza è la stessa cosa, si ricava che il risultato ultimamente ottenuto è d'accordo con un'osservazione fatta nel paragrafo precedente.

Inoltre deve allora evidentemente accadere che per le trasformazioni di monodromia, la somma di due caratteristiche prime deve trasformarsi colle stesse formole con cui si muta una caratteristica elementare, e ciò si può infatti facilmente verificare tenendo presenti le formole indicate sul principio di questo paragrafo.

Così se sommiamo tre caratteristiche prime si ha di nuovo una caratteristica prima, e in generale la somma di un numero pari di caratteristiche prime dà una caratteristica elementare, e la somma di un numero dispari di esse dà una caratteristica prima. Ciò è in corrispondenza col fatto che un numero dispari o pari di curve di ordine dispari, dà una curva di ordine dispari o pari.

In certo modo allora le caratteristiche prime funzionano come le generatrici di tutte le altre caratteristiche.

Dalle cose dette risulta che la somma di due caratteristiche prime non ha una parità o disparità fissa colle sostituzioni di monodromia, perchè si comporta come una caratteristica elementare; mentre che la somma di tre caratteristiche prime ha sempre una parità o disparità fissa.

Infine è chiaro che accanto ai gruppi delle sostituzioni fra le curve di contatto c'è da considerare ancora il gruppo delle tangenti doppie. Per monodromia le 28 caratteristiche dispari si permutano fra loro, e perciò si permutano fra loro le 28 tangenti doppie cui, come sappiamo, (§ 2) competono appunto caratteristiche dispari. Il gruppo delle 28 tangenti doppie è transitivo come risulta dalle cose precedenti.

Ora passeremo a considerare due generazioni della curva di 4.^o ordine, e quindi le due figure corrispondenti chiamate figura di GEISER e figura di HESSE, e i gruppi di sostituzioni corrispondenti a queste figure.

§ 4. Figure di Geiser e di Hesse.

È noto che il GEISER e l'HEPSE hanno studiata la curva piana di 4.° ordine in relazione colla superficie di 3.° ordine e colla rete di quadriche.

Riassumeremo ora queste relazioni e cominciamo dalla figura di GEISER (Math. Ann., Bd. 1).

Se da un punto meniamo il cono tangente ad una superficie cubica S_3 abbiamo un cono di 6.° ordine, e se il punto sta su S_3 abbiamo invece un cono di 4.° ordine e il piano tangente ad S_3 in quel punto contato due volte. Tagliamo questo cono con un piano, e abbiamo una curva di 4.° ordine generale C_4 .

Ogni curva di S_3 tocca il cono di proiezione e quindi si proietta in una curva di contatto a C_4 ; onde le sezioni piane di S_3 diventano curve di 3.° ordine di contatto a C_4 ; si ha così un sistema di cubiche di contatto. Il piano tangente ad S_3 nel centro di proiezione taglia il piano di C_4 in una tangente doppia che chiameremo tangente doppia fondamentale.

Ogni piano passante per una delle 27 rette di S_3 e pel centro di proiezione taglia ancora il piano di C_4 in una tangente doppia di C_4 e così si hanno tutte le 28 tangenti doppie di C_4 .

La polare del centro di proiezione rispetto a S_3 è una quadrica S_2 ; l'intersezione di S_3 con S_2 è una sestica storta C_6 passante pel centro di proiezione e che è la curva di contatto di S_3 col cono circoscritto.

La C_4 sarà la proiezione di C_6 dal centro di proiezione il qual punto è un punto doppio per C_6 . Le due tangenti in tal punto doppio sono le congiungenti il centro di proiezione coi due punti di contatto di una tangente doppia di C_4 .

Le trisecanti di C_6 sono:

- 1.° Ogni retta passante pel punto doppio e per un altro punto di C_6 .
- 2.° Ogni generatrice rettilinea della quadrica S_2 .

I tre punti d'incontro della trisecante con C_6 corrispondono per C_4 ai tre punti in cui una retta passante per uno dei punti di contatto della tangente doppia fondamentale taglia la C_4 .

Come si vede tutta questa figura è correlata ad una tangente doppia di C_4 che figura come fondamentale; ad essa è correlata ancora un sistema di cubiche di contatto; quello ottenuto colle sezioni piane di S_3 . Onde vi sono

28 figure di GEISER corrispondenti alle 28 tangenti doppie. Per le sostituzioni di monodromia queste 28 figure di GEISER si permutano le une colle altre mentre la curva C_4 resta inalterata. Per quelle sostituzioni di monodromia che lasciano inalterata una tangente doppia la figura di GEISER corrispondente resta inalterata; però le 27 rette della superficie si scambiano fra loro; cioè *il sottogruppo che lascia inalterata una caratteristica dispari corrisponde al gruppo delle 27 rette della superficie di 3.^o ordine.*

Passiamo ora alla figura di HESSE.

Consideriamo una rete di quadriche; i vertici delle quadriche che degenerano in coni formano una sestica storta C_6 non situata su di una quadrica; interpretando i corrispondenti parametri della rete come le coordinate di un punto del piano, si ha una curva piana generale di 4.^o ordine C_4 . Ad ogni punto di C_6 corrisponde dunque un punto di C_4 .

Gli ∞^3 gruppi di 6 punti segati su C_6 da un piano dello spazio corrispondono su C_4 a 6 punti di contatto di una cubica, onde anche qui si ha un sistema fondamentale di cubiche di contatto; ai 12 punti in cui una quadrica taglia C_6 corrispondono i 12 punti in cui una cubica taglia C_4 , e alle quadriche della rete corrispondono le polari di un punto rispetto alla C_4 , mentre i coni della rete corrispondono alle polari di un punto di C_4 rispetto a C_4 .

Ai quattro punti d'incontro di una retta con C_4 corrispondono i quattro vertici dei quattro coni di un fascio di quadriche compreso nella rete, e questi quattro punti sono definiti da questa proprietà che il piano polare fisso di uno di essi rispetto a tutte le superficie del fascio è il piano degli altri tre punti.

Per ogni punto di C_6 passano tre trisecanti, e si può stabilire una corrispondenza simmetrica (3, 3), senza coincidenze fra i punti di C_6 (*).

Ai due punti di contatto di una tangente doppia di C_4 corrispondono due punti di C_6 che sono i vertici dei due coni compresi in un fascio di quadriche in cui i quattro coni si riuniscono a due a due.

Le congiungenti a due a due gli otto punti fondamentali della rete di quadriche incontrano in due punti la sestica; si dimostra che tali due punti sono i punti corrispondenti ai due punti di contatto di una tangente doppia. Ne ricaviamo dunque che alle tangenti doppie di C_4 corrispondono le rette che congiungono a due a due gli otto punti fondamentali della rete di quadriche. In questa rappresentazione quindi non c'è alcuna tangente doppia che

(*) Vedi Memoria IV: *Sopra le funzioni sigma pari*, ecc. Annali di Mat., tom. 18, 1890.

figura in modo distinto dalle altre e c'è solo un sistema di cubiche di contatto che figura come sistema base della rappresentazione e si può far vedere che è uno di quei 36 sistemi corrispondenti alle 36 caratteristiche pari. Vi sono quindi 36 figure di HESSE.

Colle sostituzioni di monodromia che lasciano inalterato il sistema fondamentale di cubiche, cioè la caratteristica pari corrispondente, la figura di HESSE rimane la stessa, ma poichè le tangenti doppie si permutano fra loro, così si permutano fra loro gli otto punti fondamentali della rete in tutti i modi possibili, perchè da una tangente doppia noi possiamo passare a qualunque altra. Si permutano fra loro anche tutte le altre 35 caratteristiche pari.

Potendo scegliere come fondamentale una qualunque delle 36 caratteristiche pari, si ha che l'ordine del sottogruppo che lascia inalterata una caratteristica pari sarà l'ordine del gruppo totale diviso per 36 cioè $8!$, onde si ricava che permutando fra loro gli otto punti fondamentali in tutti i modi possibili si ha il sottogruppo che lascia inalterata una caratteristica pari, cioè *tale sottogruppo è isomorfo col gruppo simmetrico di otto elementi*.

Tale sottogruppo è semplicemente transitivo fra le 28 caratteristiche dispari, perchè permutando fra loro gli otto punti io posso fare andare una caratteristica dispari in un'altra qualunque, ma non posso poi fare lo stesso per un'altra caratteristica dispari, perchè il trasporto di un punto in un altro porta con sè il trasporto di tutte le rette che fanno capo in quel punto e quindi non posso più stabilire arbitrariamente il passaggio di un'altra caratteristica presa ad arbitrio.

Le figure di GEISER e di HESSE ci fanno conoscere in un molto facile la struttura del gruppo delle sostituzioni fra le caratteristiche prime. Risulta infatti che tal gruppo, a differenza di quello delle caratteristiche elementari, non è transitivo in tutti gli elementi, ma tali elementi si scindono in due classi di 28 e 36 elementi, e fra gli elementi di ciascuna classe esiste la transitività.

Questa transitività però in un certo senso è doppia; cioè noi possiamo disporre arbitrariamente del passaggio di una caratteristica pari ad una pari, e nello stesso tempo di una dispari ad una dispari, ed esiste sempre la sostituzione che effettua contemporaneamente questi due passaggi arbitrariamente stabiliti.

Ciò lo possiamo ricavare dalla figura di HESSE.

Sieno infatti a, a' due caratteristiche pari, e b, b' due dispari; noi vogliamo far vedere che esiste una sostituzione che muta a in a' mentre muta b in b' .

Costruiamo le due figure di HESSE aventi per basi le caratteristiche a, a' . Esistono sostituzioni che mutano la prima figura nella seconda. Sia s una di

queste. Questa s muti b in b'' . Allora esiste ancora una sostituzione s' che lascia inalterata a' e che muta b'' in b' . Quindi ss' muta a in a' e b in b' . D'altra parte la figura di GEISER ci mostra che nel solo assieme delle caratteristiche dispari esiste anche una doppia transitività.

In altri termini il gruppo totale è fatto in maniera che noi anzichè disporre del passaggio di una dispari ad una dispari e contemporaneamente di una pari ad una pari, possiamo disporre del passaggio solo di *due* dispari.

Infatti abbiamo visto che il sottogruppo delle sostituzioni che lasciano inalterata una caratteristica dispari corrisponde al gruppo delle 27 rette della superficie cubica. Ora tale gruppo è semplicemente transitivo (*), onde sarà transitivo il sottogruppo di cui si parla; ma abbiamo già disposto di un elemento che abbiamo lasciato inalterato (la base della figura di GEISER), dunque il gruppo totale è doppiamente transitivo.

Se noi da tutte le sostituzioni del gruppo totale cancelliamo gli elementi che rappresentano le caratteristiche pari, abbiamo il gruppo delle caratteristiche dispari o delle tangenti doppie, e quindi ricaviamo che tal gruppo è anche doppiamente transitivo in senso assoluto. Se il gruppo totale è doppiamente transitivo in rapporto alle 28 caratteristiche dispari e alle 36 pari, il suo ordine deve essere divisibile per $28 \cdot 36$ ciò che infatti si trova.

E così, se è doppiamente transitivo in rapporto solo alle 28 dispari, il suo ordine deve essere divisibile per $28 \cdot 27$ ciò che anche si verifica.

Ora viene la domanda se esiste anche la doppia transitività rispetto alle sole 36 pari. L'ordine del gruppo è divisibile per $36 \cdot 35$. In uno dei capitoli seguenti studiando più addentro la figura di HESSE e la rappresentazione geometrica delle caratteristiche, troveremo che tale doppia transitività esiste infatti perchè tutte le caratteristiche pari possono essere rappresentate da certe terne di rette che possono per monodromia trasformarsi le une nelle altre. (Vedi § 7 in fine.)

§ 5. Introduzione alla rappresentazione geometrica delle caratteristiche di genere 3.

La figura di HESSE considerata nel paragrafo precedente ci dà il mezzo di rappresentare geometricamente le caratteristiche; infatti ivi abbiamo trovato che le tangenti doppie corrispondono alle 28 congiungenti a due a due gli otto punti fondamentali della rete di quadriche.

(*) JORDAN, *Subst.*, pag. 316.

Ora sappiamo che alle tangenti doppie corrispondono caratteristiche prime dispari, dunque nel complesso delle 28 rette che congiungono a due a due otto punti fondamentali abbiamo una rappresentazione geometrica delle caratteristiche dispari (*).

Allora noi possiamo fare astrazione da tutta la figura di HESSE, e considerare solo questa configurazione immaginando fissa una caratteristica pari presa come base (che è quella corrispondente a quel sistema di cubiche di contatto che funziona come base nella figura di HESSE) e tenendo presente che la configurazione deve considerarsi come rientrante in sè stessa con una sostituzione di monodromia che lasci inalterata quella caratteristica pari, e quindi una parte della configurazione formante una certa figura qualunque, deve ritenersi equivalente cioè trasformabile in un'altra figura simile qualunque.

Allora con semplici considerazioni di leggi combinatorie noi dedurremo tutte le proprietà degli aggruppamenti di caratteristiche, e poi passeremo al caso delle caratteristiche di genere 4.

§ 6. Coppie di tangenti doppie.

Incominciamo coll'esaminare le coppie di due caratteristiche dispari. È evidente che non esistono altri tipi che i due tipi I, II rappresentati dalla fig. 1.^a.

Per il principio dell'equivalenza fra tutte le figure simili si ricava che tutte le figure come I sono fra loro equivalenti, e così tutte le figure come II. Intanto per quello che si è osservato nel § 4 una coppia di caratteristiche prime non ha una parità o disparità fissa, quindi noi senz'altro non potremmo dire se la coppia I dà o no una caratteristica pari o dispari.

Però noi sappiamo che nella rappresentazione geometrica introdotta nel paragrafo precedente dietro lo studio della figura di HESSE, comparisce come fondamentale una certa caratteristica pari, e d'altra parte è chiaro che le coppie di caratteristiche prime acquistano una parità o disparità fissa quando ad esse si aggiunge costantemente una caratteristica fissa. Quindi possiamo asserire che il tipo I e II darà luogo ad una caratteristica di carattere definito se noi intendiamo sempre aggiunta la caratteristica fondamentale della rappresentazione. Ci resta allora a vedere quale dei due tipi dà luogo ad una ca-

(*) KLEIN, Lezioni a Göttingen, 1888-89.

Annali di Matematica, tomo XX.

ratteristica pari e quale ad una dispari. Per l'equivalenza fra tutte le figure del tipo I o II, e tutte le caratteristiche pari o dispari, possiamo dire che tutte le caratteristiche dispari debbono essere esaurite da uno dei due tipi e tutte le pari dall'altro. Quindi adesso non resta che effettuare un calcolo numerico e vedere quante figure del tipo I vi sono nella configurazione completa e quante del tipo II. Allora fra i due numeri che otterremo ricercheremo quello divisibile per 28 (e vi dovrà essere) e ad esso corrisponderà il tipo che dà luogo a caratteristiche dispari. L'altro tipo dà naturalmente caratteristiche pari.

Però facciamo un'osservazione. Formando così tutte le coppie di caratteristiche dispari diverse e aggiungendo ogni volta la caratteristica pari fondamentale, io potrò ottenere tutte le caratteristiche pari, meno una che è quella scelta per fondamentale; perchè per ottenere quella con questo procedimento occorrerebbe che la somma delle due dispari fosse zero, il che non è possibile quando si tratti della somma di due caratteristiche diverse. Quindi le caratteristiche pari che potrò ottenere saranno 35 e non 36.

Ora del tipo I ve ne sono evidentemente $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{2} = 28 \cdot 6$ e del tipo II ve ne sono $\frac{1}{2} \cdot \frac{8 \cdot 7}{2} \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} = 35 \cdot 6$; dunque ne concludiamo che il tipo I rappresenta caratteristiche dispari, e ciascuna di esse 6 volte, e II rappresenta caratteristica pari e ciascuna anche 6 volte.

Se per caratteristica pari fondamentale prendiamo la caratteristica (0) ne ricaviamo di qui un teorema noto, che cioè ogni caratteristica pari o dispari di genere 3 può in 6 modi diversi essere rappresentata come somma di due caratteristiche dispari (*).

§ 7. Terne di tangenti doppie.

Tutte le possibili terne di caratteristiche dispari sono rappresentate dalle cinque figure della fig. 2.^a. Il numero di tali terne è rispettivamente

$$56; \quad 28 \cdot 30; \quad 35 \cdot 48; \quad 28 \cdot 15; \quad 35 \cdot 8.$$

Ora ci proponiamo di ricercare quali di questi tipi sono tali che la somma delle caratteristiche dispari da esse rappresentate dia una caratteristica dispari

(*) WEBER, *Abelsch. Funct.*, pag. 18.

o pari (*). Anche qui possiamo servirci del principio di equivalenza e ritenere intanto che tutte le figure simili danno tutte o una caratteristica pari o una dispari.

Possiamo procedere in due modi e possiamo giovare di questi teoremi noti sulle caratteristiche (**):

1. Ogni caratteristica pari si può scomporre in 56 modi nella somma di tre caratteristiche dispari.

2. Ogni caratteristica dispari si può scomporre in 45 modi nella somma di tre caratteristiche dispari diverse.

Di qui si ha che debbono esistere $35 \cdot 56$ terne di caratteristiche dispari, la cui somma è pari, ed esistono $45 \cdot 28$ terne la cui somma è dispari.

Procederemo prima con un metodo basato essenzialmente sui principii sviluppati avanti e senza giovare di questi teoremi; e poi indicheremo un metodo seguito dal prof. KLEIN nelle sue lezioni e basato essenzialmente sulla conoscenza dei teoremi enunciati sopra.

Incominciamo col proporci il problema: Noi sappiamo che le due rette indicate dal tipo I della fig. 1.^a insieme colla caratteristica fondamentale rappresentano una caratteristica dispari. Quale caratteristica dispari rappresentano?

È chiaro che chiamando a b c queste tre caratteristiche dispari (la somma e le due date) due di esse insieme colla caratteristica fondamentale debbono dare la terza, cioè due di esse qualunque debbono formare sempre una figura come I (fig. 1.^a) e quindi non possono che formare un triangolo, cioè il tipo I (fig. 2.^a) rappresenta la caratteristica pari fondamentale.

Si potrebbe obiettare che essendo questo ragionamento basato sul fatto che a due a due le tre rette debbono avere un punto comune, c'è anche il tipo V che soddisfa alla stessa condizione essendo esso composto di tre rette passanti per un medesimo punto.

Però se una delle figure del tipo V rappresenta la caratteristica fondamentale, per il solito principio di equivalenza tutte la debbono rappresentare, e allora considerando due figure del tipo V differenti solo per una retta, dovendo la somma delle tre rette di ciascuna figura rappresentare la stessa caratteristica, la terza retta dell'una dovrà essere la stessa della terza retta dell'altra, e quindi si cade nell'assurdo.

Siccome dunque si possono formare solo 56 triangoli si conchiude che

(*) KLEIN, Lezioni a Göttingen, 1889.

(**) WEBER, *Abelsch. Funct.*, pag. 23.

la caratteristica pari fondamentale può in 56 modi (e non più) rappresentarsi come somma di tre caratteristiche dispari diverse, e poichè esiste l'equivalenza fra tutte le caratteristiche pari, e potendo noi prendere a fondamento della rappresentazione una qualunque caratteristica pari, così possiamo dire che ogni caratteristica pari può in 56 modi rappresentarsi come somma di tre dispari. Ritroviamo così il teorema che abbiamo enunciato sopra.

Ciò posto è facile riconoscere che carattere hanno tutte le altre terne della fig. 2.^a

In effetti pel tipo II osserviamo (vedi fig. 3.^a) che la somma di a b dà la caratteristica dispari d più la caratteristica fondamentale, in virtù di quello che adesso abbiamo dimostrato. Ma $d + c$ dà ancora la caratteristica fondamentale più la caratteristica dispari e , dunque in tutto

$$a + b + c = e + 2F = e,$$

chiamando F la caratteristica fondamentale.

Quindi il tipo II dà una caratteristica dispari.

Analogamente troviamo che il tipo III dà luogo ad una caratteristica pari perchè (fig. 4.^a) dà:

$$d + c + F$$

che, come sappiamo dal capitolo precedente, è pari. Così il tipo V è anche pari perchè (fig. 5.^a) è

$$d + c + F.$$

In quanto al tipo IV noi possiamo subito dedurre che esso corrisponde a caratteristica dispari nel seguente modo: Avendo già dimostrato che ogni caratteristica pari si scompone in 56 modi in tre dispari, si ha che debbono esistere $56 \cdot 36$ terne di caratteristiche dispari che danno luogo a caratteristica pari.

Ora noi abbiamo già trovato che le terne dei tipi I III V danno pari, e il loro numero è

$$56 + 56 \cdot 30 + 56 \cdot 5 = 56 \cdot 36,$$

dunque questi tipi esauriscono già tutte le terne pari, e quindi il tipo IV non può essere che una terna dispari. Non è difficile esaminare qual'è la caratteristica dispari che essa rappresenta.

Infatti se questa avesse un vertice in uno dei 6 punti 1, 2, 3, 4, 5, 6 e fosse per es. la retta (67) (fig. 6.^a), allora sommando le due rette (56), (67)

si avrebbe la retta (57) $+ F$ e quindi le tre rette (12) (34) (57) formanti un tipo come IV dovrebbero dare per somma F pari, contro ciò che si è dimostrato.

Se ancora la retta somma avesse due vertici di comune colle tre rette (12) (34) (56) e fosse per es. (46) allora (fig. 6.^a) l'assieme delle tre rette (34) (46) (65) darebbe la retta (35) e la somma di (12) (35) dovrebbe dare zero; ora ciò è impossibile perchè la somma di due caratteristiche diverse non può essere zero.

Dunque la somma delle tre rette non può che essere la retta (78).

Esponiamo ora il metodo tenuto da KLEIN nelle sue lezioni a Göttingen.

Teniamo conto del numero delle terne di ciascun tipo esistenti nella configurazione generale e ricordiamo che il numero di tutte le terne dispari deve essere $7 \cdot 180$.

Indichiamo con $\alpha \beta \gamma \delta \varepsilon$ dei numeri che sono o 0 o 1, e allora deve sussistere

$$56\alpha + 7 \cdot 120\beta + 7 \cdot 240\gamma + 7 \cdot 60\delta + 7 \cdot 40\varepsilon = 7 \cdot 180,$$

cioè

$$2\alpha + 30\beta + 60\gamma + 15\delta + 10\varepsilon = 45.$$

Questa relazione ha la sola soluzione

$$\alpha = \gamma = \varepsilon = 0,$$

e quindi le terne dispari sono la II e IV come abbiamo trovato direttamente.

Adesso vogliamo far vedere che tutte le terne comprese in un tipo possono dare *tutte* le caratteristiche pari o dispari corrispondenti, salvo quelle del primo tipo che non danno che un'unica caratteristica pari (la fondamentale).

In altri termini consideriamo per es. le terne II.

Io dico che ogni caratteristica dispari può essere rappresentata da una terna II e ciascuna naturalmente lo stesso numero di volte, in virtù del principio di equivalenza. Così una caratteristica pari (salvo la fondamentale) può essere rappresentata da una terna III e ciascuna lo stesso numero di volte, e così di seguito.

La prima asserzione è evidente perchè data una caratteristica dispari qualunque, basta prendere altri due punti fra i 6 rimanenti e congiungerli fra loro e ciascuno con uno degli estremi della caratteristica data. Questo procedimento lo posso effettuare in $2 \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} = 30$ modi diversi, dunque esistono altrettante terne II aventi tutte la medesima somma.

In quanto alla seconda asserzione che cioè ogni caratteristica pari possa sempre rappresentarsi con una terna III, noi ci ricordiamo ciò che facemmo vedere riguardo alle coppie, che cioè ogni caratteristica pari (meno la fondamentale) si può sempre rappresentare con una coppia del tipo II (fig. 1.^a) più F . Allora sia data una tale coppia corrispondente ad una data caratteristica pari.

Assumiamo un altro punto qualunque e congiungiamolo cogli estremi di una delle rette. Queste due congiungenti insieme coll'altra retta daranno una terna III (fig. 2.^a) la cui somma evidentemente è la caratteristica data. Così si dimostrerebbe per tutte le altre figure.

Di qui risulta che il numero delle terne di ciascun tipo (meno il primo) comprese nella configurazione generale deve essere rispettivamente un multiplo di 28 o di 35 secondochè si considera una terna dispari o pari. E ciò infatti si verifica. Ed inoltre tal numero diviso rispettivamente per 28 o 35 dà il numero delle volte in cui una data caratteristica possa essere rappresentata mediante terne del tipo che si considera. Si ha quindi che una caratteristica dispari può essere rappresentata 30 volte con una terna II, e 15 volte con una terna IV; e una caratteristica pari può essere rappresentata 48 volte con una terna del tipo III e 8 volte con una terna V.

Dalle cose ora dette risulta la dimostrazione di ciò che abbiamo asserito in un capitolo precedente, cioè che il gruppo delle sostituzioni fra le caratteristiche prime è anche doppiamente transitivo rispetto al complesso delle caratteristiche pari. Infatti poichè esiste sempre una sostituzione che scambia fra loro in tutti i modi possibili gli otto punti fondamentali (§ 4) io potrò passare da una terna ad un'altra qualunque terna simile; ma le terne di un medesimo tipo possono rappresentare tutte le 35 caratteristiche pari, dunque lasciando fissa la caratteristica pari fondamentale si può passare da una caratteristica pari ad un'altra qualunque.

Dunque il sottogruppo che lascia fissa una qualunque caratteristica pari è semplicemente transitivo nelle caratteristiche pari, e quindi il gruppo totale è doppiamente transitivo in rapporto alle 36 caratteristiche pari.

§ 8. Aggruppamenti che danno o lo zero assoluto o la caratteristica pari fondamentale.

Se sommiamo una caratteristica con sè stessa abbiamo lo zero assoluto, cioè una caratteristica zero che resta sempre inalterata per tutte le sostituzioni del gruppo.

Vogliamo allora ricercare quali sono quelli aggruppamenti di rette che danno nel loro complesso lo zero assoluto, intendendo però che in tali aggruppamenti non vogliamo considerare quelli in cui compare una retta contata più volte.

Possiamo prima di tutto far vedere che il numero delle rette di tali aggruppamenti deve essere pari. Giacchè se tolgo via una delle rette, le altre debbono essere tali che sommate danno per somma quella che ho tolto via, e ciò indipendentemente da una qualunque trasformazione, cioè debbono dare per somma una caratteristica dispari e che è sempre dispari qualunque trasformazione si faccia.

Di qui si ha che la somma di tutte le rimanenti rette deve essere una caratteristica *prima* perchè possa avere una parità o disparità fissa; ma una caratteristica prima non può essere data che dalla somma di un numero dispari di altre caratteristiche prime, dunque il numero di tutte le rimanenti rette deve essere dispari, e quindi tutto l'aggruppamento deve risultare di un numero pari di rette.

In quanto agli aggruppamenti di due rette che danno lo zero assoluto è chiaro che non ne esistono almenochè non si voglia considerare una retta contata due volte.

Per gli aggruppamenti di quattro rette noi possiamo procedere così: Tre delle rette debbono dare per somma la quarta, dunque consideriamo le terne dispari e aggiungiamovi la retta che rappresenta proprio la somma della terna. Così si vede che non si hanno che due soli tipi di *quaterne-zero* possibili, e sono quelle rappresentate dalla fig. 7.^a. Fissata una delle rette, le altre tre possono essere disposte in $\left(\frac{6 \cdot 5}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} \frac{6 \cdot 5}{2} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2}\right) = 45$ modi diversi. Cioè si hanno 45 quaterne di rette aventi tutte una medesima retta comune, o anche 45 terne che con una data retta costituiscono una quaterna-zero. Queste 45 terne corrispondono nella configurazione delle 27 rette della superficie di 3.^o ordine ai 45 triangoli di STEINER (vedi § 27).

Vogliamo ora ricercare quali sono gli aggruppamenti la cui somma dà la caratteristica pari fondamentale. Si può far vedere anche qui, analogamente, che tali aggruppamenti debbono essere formati di un numero dispari di rette. Infatti dovendo la somma di tutte le rette essere eguale alla caratteristica pari, dovrà tale somma essere una caratteristica *prima*, che conserva cioè una *parità* fissa per qualunque trasformazione, e quindi per lo stesso principio invocato sopra, deve risultare di un numero dispari di rette.

In quanto alla terna che dà la caratteristica fondamentale sappiamo già che è quella del tipo I della fig. 2.^a.

Possiamo ricercare gli aggruppamenti di cinque rette. E per ciò fare possiamo procedere così: Dividiamo le cinque rette in $2 + 3$, e allora la terna che abbiamo staccata deve equivalere alla coppia più la caratteristica fondamentale. Quindi evidentemente se la terna è pari anche la coppia deve essere pari, e se la terna è dispari, anche dispari deve essere la coppia. Onde non resta che unire le coppie pari o dispari colle terne pari o dispari che danno la stessa somma. Così operando si vede che non si hanno altre figure che quelle rappresentate dalla fig. 8.^a.

§ 9. Aggruppamenti di sei coppie di rette che danno la stessa somma.

Noi abbiamo visto nel § 6 che ogni caratteristica (salvo la fondamentale) può in sei modi diversi rappresentarsi come somma di due caratteristiche dispari diverse e della fondamentale. Si hanno dunque 6 coppie di rette, e noi vogliamo ricercare ora quali figure possono formare tali 6 coppie di rette, secondochè la caratteristica somma è pari o dispari (*).

Tali sistemi sono stati considerati da WEBER nell'Opera più volte citata e poi dal NOETHER.

Immaginiamo prima che la caratteristica somma debba essere dispari e sia rappresentata dalla retta (1 2) (fig. 9.^a). Allora tutte le coppie insieme con (1 2) debbono dare un triangolo, quindi assumendo un altro punto qualunque fra i sei rimasti, e congiungendolo con 1, 2 si hanno in tutto sei coppie di rette formanti il sistema richiesto.

Passiamo ora al caso in cui la somma debba essere una caratteristica pari.

Sia (1 3) (2 4) una delle coppie (fig. 10.^a); allora se costruisco le altre coppie di lati opposti del quadrangolo 1 2 3 4, evidentemente ho coppie che danno la stessa somma delle date, perchè insieme alle date costituiscono una quaterna-zero. Inoltre se costruisco ancora le tre coppie di lati opposti del quadrangolo 5 6 7 8 formato cogli altri quattro punti rimanenti, ho anche coppie che danno la stessa somma della data perchè colla data costituiscono anche una quaterna-zero.

(*) KLEIN, Lezioni, 1889.

Abbiamo dunque nelle sei coppie di lati opposti dei due quadrangoli 1 2 3 4, 5 6 7 8 le sei coppie richieste.

Tenendo ora presenti queste figure noi possiamo passare a dimostrare in modo facile e intuitivo tutti i teoremi dimostrati da WEBER per altra via (*). Chiamiamo *gruppo* il complesso delle sei coppie e *indice* del gruppo la somma fissa delle due rette di una sua coppia.

Teorema 1.° — In ogni gruppo, tre rette, di cui due non formanti mai una coppia, danno sempre una somma pari.

Infatti se si tratti di un gruppo dispari (fig. 9.^a) allora si vede che tali tre rette formeranno certamente una terna come III e V (fig. 2.^a), e quindi poichè sappiamo che tali terne sono pari, per questo caso il teorema è dimostrato.

Se poi si tratti di un gruppo pari (fig. 10.^a) allora tali terne possono essere come I III V della fig. 2.^a e quindi anche in questo caso il teorema è dimostrato.

Teorema 2.° — Reciprocamente, se tre caratteristiche dispari hanno una somma pari, si possono formare dei gruppi contenenti quelle caratteristiche in modo che mai due di esse formino una coppia del gruppo.

Risulta dalla semplice considerazione delle figure.

Teorema 3.° — Due gruppi hanno o sei caratteristiche comuni di cui due non formano mai una coppia in nessuno dei due gruppi, ovvero quattro caratteristiche comuni formanti a due a due coppie in ciascuno dei gruppi.

Consideriamo infatti due gruppi dispari e tali che la somma dei loro indici più la caratteristica fondamentale sia dispari, cioè, geometricamente, che i loro indici formino una figura come I (fig. 7.^a). Sia 1 il punto comune ai due indici, e 2, 3, i punti non comuni. Allora il gruppo di indice (1 2) sarà formato congiungendo 1, 2 con 3 4 5 6 7 8, e il gruppo di indice (1 3) sarà formato congiungendo 1, 3 cogli stessi punti. Si hanno due figure che hanno di comune le rette

$$(2\ 3) \quad (1\ 4) \quad (1\ 5) \quad (1\ 6) \quad (1\ 7) \quad (1\ 8),$$

cioè sei rette comuni di cui due qualunque non formano mai una coppia in alcuno dei due gruppi.

(*) WEBER, *Abelsch. Funct.*, pag. 22 e seg.

Annali di Matematica, tomo XX.

Si considerino invece ancora due gruppi dispari, ma cogli indici (1 2), (3 4). Allora i gruppi hanno evidentemente di comune le rette (1 3) (1 4) (2 3) (2 4) formanti un quadrilatero, e mentre (1 3) (2 3) e (1 4) (2 4) formano coppie nel gruppo di indice (1 2); (1 3) (1 4) e (2 3) (2 4) formano analogamente coppie nel gruppo di indice (3 4).

Analogamente ora si potrebbero considerare due gruppi pari, ovvero uno pari e uno dispari, e si troverebbero analoghi risultati.

§ 10. Passaggio dagli aggruppamenti di rette ad aggruppamenti di punti.

Dalle cose dette risulta che una caratteristica pari o dispari può essere rappresentata da un assieme di rette della configurazione totale; però, assegnato il numero delle rette e la figura che debbono formare, una stessa caratteristica potrà essere rappresentata in più maniere.

È interessante ora far vedere come possiamo passare a rappresentare le caratteristiche non più mediante le rette ma mediante i punti della configurazione.

Una retta che congiunga due degli otto punti rappresenta una caratteristica dispari (1 2); dunque possiamo dire che una coppia di punti rappresenta una caratteristica dispari.

Inoltre prendiamo gli altri sei punti e congiungiamoli a coppie con tre rette; allora si hanno tre rette la cui somma, come si sa, è dispari, ed è propria (1 2); dunque possiamo dire che anche gli altri sei punti rappresentano la medesima caratteristica dispari; in altri termini una scissione degli otto punti in $2 + 6$ corrisponde ad una sola caratteristica dispari. È chiaro che in tal maniera ogni caratteristica dispari non verrà rappresentata che in un sol modo.

Se ora separo gli otto punti in $4 + 4$, e considero due rette che congiungono a 2 a 2 quattro dei punti, cioè o i quattro della prima o i quattro della seconda categoria, ottengo, come si sa, nella somma di tali rette e della caratteristica fondamentale sempre la stessa caratteristica pari. Posso dunque dire che la scissione degli otto punti in $4 + 4$ corrisponde ad una determinata caratteristica pari, ed è chiaro d'altra parte che in tal maniera una delle 35 caratteristiche pari (meno la fondamentale) non potrà essere rappresentata che in un sol modo.

Ci resta a vedere come potrà rappresentarsi lo zero assoluto e la caratteristica fondamentale.

Consideriamo due rette che hanno di comune un vertice. Allora si hanno tre punti di cui uno è contato due volte. L'assieme di tali due rette è, come sappiamo, la caratteristica dispari rappresentata dalla retta che congiunge gli altri due punti, più la caratteristica fondamentale. Possiamo dunque dire che un punto contato due volte corrisponde alla caratteristica fondamentale.

Inoltre consideriamo un triangolo; si hanno tre punti ciascuno contato due volte, e d'altra parte sappiamo che un triangolo corrisponde alla caratteristica fondamentale. Dunque anche tre punti (e così cinque o sette) ciascuno contato due volte, corrispondono alla caratteristica fondamentale.

In quanto allo zero assoluto esso è dato dal doppio di una caratteristica, e quindi in generale da un numero pari di punti ciascuno contato due volte.

Però può essere rappresentato anche diversamente e cioè dal complesso degli otto punti; infatti da quello che si è detto risulta che, se per es. due punti rappresentano una caratteristica dispari, gli altri sei rappresentano la stessa caratteristica dispari, e quindi l'assieme di tutti gli otto punti rappresenta il doppio di quella caratteristica e perciò lo zero assoluto.

Prima di passare oltre vogliamo notare un'analogia che ci è fra questa nuova rappresentazione delle caratteristiche e la costruzione delle funzioni ϑ nel caso iperellittico.

Nel caso iperellittico di genere 3 si ha una forma fondamentale con otto punti di diramazione, cioè o una forma binaria di 8.° grado, ovvero una conica doppia con otto punti di diramazione (*).

Ora si sa dalla teoria di KLEIN (**) che la separazione delle otto radici in $2 + 6$ corrisponde ad una ϑ di caratteristica dispari, e la separazione in $4 + 4$ corrisponde ad un ϑ di caratteristica pari, e la separazione in $8 + 0$ corrisponde a quella speciale ϑ pari che si presenta nel caso iperellittico di genere 3, e che restando fissa per tutte le sostituzioni di monodromia, deve considerarsi come avente per caratteristica lo zero assoluto.

Come si vede dunque basta immaginare che gli otto punti fondamentali della nostra configurazione corrispondano agli otto punti di diramazione della forma iperellittica perchè si stabilisca l'analogia di cui parlavamo.

(*) KLEIN, *Ueber Verlauf der Abelsc.*, etc. Math. Ann., Bd. 11.

(**) KLEIN, Math. Ann., Bd. 27-32. — PASCAL, *Sulle funzioni iperellittiche di genere 3*, ecc. Annali di Matem., tom. 17.

§ 11. Sistemi completi di Aronhold.

Esistono certi sistemi di sette caratteristiche dispari tali che per mezzo di esse possono esprimersi tutte le altre caratteristiche. Tali sistemi pel genere 3 furono considerati da ARONHOLD partendo da un punto di vista diverso (*), CLEBSCH (**), WEBER (***), FROBENIUS, e poi da NOETHER (****), e FROBENIUS (*****) sono state estese queste considerazioni al genere p qualunque.

Noi adesso ci proponiamo di trovare quali figure costituiscono questi cosiddetti sistemi completi di ARONHOLD e poi di dimostrare su di essi tutti i teoremi dimostrati da WEBER per via completamente diversa.

Definiamo un sistema di ARONHOLD come un assieme di sette caratteristiche dispari, tali che tre di esse danno sempre una somma pari.

Allora dobbiamo costruire sette rette tali che tre di esse non danno mai una terna come le figure II IV (fig. 2.^a). È facile vedere che non si possono costruire altre figure dotate di questa proprietà che le due della fig. 11.^a. Siccome a ciascuna di queste due figure non potrebbe aggiungersi un'altra retta in modo che l'assieme delle otto rette conservi la medesima proprietà, si ricava che non esistono otto caratteristiche dispari tali che le terne formate con esse sieno tutte pari.

La somma di tutte le sette rette del 1.^o tipo dà evidentemente la caratteristica fondamentale; e la somma delle sette del 2.^o tipo dà la caratteristica pari corrispondente alla scissione (5 6 7 8) (1 2 3 4) (fig. 11.^a).

Del 1.^o tipo ne esistono 8, e del 2.^o 280; quindi in tutto vi sono $288 = 36 \cdot 8$ sistemi di ARONHOLD.

Passeremo ora a dimostrare su questi sistemi i teoremi di WEBER.

In primo luogo mediante alcune delle sette rette di uno di questi sistemi si possono esprimere tutte le caratteristiche pari e dispari (*****). Infatti considerando cinque delle sette rette del 1.^o tipo si hanno evidentemente tutte le altre 21 caratteristiche dispari cioè tutte le altre rette che congiungono a

(*) Monatsb. Berl. Akad., pag. 490, 1864.

(**) CLEBSCH, Math. Ann. III, Bd. 50.

(***) WEBER, Abelsch. Funct.

(****) NOETHER, Math. Ann., pag. 14-16.

(*****) FROBENIUS, Crelle, tom. 89. Anche altri si sono occupati di queste ricerche. Vedi per es. STAHL, Crelle, tom. 88.

(*****) WEBER, pag. 26.

due a due i punti 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Considerando per es. le cinque rette (1 2) (1 3) (1 4) (1 5) (1 6), la loro somma è la retta (7 8), e così di seguito.

Così anche pel 2.^o tipo; se si considerano le cinque rette (4 5) (4 6) (4 7) (4 8) (1 2) si ha per somma (4 3); invece le altre cinque rette (4 5) (4 6) (4 7) (1 2) (2 3) danno (2 8) e le altre cinque (4 5) (4 6) (1 2) (2 3) (1 3) danno (5 6).

Tre rette poi danno *tutte* le caratteristiche pari, perchè per es. le rette (1 2) (1 3) (1 4) (1.^o tipo) danno il gruppo di quattro punti (1 2 3 4) e quindi la caratteristica pari corrispondente, e poichè in questa maniera si possono avere tutti i gruppi di quattro punti, così si possono avere tutte le caratteristiche pari.

Dimostriamo ora il seguente teorema di WEBER:

« Si aggiunga ad un sistema di ARONHOLD un'altra caratteristica qualunque pari o dispari; allora questa da sola e sommata con ciascun gruppo di sei caratteristiche del sistema dà luogo ad otto caratteristiche di cui sono sempre cinque pari e tre dispari (*) ».

Infatti aggiungiamo per es. al 1.^o tipo della fig. 11.^a la caratteristica dispari (2 3). Poichè la somma di tutte le sette caratteristiche dà luogo alla caratteristica fondamentale, così sei di esse danno l'ultima più la fondamentale, e quindi sarà lo stesso sommare (2 3) con ciascuna delle altre sette e aggiungere ancora ogni volta la caratteristica F .

Ora evidentemente

$$(2\ 3), \quad (2\ 3) + (1\ 2) + F, \quad (2\ 3) + (1\ 3) + F$$

sono dispari, e

$$(2\ 3) + (1\ 4) + F, \quad (2\ 3) + (1\ 5) + F, \quad (2\ 3) + (1\ 6) + F, \\ (2\ 3) + (1\ 7) + F, \quad (2\ 3) + (1\ 8) + F$$

sono pari.

« Quattro date caratteristiche dispari tali che la somma di tre di esse è sempre pari, appartengono a due sistemi di ARONHOLD (**). »

Per dimostrare questo teorema formiamo tutti i gruppi di quattro rette non contenenti alcuna terna dispari. Bisognerà aggiungere alle configurazioni I III V (fig. 2.^a) un'altra retta in modo che essa con due qualunque di quelle che ci sono, formi sempre una terna degli stessi tipi.

(*) WEBER, pag. 29.

(**) WEBER, pag. 31.

Si possono formare solo quattro gruppi con tale proprietà, e sono quelli rappresentati dalle linee nere della fig. 12.^a. Ora si vede subito che ciascuno di quei gruppi fa parte di due sistemi di ARONHOLD rappresentati nella stessa fig. 12.^a dalle linee nere insieme alle linee tratteggiate o alle linee punteggiate.

Con ciò il teorema resta dimostrato.

« Sei caratteristiche di un sistema di ARONHOLD compariscono sempre in uno di quei gruppi di dodici rette in maniera che due di esse non formano mai coppia (*) » (vedi § 9).

Evidentemente le sei rette (1 2) (1 3) (1 4) (1 5) (1 6) (1 7) del sistema di ARONHOLD rappresentato dalle linee nere e tratteggiate della fig. 13.^a, appartengono al gruppo dispari che ha per indice (1 8).

Lo stesso diciamo per la fig. 14.^a. Nella prima parte di questa figura si vedono le sei rette segnate in nero appartenenti al sistema di ARONHOLD formato colle rette nere e tratteggiate, e che nello stesso tempo appartengono al gruppo pari di indice (1 2 3 4). Nella seconda parte della stessa figura anzichè un gruppo pari si ha un gruppo dispari.

« Tre caratteristiche di un sistema completo appartengono sempre ad un unico gruppo di dodici rette in cui non comparisce nessun'altra retta del sistema completo (**). »

Infatti consideriamo (fig. 11.^a; prima parte) le tre rette (1 2) (1 3) (1 4). Esse appartengono ad una figura come la 10.^a nella quale non entrano nessuna delle altre rette (1 5) (1 6) (1 7) (1 8).

Consideriamo inoltre (fig. 11.^a; seconda parte) le rette (1 2) (1 3) (2 3). Esse appartengono ad una figura come la 10.^a e ad una sola [cioè quella di indice (1 2 3 4)], in modo che delle altre rette (4 5) (4 6) (4 7) (4 8) non ce n'è nessuna appartenente alla stessa fig. 10.^a

Consideriamo invece (1 2) (1 3) (4 5). Possiamo formare una figura come la 9.^a, prendendo per indice (1 5) e tal figura conterrà le tre rette e nessuna altra di quelle segnate nella fig. 11.^a, seconda parte.

Consideriamo ancora (1 2) (4 5) (4 6); allora si può costruire il gruppo pari (3 4 5 6) (1 2 7 8) che contiene tali rette e nessun'altra. E infine le tre rette (4 5) (4 6) (4 7) appartengono esse sole al gruppo dispari di indice (4 8).

In tutti questi casi si vede che la caratteristica del gruppo cioè la somma delle due rette di una delle sei coppie è data dalla somma delle altre quattro

(*) WEBER, pag. 32.

(**) WEBER, pag. 33.

rette del sistema di ARONHOLD a cui appartengono le tre rette che si considerano.

Si possono aggiungere anche i seguenti teoremi che ci occorreranno poi in seguito:

« Esistono 72 sistemi di ARONHOLD che posseggono una retta data; ne esistono sedici che posseggono due rette date; ne esistono cinque che posseggono una data terna pari; ne esistono due finalmente che posseggono una quaterna data in cui le terne sieno tutte pari. »

§ 12. Proprietà delle terne di caratteristiche dispari.

In un paragrafo precedente abbiamo considerato tutte le terne di rette, e abbiamo con due metodi esaminato se esse sono dispari o pari.

Ora ci è utile mostrare una proprietà fondamentale di quelle terne in rapporto alla loro parità o disparità.

Una terna è pari quando è formata di tali tre rette che due di esse qualunque individuano sempre la terza, e ciò o in senso assoluto, oppure in rapporto ad una determinata scissione degli otto punti in $4 + 4$. Nel primo caso la terna corrisponde alla caratteristica pari fondamentale, e nel secondo la terna equivale alla caratteristica pari corrispondente a quella scissione. Una terna è dispari quando essa individua un'altra retta, e l'assieme delle quattro rette è tale che tre di esse individuano sempre nel medesimo modo la quarta.

Consideriamo il tipo I (fig. 2.^a). Quel tipo è simmetrico rispetto alle sue tre rette, e due rette individuano la terza; effettivamente sappiamo che esso corrisponde alla caratteristica fondamentale *pari*.

Consideriamo il tipo III riprodotto nella fig. 15.^a. Si vede che stabilita come fissa la scissione degli otto punti in $(1\ 2\ 3\ 4)\ (5\ 6\ 7\ 8)$, due delle rette individuano sempre la terza, perchè se son date per es. $(5\ 1)\ (5\ 2)$, la terza retta sarà la congiungente degli unici due altri punti del gruppo $(1\ 2\ 3\ 4)$; e così se son date $(1\ 5)\ (3\ 4)$ la terza retta sarà la congiungente del punto assunto nel 2.^o gruppo $(5\ 6\ 7\ 8)$ coll'unico altro punto del 1.^o gruppo.

Così evidentemente il tipo V riprodotto nella fig. 16.^a individua la scissione degli otto punti in due classi ed è tale che due rette individuano la terza.

In quanto ai tipi dispari II IV (fig. 2.^a) essi evidentemente individuano sempre una quarta retta che con esse forma una figura come le due della fig. 7.^a e in cui le quattro rette figurano sempre simmetricamente.

§ 13. Caratteristiche di genere 2.

Dovendo nei paragrafi seguenti estendere queste considerazioni geometriche al caso di genere 4, non è inutile vedere come si può stabilire anche una rappresentazione geometrica per le sedici caratteristiche di genere 2 e ricavarne tutte le note proprietà degli aggruppamenti di tali caratteristiche.

Immaginiamo sei punti dello spazio 1, 2, 3, 4, 5, 6 ad ognuno dei quali facciamo corrispondere una delle sei caratteristiche dispari di genere 2.

Per effettuare la rappresentazione geometrica possiamo tener presenti le considerazioni svolte nel § 10 e far corrispondere ciascuno di tali punti a ciascuna delle sei radici della forma iperellittica di genere 2.

Allora sapendo che ogni $\mathfrak{S}$ dispari corrisponde a ciascuna delle scissioni di tali radici in $1 + 5$, ed ogni $\mathfrak{S}$ pari corrisponde alla scissione in $3 + 3$ (*), ne ricaviamo che ogni gruppo di tre punti lo possiamo far corrispondere ad una caratteristica pari, e alla stessa caratteristica pari corrisponderà il gruppo dei tre punti rimanenti.

Allora ne risulta che la somma di tutti i sei punti, cioè di tutte le sei caratteristiche dispari, sarà il doppio di una caratteristica pari e quindi lo zero assoluto (**).

Fra le scomposizioni dei sei punti in $3 + 3$ ve ne sarà una che corrisponderà alla caratteristica pari zero, e che quindi è da considerarsi come fondamentale. Sia, per fissare le idee, quella corrispondente alla scissione $(1\ 3\ 5)(2\ 4\ 6)$. Allora possiamo dimostrare che « ogni caratteristica può scomporsi in un sol modo in due caratteristiche dispari ».

Infatti la caratteristica dispari (1) sarà eguale a $(3) + (5)$ perchè per ipotesi

$$(1) + (3) + (5) = (0).$$

Si abbia inoltre la caratteristica pari $(1\ 4\ 6)(2\ 3\ 5)$. Essa è eguale a $(1) + (2)$ perchè

$$(1) + (2) + (1\ 4\ 6) = (1) + (2) + (1) + (4) + (6) = (2) + (4) + (6) = (0).$$

Evidentemente la somma di due caratteristiche dispari è dispari o pari secondo che le due caratteristiche appartengono o no allo stesso gruppo fondamentale.

(*) KLEIN, Math. Ann., Bd. 27.

(**) KRAUSE, *Trasf. hyp. Funct.*, pag. 16.

« Ogni caratteristica può sempre scomporsi in tre modi nella somma di due pari. »

Infatti la caratteristica dispari (1) può scriversi

$$(1) = (1\ 2\ 5) + (1\ 2\ 3)$$

$$(1) = (1\ 4\ 5) + (1\ 4\ 3)$$

$$(1) = (1\ 6\ 5) + (1\ 6\ 3).$$

D'altra parte la caratteristica pari (1 4 6) (2 3 5) può scriversi

$$(1\ 4\ 6) = (1\ 4\ 3) + (1\ 6\ 5)$$

$$(1\ 4\ 6) = (1\ 4\ 5) + (1\ 6\ 3)$$

$$(1\ 4\ 6) = (1\ 4\ 6) + (1\ 3\ 5).$$

« Ogni caratteristica può sempre in quattro modi scomporsi in una pari e una dispari. »

La caratteristica dispari (1) può scomporsi in

$$(1) = (2\ 3\ 5) + (2)$$

$$(1) = (4\ 3\ 5) + (4)$$

$$(1) = (6\ 3\ 5) + (6)$$

$$(1) = (2\ 4\ 6) + (1).$$

La caratteristica pari (1 4 6) può scomporsi in

$$(1\ 4\ 6) = (5\ 4\ 6) + (3)$$

$$(1\ 4\ 6) = (3\ 4\ 6) + (5)$$

$$(1\ 4\ 6) = (3\ 4\ 5) + (6)$$

$$(1\ 4\ 6) = (3\ 5\ 6) + (4).$$

§ 14. Caratteristiche di genere 4.

Fondamenti per la rappresentazione geometrica.

Coppie di caratteristiche dispari.

Scegliamo nello spazio dieci punti fondamentali. Questi congiunti a tre a tre danno 120 piani, che possiamo far corrispondere alle 120 caratteristiche dispari di genere 4.

La forma fondamentale di genere 4 è una sestica storta, che ha, come

si sa, 120 piani tritangenti corrispondenti alle 120 caratteristiche dispari. Se la sestica degenera in una forma iperellittica allora si ha una cubica doppia con dieci punti di diramazione e i piani tritangenti diventano i piani che congiungono a tre a tre questi dieci punti; la configurazione dei piani tritangenti diventa cioè precisamente quella che noi assumiamo come fondamentale per la nostra rappresentazione.

Tutto ciò è precisamente analogo a ciò che è stato considerato per genere 3 nel § 10.

Tutte le caratteristiche dispari sono rappresentate in questa maniera dai gruppi di tre punti; vediamo come dobbiamo rappresentare tutte le caratteristiche pari.

Sappiamo che nel caso iperellittico i punti di diramazione presi a uno a uno oppure a cinque a cinque corrispondono a tutte le 136 caratteristiche pari (*).

Quindi analogamente a ciò che abbiamo osservato per $p = 3$ (§ 10) noi ciascuno degli otto punti lo faremo corrispondere ad una caratteristica pari, e ciascun gruppo di cinque punti anche ad un'altra caratteristica pari.

Però possiamo fondare su di una base rigorosa tutta quella rappresentazione ed ecco in che maniera.

Il NOETHER nei suoi lavori sulle caratteristiche di genere 4 (**) ha trovato che esistono $2 \cdot 51 \cdot 128$ sistemi di dieci caratteristiche pari tali che sommati a tre a tre, o a cinque a cinque danno le altre caratteristiche dispari e pari. Quindi se noi facciamo corrispondere i dieci punti fondamentali alle caratteristiche pari di uno di questi sistemi, abbiamo precisamente la configurazione che avevano costruita avanti fondandoci su ragioni di analogia. E ne ricaviamo dippiù, cioè che la caratteristica dispari rappresentata da un gruppo di tre punti non è altro che precisamente *la somma* delle tre caratteristiche pari rappresentate dai tre punti; e così anche per un gruppo di cinque. Intanto evidentemente la somma di tutte le dieci caratteristiche pari corrispondenti ai dieci punti è zero assoluto perchè è il doppio di una caratteristica pari corrispondente ad una scissione dei dieci punti in due gruppi di cinque. Un numero pari di punti dà una caratteristica di parità o disparità non definita perchè la somma di un numero pari di caratteristiche *prime* dà una caratteristica *elementare* (§ 3). Una coppia di piani (corrispondendo a due ca-

(*) KLEIN, Math. Ann., Bd. 32.

(**) NOETHER, Math. Ann., Bd. 14, pag. 279.

ratteristiche *prime* dispari, ovvero a sei caratteristiche *prime* pari) avrà anche una parità o disparità non definita. Invece una terna di piani avrà parità e disparità fissa, cioè inalterabile per le trasformazioni di monodromia.

Formiamo ora tutte le possibili coppie di piani.

Evidentemente esse saranno di tre tipi diversi, e saranno quelle rappresentate dalla fig. 17.^a.

Con i principii stabiliti avanti si ha che il tipo I equivale alla somma delle caratteristiche rappresentate dai due punti (3), (4); il tipo II equivale alla somma delle caratteristiche dei quattro punti (2) (3) (4) (5); e finalmente il tipo III equivale alla somma dei sei punti (1) (2) (3) (4) (5) (6) o, ciò che è lo stesso, degli altri quattro punti rimanenti cioè (7) (8) (9) (10).

Di coppie del tipo I ne esistono $28 \cdot 45$, del tipo II $28 \cdot 135$ e del tipo III $28 \cdot 75$.

§ 15. Terne di piani.

Tutte le possibili terne di piani sono dei dodici tipi rappresentati dalla fig. 18.^a.

Per riconoscere facilmente la loro parità o disparità, scindiamo ogni piano nella somma dei tre vertici, e allora se otteniamo un gruppo di tre punti, la terna corrispondente sarà dispari; se otteniamo un gruppo di uno o cinque punti la terna sarà pari.

Così troviamo che

I è pari ed è la caratteristica rappresentata dal gruppo di punti	1
II è pari	1 2 4 5 6
III è dispari	1 2 5
IV è dispari	8 9 10
V è pari	1 2 3 4 5
VI è dispari	4 5 6
VII è pari	3 4 5 6 7
VIII è dispari	4 5 6
IX è dispari	1 9 10
X è pari	5
XI è pari	10
XII è pari	2 4 5 6 7.

Il numero di tutte le possibili terne dei diversi tipi è

per I	70 · 12	per VII	70 · 360
per II	70 · 540	per VIII	70 · 360
per III	70 · 216	per IX	70 · 540
per IV	70 · 180	per X	70 · 108
per V	70 · 36	per XI	70 · 40
per VI	70 · 540	per XII	70 · 1080.

In tutto fanno

$$70 \cdot 4012 = \frac{120 \cdot 119 \cdot 118}{2 \cdot 3},$$

Si sa che ogni caratteristica di genere 4 può in 28 modi scindersi nella somma di due caratteristiche dispari. Onde se α è una caratteristica pari, e ϑ una dispari, $\alpha + \vartheta$ potrà in 28 modi scindersi in due dispari $\vartheta' + \vartheta''$, onde α potrà in $\frac{28 \cdot 120}{3} = 28 \cdot 40$ modi scindersi in tre dispari; onde vi debbono essere $28 \cdot 40 \cdot 136$ terne che dànno caratteristica pari.

Infatti facendo la somma dei numeri corrispondenti alle terne I II V VII X XI XII si trova

$$70(12 + 540 + 36 + 360 + 108 + 40 + 1080) = 70 \cdot 2176 = 28 \cdot 40 \cdot 136.$$

Vediamo ora come sussiste perfettamente qui una proprietà delle figure delle terne in relazione alla parità o disparità, la cui analoga abbiamo riconosciuta esistere nel caso del genere 3 (vedi § 12).

Possiamo dimostrare i seguenti teoremi:

« Se una terna è tale che in rapporto ad una determinata scissione dei dieci punti in $1 + 9$ ovvero in $5 + 5$, due piani individuano sempre il terzo, e l'assieme dei tre piani individua la scissione, cioè occupa tutti i punti almeno di uno dei due gruppi, allora la terna rappresenta una caratteristica pari, e propriamente quella determinata dalla scissione dei dieci punti. »

« Tutte le altre terne di piani non soddisfacenti a questa condizione sono dispari, ed esse debbono tutte individuare un quarto piano che sarà da reputarsi la loro somma. » Andiamo ad esaminare separatamente le diverse terne.

Nella terna I (fig. 18.^a) fissata la scissione in $1 + 9$ e propriamente separato il punto 1 dagli altri nove, si vede che in rapporto a tale scissione due piani individuano sempre il terzo.

Nella terna II fatta la scissione (1 2 4 5 6) (3 7 8 9 10), dati i due piani (1 5 6) (1 3 4), il terzo piano sarà univocamente determinato come quello dei tre punti 1 (punto d'incontro dei due primi) 3 [punto non appartenente al gruppo (1 2 4 5 6)] e 2 (rimanente punto del gruppo).

E così, se fossero dati (1 2 3) (1 3 4), non resterebbe che congiungere gli altri due punti 5, 6 del gruppo, col punto 1 (che è il solo appartenente al gruppo e che è comune ai due piani già dati).

Nello stesso modo si può ragionare per tutte le altre terne. Nella fig. 18.^a abbiamo segnati con un cerchietto quei punti che costituiscono un gruppo.

Aggiungendo ora alle terne dispari il quarto piano che è la loro somma, si ha un assieme di quattro piani la cui somma è lo zero assoluto. Di tali quaterne di piani ve ne sono solo di quattro tipi diversi che sono quelli rappresentati dalla fig. 19.^a.

§ 16. Aggruppamenti di 28 coppie di piani che danno la medesima somma.

Una coppia di piani non dà una caratteristica di parità o disparità assoluta, perchè dà una caratteristica *elementare*, ma se noi fissiamo una determinata caratteristica pari che chiameremo fondamentale, allora la somma delle tre avrà una parità o disparità indipendente da una trasformazione di monodromia.

È facile vedere che esistono 28 coppie di piani che danno sempre la medesima somma. Questa proprietà è nota e di essa noi ci siamo già serviti incidentalmente; ma noi la possiamo dimostrare qui diversamente. Evidentemente le coppie di piani sono in numero di $28 \cdot 255$. Ora è chiaro che con una coppia di piani diversi e colla caratteristica pari fondamentale non si potrà mai avere tale caratteristica fondamentale, e d'altra parte si debbono potere avere tutte le altre 255 caratteristiche e ciascuna lo stesso numero di volte, quindi possiamo concludere che ogni caratteristica risulterà 28 volte.

Vogliamo ora studiare l'assieme di queste 28 coppie di piani che danno la medesima somma.

Distinguiamo naturalmente i due casi in cui questa somma è una caratteristica dispari o pari; e inoltre dobbiamo fissare la caratteristica pari che assumiamo per fondamentale, come abbiamo detto sopra. Scegliamo allora quella rappresentata dal punto 1.

Il piano che deve rappresentare la somma potrà allora essere o un piano di cui uno dei vertici è 1, o un piano di cui nessun vertice è 1; quindi sia o il piano (1 2 3) o il piano (2 3 4).

Nel primo caso i due piani della somma insieme con (1 2 3) debbono dare per somma il punto 1; quindi tenendo presenti le terne della fig. 18.^a, e scegliendo quelle che danno per somma un punto situato su di uno dei piani, si vede che non vi sono altri tipi che I e X che soddisfino a queste condizioni. Quindi il gruppo delle 28 coppie di piani è rappresentato in succinto dalla fig. 20.^a dove (1 2 3) è il piano somma, e le coppie di piani sono

$$(1\ 2\ 4), \quad (1\ 3\ 4),$$

ovvero

$$(2\ 5\ 6), \quad (3\ 5\ 6),$$

e tutte le coppie analoghe che si ottengono lasciando fissi i punti 1, 2, 3, e facendo variare i punti 4, 5, 6.

Si hanno così appunto

$$7 + \frac{7 \cdot 6}{2} = 28$$

coppie.

Nel secondo caso poi i soli tipi possibili di terne sono X, XI (fig. 18.^a); e quindi il gruppo delle 28 coppie è rappresentato dalla fig. 21.^a. Lasciando fissi i punti 1, 2, 3, 4, e facendo variare gli altri fra i rimanenti sei punti si hanno in tutto

$$6 \cdot 3 + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{2 \cdot 2 \cdot 3} = 28$$

coppie.

Consideriamo ora il caso in cui la somma è una caratteristica pari, rappresentata o da un punto (eccetto il fondamentale) o da un gruppo di cinque punti.

Tale somma sia in primo luogo rappresentata dal punto 2. Allora dobbiamo scegliere due piani la cui somma sia la somma delle due caratteristiche 1, 2. Dalla fig. 17.^a risulta che non esistono altri tipi siffatti di coppie che il tipo I. Onde risulta la fig. 22.^a dove lasciando fissi i punti 1, 2, e facendo variare gli altri si hanno in tutto $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$ coppie.

Sia infine la somma rappresentata da un gruppo di cinque punti (1 2 3 4 5).

Dobbiamo disegnare due piani che diano per somma i quattro punti 2, 3, 4, 5 ovvero, ciò che è lo stesso, 1, 6, 7, 8, 9, 10.

Dalla fig. 17.^a risulta che tali coppie non possono essere che o del tipo II o del tipo III.

La fig. 23.^a le rappresenta schematicamente tutte. Si hanno tre coppie come (1 2 3) (1 4 5), 15 coppie come (2 3 6) (4 5 6) e 10 come (1 6 7) (8 9 10). In tutto 28.

Dovremmo ora passare a studiare le stesse configurazioni quando si assuma per fondamentale un gruppo di cinque punti anzichè un punto solo.

Ma ci dispensiamo dal fare quest'altra ricerca (che del resto non offrirebbe alcuna difficoltà) perchè in seguito non ci occorrerà, e d'altra parte, essendo completamente arbitraria una caratteristica d'un sistema completo di NOETHER, si vede che colla nostra supposizione non si viene ad introdurre alcuna particolarità nella quistione.

§ 17. Teoremi sui gruppi di 28 coppie di caratteristiche dispari.

I gruppi di 28 coppie caratteristiche dispari considerati nel paragrafo precedente sono stati considerati da NOETHER (*), e su di essi si possono dimostrare teoremi analoghi a quelli dimostrati da WEBER per $p = 3$ e da noi ripetuti e dimostrati coi nostri principii nel § 9.

Noi vogliamo far vedere come si possono dimostrare i teoremi di cui si parla partendo dalla considerazione delle figure.

Chiamiamo *indice* del gruppo la somma costante dei due piani della coppia e della caratteristica fondamentale.

Teorema. — Due gruppi di 28 coppie o hanno 28 piani comuni di cui due non formano mai una coppia in nessuno dei gruppi, ovvero hanno 24 piani comuni accoppiati a due a due in ciascuno dei gruppi.

Consideriamo due gruppi dispari, per es. l'uno che abbia per indice il piano (1 2 3) e l'altro che abbia per indice (1 3 4) (vedi fig. 20.^a). La somma dei due indici e della caratteristica fondamentale è dispari. Congiungendo due dei punti 1, 5, 6, 7, 8, 9, 10 col punto 3 si hanno piani che appartengono ad ambedue i gruppi, e così si hanno $\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ piani comuni. Inoltre il piano (1 2 4) appartiene ad ambo i gruppi, e infine gli altri sei piani che

(*) Math. Ann., Bd. 14.

si hanno congiungendo 2, 4, con uno dei punti 5, 6, 7, 8, 9, 10 sono anche comuni. In tutto si hanno dunque 28 piani comuni, di cui due non formano mai coppia.

Consideriamo invece i due gruppi (vedi fig. 21.^a) di indici (2 3 4), (2 5 6). La somma di questi due indici e della caratteristica fondamentale 1 è pari.

I piani (2 4 5) (2 4 6) (2 3 5) (2 3 6) sono comuni come anche i piani (1 3 5) (1 4 5) (1 3 6) (1 4 6) che formano coi precedenti coppia in ciascuno dei due gruppi. Sono anche comuni i quattro piani che congiungono a tre a tre i punti 7, 8, 9, 10 e i piani (5 6 7) (5 6 8) (5 6 9) (5 6 10) (3 4 7) (3 4 8) (3 4 9) (3 4 10) e infine i piani (1 2 7) (1 2 8) (1 2 9) (1 2 10). In tutto 24 piani comuni accoppiati in ciascuno dei due gruppi.

§ 18. Sistemi completi di caratteristiche.

Della ricerca dei sistemi completi di caratteristiche si sono occupati vari Autori. Pel caso $p = 3$ abbiamo visto che si possono costruire i sistemi completi di ARONHOLD, e ne abbiamo studiato le figure e le proprietà.

Lo STAHL seguendo certi teoremi di RIEMANN trovò dei sistemi completi di $2p + 1$ caratteristiche di genere p (*).

In seguito il FROBENIUS trovò la forma generale dei sistemi completi (**). Il NOETHER nei lavori più volte citati (Math. Ann., Bd. 14, 16) si occupò dei sistemi completi. Egli dimostrò che esistono pel genere 4, $136 \cdot 96$ sistemi di dieci caratteristiche pari tali che a cinque a cinque dànno tutte le altre caratteristiche pari, e a tre a tre tutte le dispari. Il NOETHER dimostrò inoltre che un tale sistema è determinato da cinque delle sue caratteristiche, e che le condizioni perchè la forma di genere 4 diventi iperellittica sono rappresentate dall'annullarsi delle funzioni $\mathfrak{S}$ corrispondenti alle dieci caratteristiche di uno di tali sistemi.

Di queste condizioni si erano occupati anche WEIERSTRASS ed altri (**).

Non è inutile riportare qui togliendolo dal lavoro citato di PRINGSHEIM un sistema di dieci caratteristiche pari aventi le proprietà dette. Esso è

(*) Crelle, tom. 88.

(**) Crelle, tom. 89.

(***) KONISBERGER, Crelle, tom. 64. — PRINGSHEIM, Math. Ann., Bd. 12, pag. 449.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dai sistemi di dieci caratteristiche pari, il NOETHER ricava la definizione di certi altri sistemi di otto caratteristiche dispari nel seguente modo:

Assumiamo due sue caratteristiche q, q' ; e aggiungiamole a tutte le altre otto; formiamo allora otto caratteristiche dispari che formeranno un sistema completo.

Da ogni sistema di dieci pari si possono dunque formare $\frac{10 \cdot 9}{2} = 45$ sistemi di otto dispari, e quindi esisteranno $136 \cdot 96 \cdot 45$ sistemi di otto dispari.

Questi sistemi hanno la proprietà che a tre a tre o sette a sette danno le caratteristiche pari, e a cinque a cinque danno tutte le altre caratteristiche dispari.

La somma di tutte le otto caratteristiche dispari è $q + q'$.

Queste proprietà insieme a molte altre ci risulteranno subito quando avremo ottenuta la rappresentazione geometrica di questi sistemi, ciò che passiamo ora a ricercare.

Dalla stessa definizione dei sistemi di otto, si ricava che considerando il sistema di dieci pari rappresentato dai dieci punti; un sistema di otto è quello formato cogli otto piani che congiungono due punti con ciascuno degli altri otto.

Però il sistema di dieci rappresentato dai dieci punti è uno fra i $136 \cdot 96$ possibili; quindi bisogna andare a considerare tutte le altre configurazioni dei sistemi di dieci e ricavarne ogni volta i 45 sistemi di otto.

Allora gli otto piani avranno configurazione diversa da quella ora ottenuta, e noi faremo vedere che si possono avere in tutto tredici configurazioni diverse. Nel caso $p = 3$ è bene rammentare che le configurazioni diverse che potevano avere i sistemi completi di ARONHOLD erano solo due.

Per la formazione dei sistemi di otto compariscono come fondamentali le due caratteristiche pari q, q' .

Ora tale coppia di caratteristiche pari può prendersi in $\frac{136 \cdot 135}{2} = 255 \cdot 36$ modi diversi, e dividendo il numero di tutti i sistemi di otto per tal numero, si ha che per ogni coppia q, q' esistono 64 sistemi corrispondenti. Allora noi faremo sulla rappresentazione delle due caratteristiche q, q' tutte le ipotesi possibili, cioè che sieno ambedue rappresentate da un punto, oppure che una

sia rappresentata da un punto e l'altra da un gruppo di cinque punti, ovvero che sieno ambedue rappresentate da gruppi di cinque punti, e cercheremo di trovare ogni volta le 64 figure corrispondenti.

Ma prima ci occorre di esporre una facile considerazione per poter passare da un sistema di dieci ad un altro analogo. Si abbia il sistema rappresentato dai dieci punti, godente delle proprietà note.

Allora se noi in luogo delle sei caratteristiche

$$(3) \quad (4) \quad (5) \quad (6) \quad (7) \quad (8),$$

poniamo rispettivamente le altre

$$(4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8) \quad (5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 3) \quad (6 \ 7 \ 8 \ 3 \ 4) \quad (7 \ 8 \ 3 \ 4 \ 5) \quad (8 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6) \quad (3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7), \quad (A)$$

abbiamo un sistema di dieci caratteristiche pari, la cui somma è zero, e che a tre a tre danno caratteristiche dispari, e a cinque a cinque danno pari.

Infatti i due punti 1, 2 insieme col gruppo (4 5 6 7 8) danno il piano (3 9 10). Il punto 1 con due gruppi

$$(4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8) \quad (5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 3),$$

dà il piano (1 3 4), e i tre gruppi

$$(4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8) \quad (5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 3) \quad (6 \ 7 \ 8 \ 3 \ 4),$$

danno il piano (6 7 8).

Inoltre il punto 1 con i quattro primi dei gruppi (A) segnati sopra dà il gruppo pari (1 3 4 5 6); e così i due punti 1, 2 con i tre primi dei gruppi (A) danno (1 2 6 7 8) e i tre punti 1, 2, 9 con i due primi dei gruppi (A) danno (1 2 9 3 4); i quattro punti 1, 2, 9, 10 col primo gruppo (A) dà (3), e finalmente i cinque gruppi (A) danno il gruppo pari (3 4 5 6 7).

Resta così dimostrato che le sei caratteristiche (A) insieme con i quattro punti 1, 2, 9, 10 formano un sistema completo di NOETHER.

§ 19. Caso in cui le caratteristiche q, q' sono rappresentate da due punti.

In tal caso abbiamo già ottenuta una delle 64 figure possibili; dobbiamo cercare di ottenere le altre.

È facile verificare che le dieci caratteristiche pari

$$(1) \quad (2) \quad (3 \ 4 \ 5 \ 1 \ 2) \quad (3 \ 5 \ 6 \ 1 \ 2) \quad (3 \ 4 \ 6 \ 1 \ 2) \quad (4 \ 5 \ 6 \ 1 \ 2) \\ (7 \ 8 \ 9 \ 1 \ 2) \quad (7 \ 9 \ 1 \ 2 \ 10) \quad (7 \ 8 \ 1 \ 2 \ 10) \quad (8 \ 9 \ 1 \ 2 \ 10),$$

costituiscono un sistema di NOETHER, perchè la loro somma è zero, e a tre a tre danno una somma dispari, mentre a cinque a cinque danno una somma pari.

Allora ricavando, nel modo indicato, da tal sistema un sistema di otto caratteristiche dispari, si ha la fig. 25.^a dove gli otto piani sono le otto facce dei due tetraedri.

Fissati i due punti 1, 2, di tali figure se ne possono formare 35.

Inoltre le dieci caratteristiche pari

(1) (2) (3) (4) (1 2 3 4 5) (1 2 3 4 6) (1 2 3 4 7) (1 2 3 4 8)
(1 2 3 4 9) (1 2 3 4 10),

formano un sistema di NOETHER perchè tal sistema si può ricavare da quello dei dieci punti applicando il metodo del paragrafo precedente ai punti 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Da tal sistema di NOETHER si ricava dunque un altro sistema di otto dispari ed è quello rappresentato dalla fig. 26.^a Restando fissi i punti 1, 2, di tali figure se ne possono formare 28. Dunque si son costruiti gli $1 + 35 + 28 = 64$ sistemi completi corrispondenti alla coppia q, q' rappresentata da due punti.

§ 20. Caso in cui la caratteristica q è rappresentata da un punto, e la q' è rappresentata da un gruppo di cinque punti.

Prima di tutto osserviamo che possiamo sempre supporre che q non faccia parte del gruppo di cinque punti; perchè se ne fa parte noi possiamo considerare il gruppo coniugato (quello degli altri cinque punti rimanenti) il quale rappresenterà la stessa q' , e di cui allora evidentemente q non fa più parte.

Applichiamo allora alle tre figure trovate nel paragrafo precedente la trasformazione indicata alla fine del § 18 assumendo per punti fissi 1, 8, 9, 10 e trasformando

il punto (2) nel gruppo	(3 4 5 6 7)
» (3) »	(4 5 6 7 2)
» (4) »	(5 6 7 2 3)
» (5) »	(6 7 2 3 4)
» (6) »	(7 2 3 4 5)
» (7) »	(2 3 4 5 6)

Allora gli otto piani della fig. 24.^a diventano

$$\begin{array}{cccc} (2\ 7\ 6) & (2\ 7\ 3) & (2\ 7\ 4) & (2\ 7\ 5) \\ (1\ 7\ 10) & (1\ 7\ 8) & (8\ 9\ 10) & (1\ 7\ 9), \end{array}$$

e si ha un sistema completo rappresentato dalla fig. 27.^a

Di tali configurazioni, lasciando fisse q, q' cioè il punto (1) e il gruppo (3 4 5 6 7), ve ne sono $5 \cdot 4 = 20$.

Applicando la medesima trasformazione agli otto piani della fig. 25.^a si hanno gli altri otto piani

$$\begin{array}{cccc} (1\ 2\ 3) & (1\ 2\ 4) & (1\ 2\ 5) & (1\ 2\ 6) \\ (1\ 2\ 7) & (2\ 9\ 10) & (2\ 8\ 10) & (2\ 8\ 9), \end{array}$$

che formano la fig. 28.^a, e cogli stessi q, q' di tali figure ve ne sono quattro fra loro diverse.

Finalmente applicando la stessa trasformazione alla fig. 26.^a si hanno gli otto piani:

$$\begin{array}{cccc} (1\ 2\ 3) & (1\ 2\ 4) & (2\ 6\ 7) & (2\ 5\ 7) \\ (2\ 5\ 6) & (3\ 4\ 8) & (3\ 4\ 9) & (3\ 4\ 10), \end{array}$$

che costituiti danno la fig. 29.^a.

Di tali ultime figure se ne possono formare 40; onde evidentemente sono esaurite tutte le possibilità perchè abbiamo trovato $20 + 4 + 40 = 64$ figure diverse, e sappiamo che per una determinata coppia q, q' non se ne possono formare dippiù.

§ 21. Caso in cui amendue le caratteristiche q, q' sono rappresentate da gruppi di cinque punti.

C'è da distinguere due casi inquantochè c'è da tener conto della posizione reciproca dei due gruppi di cinque punti, i quali possono avere o quattro punti comuni, o tre punti comuni.

La supposizione che i due gruppi abbiano due punti comuni, o un punto solo comune è la stessa rispettivamente di quella per la quale i due gruppi hanno tre o quattro punti comuni. Perchè basterà considerare in luogo dei due gruppi dati, uno solo di essi insieme al coniugato dell'altro, e se i dati aveano due punti comuni, questi nuovi gruppi avranno invece tre punti comuni.

Quindi dobbiamo considerare solo i due casi indicati. Operiamo la trasformazione del § 18 lasciando fissi i punti 7, 8, 9, 10 e trasformando

- (1) in (2 3 4 5 6)
 (2) in (3 4 5 6 1)
 (3) in (4 5 6 1 2)
 (4) in (5 6 1 2 3)
 (5) in (6 1 2 3 4)
 (6) in (1 2 3 4 5),

e applichamola agli otto piani della fig. 24.^a.

Si hanno gli otto piani

$$\begin{array}{cccc} (1\ 2\ 6) & (1\ 2\ 3) & (1\ 2\ 4) & (1\ 2\ 5) \\ (7\ 8\ 9) & (7\ 9\ 10) & (8\ 9\ 10) & (7\ 8\ 10), \end{array}$$

che costituiscono la fig. 30.^a, mentre q q' saranno allora rappresentate dai gruppi (2 3 4 5 6) (3 4 5 6 1) che hanno quattro punti comuni.

Fissati i due gruppi, di tali figure ve ne è sola una possibile.

Però si noti che la caratteristica (2 3 4 5 6) può anche indicarsi con (1 7 8 9 10) e l'altra (1 3 4 5 6) con (2 7 8 9 10), e quindi allora si può costruire un'altra figura simile scambiando il gruppo 7, 8, 9, 10 col gruppo 3, 4, 5, 6. In tutto si hanno quindi *due* figure.

Applichiamo ora la stessa trasformazione alla fig. 26.^a; si hanno gli otto piani

$$\begin{array}{cccc} (4\ 5\ 6) & (3\ 5\ 6) & (1\ 2\ 6) & (1\ 2\ 5) \\ (3\ 4\ 7) & (3\ 4\ 8) & (3\ 4\ 9) & (3\ 4\ 10), \end{array}$$

che dànno la fig. 31.^a. Di tali figure se ne possono formare sei e anche qui, come sopra, per lo scambio del gruppo 7 8 9 10 col gruppo 3 4 5 6 si hanno altre sei figure simili; in tutto dodici.

Trasformiamo ora la figura simile alla 25.^a ma di cui i piani sieno

$$\begin{array}{cccc} (3\ 4\ 5) & (3\ 4\ 7) & (4\ 7\ 5) & (3\ 5\ 7) \\ (6\ 8\ 9) & (6\ 8\ 10) & (6\ 9\ 10) & (8\ 9\ 10). \end{array}$$

Si hanno allora i piani

$$\begin{array}{cccc} (1\ 2\ 6) & (3\ 4\ 7) & (4\ 5\ 7) & (3\ 5\ 7) \\ (6\ 7\ 10) & (6\ 7\ 9) & (6\ 7\ 8) & (8\ 9\ 10), \end{array}$$

che danno la fig. 32.^a di cui se ne possono formare sedici diverse, e altre sedici pel solito scambio di cui abbiamo parlato sopra. In tutto 32 figure.

E finalmente consideriamo l'altra figura simile alla 25.^a e di cui i piani sieno

$$\begin{array}{cccc} (3\ 4\ 7) & (3\ 4\ 8) & (4\ 7\ 8) & (3\ 7\ 8) \\ (5\ 6\ 9) & (5\ 6\ 10) & (6\ 9\ 10) & (5\ 9\ 10). \end{array}$$

Colla trasformazione si hanno i piani

$$\begin{array}{cccc} (3\ 4\ 7) & (3\ 4\ 8) & (4\ 9\ 10) & (3\ 9\ 10) \\ (5\ 6\ 9) & (5\ 6\ 10) & (6\ 7\ 8) & (5\ 7\ 8). \end{array}$$

e si ha la fig. 33.^a di cui se ne possono formare 18; se scambiamo i due gruppi 7 8 9 10 con 3 4 5 6 non si hanno figure diverse dalle prime.

Poichè ora

$$2 + 12 + 32 + 18 = 64,$$

così abbiamo raggiunte le 64 figure che dovevamo ritrovare pel caso in cui q , q' sieno rispettivamente rappresentate da

$$(3\ 4\ 5\ 6\ 1), \quad (2\ 3\ 4\ 5\ 6).$$

Passiamo ora al caso in cui le due caratteristiche q , q' sieno rappresentate da due gruppi di cinque punti che abbiano due punti comuni.

Per far questo operiamo sulle fig. 27.^a, 28.^a, 29.^a la seguente trasformazione. Mutiamo

$$\begin{array}{ll} (1) & \text{in } (3\ 4\ 5\ 8\ 9) \\ (3) & \text{in } (4\ 5\ 8\ 9\ 1) \\ (4) & \text{in } (5\ 8\ 9\ 1\ 3) \\ (5) & \text{in } (8\ 9\ 1\ 3\ 4) \\ (8) & \text{in } (9\ 1\ 3\ 4\ 5) \\ (9) & \text{in } (1\ 3\ 4\ 5\ 8). \end{array}$$

Allora q , q' saranno rappresentate da

$$(3\ 4\ 5\ 8\ 9), \quad (1\ 6\ 7\ 8\ 9).$$

Gli otto piani della fig. 27.^a diventano

$$\begin{array}{cccc} (2\ 7\ 6) & (3\ 6\ 10) & (4\ 6\ 10) & (5\ 6\ 10) \\ (1\ 2\ 6) & (1\ 7\ 8) & (8\ 9\ 10) & (1\ 7\ 9), \end{array}$$

rappresentati dalla fig. 34.^a.

Di tali figure ve ne sono sei e altre sei se si tien conto della permutabilità dei punti 3, 4, 5 coi punti 1, 6, 7 stante la simmetria in tali punti delle due caratteristiche fondamentali q, q' .

Inoltre considerando i gruppi coniugati rispettivamente dei gruppi (16789) (34589) si hanno i gruppi (345210) (167210) il che mostra che si possono costruire altre $6 + 6 = 12$ figure simili scambiando solo il gruppo 8, 9, col gruppo 2, 10. In tutto quindi 24 figure.

Trasformando ora la fig. 29.^a si hanno gli otto piani

$$\begin{array}{cccc} (1\ 2\ 3) & (1\ 2\ 4) & (2\ 6\ 7) & (5\ 6\ 10) \\ (5\ 7\ 10) & (1\ 5\ 9) & (1\ 5\ 8) & (3\ 4\ 10), \end{array}$$

che costituiscono la fig. 35.^a.

Di esse ve ne sono in tutto $2 \cdot 18 = 36$.

Finalmente una figura simile alla 28.^a avrà i piani

$$\begin{array}{cccc} (1\ 3\ 8) & (1\ 4\ 8) & (1\ 5\ 8) & (1\ 6\ 8) \\ (1\ 7\ 8) & (8\ 9\ 10) & (2\ 8\ 10) & (2\ 8\ 9), \end{array}$$

e questi trasformati danno

$$\begin{array}{cccc} (4\ 5\ 9) & (3\ 5\ 9) & (3\ 4\ 9) & (1\ 8\ 6) \\ (1\ 8\ 7) & (8\ 9\ 10) & (6\ 7\ 8) & (2\ 8\ 9), \end{array}$$

cioè la fig. 36.^a di cui se ne possono formare quattro tenendo conto delle solite osservazioni.

In tutto abbiamo

$$24 + 36 + 4 = 64$$

figure.

Raccogliendo i risultati ottenuti si ha che « esistono tredici figure diverse (dalla fig. 24.^a alla 36.^a) rappresentanti tutti i sistemi completi di otto caratteristiche dispari ».

§ 22. Teoremi sui sistemi completi di caratteristiche dispari.

Sui sistemi completi il NOETHER dimostra i seguenti teoremi:

1. Vi sono $8 \cdot 36 \cdot 136$ sistemi completi contenenti una data caratteristica dispari.
2. Vi sono $2 \cdot 16 \cdot 72$ sistemi completi contenenti due date caratteristiche.

3. Vi sono $6 \cdot 36$ sistemi contenenti tre date caratteristiche dispari la cui somma sia pari.
4. Vi sono $2 \cdot 16$ sistemi contenenti quattro date caratteristiche e tali che a tre a tre danno somme pari.
5. Vi sono sei sistemi contenenti cinque date caratteristiche e tali che a tre a tre danno somme pari.
6. Vi sono due sistemi contenenti sei caratteristiche date tali che a tre a tre danno somme pari.
7. Otto caratteristiche dispari tali che a tre a tre danno somme pari definiscono un sistema completo.
8. Più di otto caratteristiche dispari tali che a tre a tre danno somme pari, non esistono.
9. Otto caratteristiche a_r tali che, scelta una q pari, le somme $q + a_r + a_s$ sono tutte dispari definiscono un sistema completo di cui q è una delle caratteristiche pari basi.
10. Otto caratteristiche dispari a_r tali che, scelta un'altra caratteristica pari o dispari qualunque g , le somme

$$g + a_r + a_s + a_t,$$

sono dispari, formano un sistema completo corrispondente a due caratteristiche basi q, q' tali che

$$q + q' = g.$$

A queste proprietà poi dobbiamo aggiungere le proprietà fondamentali dei sistemi completi e che noi abbiamo già enunciate, cioè che le otto caratteristiche di un sistema completo a tre a tre, o a sette a sette danno sempre caratteristiche pari, e a uno a uno o a cinque a cinque danno caratteristiche dispari, e che la somma di tutte otto è $q + q'$. Per ottenere da un sistema completo tutte le caratteristiche pari e dispari bisogna considerare insieme alle otto caratteristiche del sistema anche una delle caratteristiche basi, per es. q . Allora *tutte* le dispari son date da:

$$\left. \begin{array}{l} q + a_r + a_s \\ q + a_r + a_s + a_t + a_x + a_v + a_w \\ a_r \\ a_r + a_s + a_t + a_x + a_v \end{array} \right\}$$

e tutte le pari son date invece da:

$$\left. \begin{aligned} a_r + a_s + a_t \\ a_r + a_s + a_t + a_z + a_v + a_w + a_u \\ q \\ q + a_r + a_s + a_t + a_z + a_v + a_w + a_u + a_x \\ q + a_r + a_s + a_t + a_z. \end{aligned} \right\}$$

Tutti i teoremi citati sopra possono risultare dalla semplice considerazione delle figure.

Per esempio dimostriamo il teorema 3.°. Immaginiamo tre piani passanti per una retta. Essi formano, come si sa, una terna pari. Vediamo quanti sistemi completi possono contenere questa terna.

Si ha che:

della fig.	24. ^a	ne esiste	1	contenente tale terna
"	25. ^a	"	nessuno	" "
"	26. ^a	"	$\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$	" "
"	27. ^a	"	$2 \cdot 5 + 5 \cdot 2 \cdot 4 = 50$	" "
"	28. ^a	"	$\frac{5 \cdot 4}{2} \cdot 2 = 20$	" "
"	29. ^a	"	$\frac{5 \cdot 4}{2} \cdot 2 = 20$	" "
"	30. ^a	"	5	" "
"	31. ^a	"	$5 \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} = 30$	" "
"	32. ^a	"	$\frac{5 \cdot 4}{2} \cdot 2 = 20$	" "
"	33. ^a	"	nessuno	" "
"	34. ^a	"	60	" "
"	35. ^a	"	nessuno	" "
"	36. ^a	"	nessuno	" "

In tutto quindi ne esistono

$$1 + 10 + 50 + 20 + 20 + 5 + 30 + 20 + 60 = 216 = 6 \cdot 36,$$

e con ciò resta dimostrato il teorema 3.^o con un metodo diverso di quello seguito dal NOETHER.

Così anche potrebbero dimostrarsi tutti gli altri; ma a noi ci importa massimamente far vedere come si possono dimostrare i teoremi 7, 8, 9, 10 che sono importanti perchè fissano le condizioni sufficienti per costituire un sistema completo.

Per far questo ci occorre far vedere prima come si possono rappresentare, mediante le permutazioni dei sistemi completi, tutte le sostituzioni del gruppo delle caratteristiche.

§ 23. Rappresentazione completa del gruppo delle caratteristiche di genere 3 e 4.

Dalle cose sviluppate sinora risulta che pel genere 3, assunta come fondamentale una caratteristica pari, la configurazione di tutte le altre caratteristiche è isomorfa a quella delle 28 rette che congiungono a due a due otto punti, insieme ai 35 doppi tetraedri che congiungono gli stessi punti a quattro a quattro.

Il che in altre parole significa che il sottogruppo di monodromia formato con quelle sostituzioni che lasciano inalterata la caratteristica pari fondamentale, è isomorfo al gruppo degli otto punti, cioè ogni sostituzione di quel sottogruppo corrisponde ad una permutazione degli otto punti fra loro.

Quindi se ne può dedurre, come già sappiamo, che quel sottogruppo ha per ordine 8!

Ma se noi vogliamo rappresentare *tutte* le sostituzioni del gruppo, dobbiamo mutare anche la caratteristica pari fondamentale, e allora si hanno due sistemi di otto punti tali che il passaggio dall'uno all'altro potrà rappresentare una sostituzione qualunque.

Allora un sistema completo di ARONHOLD di uno degli aggruppamenti di otto punti, diventerà necessariamente un sistema di ARONHOLD dell'altro aggruppamento. La ragione per la quale per una sostituzione di monodromia, un sistema deve trasformarsi in un altro la potremmo trovare per $p = 3$ nelle conosciute proprietà dei sistemi completi, che cioè (vedi § 11) essi sono i soli sistemi di sette rette tali che a tre a tre danno caratteristiche pari.

Ma noi, in vista anche della estensione che ne dobbiamo fare al caso $p = 4$, vogliamo dimostrarlo diversamente, in modo che dalla nostra dimostrazione si possa poi dedurre anche come corollario la proprietà fondamentale enunciata.

Incominciamo col ricordare [ciò che risulta da una semplice enumerazione delle figure (vedi fig. 11.^a)] che esistono $8 \cdot 36$ sistemi completi, e che le sostituzioni di monodromia sono $8! \cdot 36$. Ora se noi trasformiamo un sistema completo in un altro, cioè stabiliamo una sostituzione che trasformi le sette rette dall'un sistema nelle sette rette dell'altro (e questa corrispondenza può farsi in $7!$ modi diversi) allora evidentemente la sostituzione è completamente definita perchè tutte le altre caratteristiche componendosi mediante le sette del sistema, la loro trasformazione è individuata.

Ora lasciando fisso il primo sistema e facendo variare il secondo fra tutti gli $8 \cdot 36$ possibili, si hanno così in tutto $7! \cdot 8 \cdot 36 = 8! \cdot 36$ sostituzioni fra loro diverse, e quindi tutte le sostituzioni di monodromia che sono proprio in tal numero. Ne risulta che una sostituzione di monodromia muterà sempre un sistema completo in un altro, altrimenti esisterebbero più che $8! \cdot 36$ sostituzioni. Quindi i sistemi completi acquistano un'altra importanza speciale nel senso che essi possono riuscire a rappresentare *tutte* le sostituzioni del gruppo di monodromia.

Così, per es. sappiamo (§ 11) che esistono $2 + 30 + 40 = 72$ sistemi completi aventi una data retta fissa. E quindi se ne deduce che

« Esistono $6! \cdot 72$ sostituzioni che lasciano inalterata una data caratteristica dispari. » Questo numero corrisponde all'ordine del gruppo delle 27 rette della superficie di 3.^o ordine (*).

E analogamente, dai teoremi del § 11 ricaviamo ancora:

« Esistono $16 \cdot 5!$ sostituzioni che lasciano inalterate due date rette, cioè due date caratteristiche dispari. » Questo numero corrisponde all'ordine del gruppo delle 16 rette della superficie di 4.^o ordine a conica doppia (**).

« Esistono $5 \cdot 4!$ sostituzioni che lasciano inalterate tre rette formanti una terna pari, cioè tre caratteristiche dispari la cui somma sia pari. » Questo numero corrisponde all'ordine del gruppo delle dieci rette della superficie di 5.^o ordine a quintica doppia studiata da CAPORALI e DEL RE.

« Esistono $2 \cdot 3!$ sostituzioni che lasciano inalterate quattro rette formanti quattro terne pari. »

(*) JORDAN, *Subst.*, pag. 317.

(**) JORDAN, *id.*, pag. 309.

Possiamo anche dedurre come corollario ciò che abbiamo già conosciuto per altra via cioè che un sistema di sette rette tali che a tre a tre danno una somma pari individuano un sistema completo. Infatti consideriamo in primo luogo le tre terne pari di rette (I, III, V della fig. 2.^a). Evidentemente esiste sempre un sistema completo contenente una qualunque di quelle terne. Allora esistendo sempre una sostituzione che muti tutte le rette di un sistema completo in tutte quelle di un altro, esisterà sempre una sostituzione che muti la terna I e la terna III nella terna V.

Se consideriamo il dato assieme di sette rette, si può allora far vedere che esisterà sempre una sostituzione che lo muti in un sistema di ARONHOLD, e quindi sarà esso stesso (per le cose dette avanti) un sistema di ARONHOLD.

Infatti se tre rette di esso formano una figura come I o III (fig. 2.^a) si possono con una trasformazione ridurre ad un tipo V. Allora l'assieme di sette rette diventerà un altro assieme di sette rette godente sempre della proprietà supposta [perchè quella proprietà non si altera per qualunque sostituzione del gruppo di monodromia (§ 3)] e tale che tre rette formino il tipo V (fig. 2.^a). Aggiungiamo ora a queste tre una quarta retta. Queste quattro rette saranno tali che conterranno sempre solo terne pari, mentre le tre prime di esse passano per un punto. Sieno (1 2) (1 3) (1 4) queste tre rette passanti per un punto; allora la quarta potrà essere o (5 6) o (1 5) cioè la quaterna può essere solo di uno dei due tipi della fig. 37.^a. Ora il primo è una quaterna contenuta evidentemente in un sistema completo (il secondo della fig. 11.^a), e quindi esiste una trasformazione che lo riduce al secondo il quale evidentemente appartiene ad un sistema completo. Allora tutte le altre rette del supposto sistema si ridurranno ad altre rette che con le quattro passanti per un punto costituiscono sempre terne pari. Quindi considerando una quinta di queste rette, essa si ridurrà o a (6 7) o a (1 6) (fig. 38.^a). Il primo caso si può al solito ridurre al secondo, e allora ci riduciamo sempre a cinque rette passanti per un punto e a due rette che colle prime danno sempre terne pari. Ora se una di queste altre è la retta (7 8), l'altra non può esistere perchè in qualunque modo si ponga darebbe sempre luogo ad una terna dispari. Quindi le due rette rimanenti non possono che essere (1 7) (1 8), e quindi si ha un complesso di sette rette passanti per un punto, e quindi formanti un sistema completo. Con ciò il nostro teorema resta dimostrato.

Evidentemente poi risulta anche quest'altro; che non si possono costruire più di sette rette godenti della proprietà che a tre a tre danno terne pari. Perchè se ciò fosse possibile io posso sempre con un assieme di trasformazioni

nel modo indicato sopra, ridurre sette delle rette a sette rette passanti per un punto, e allora le altre in qualunque modo sieno situate daranno luogo sempre a terne dispari come si vede facilmente.

Tutte queste considerazioni sulla rappresentazione del gruppo delle caratteristiche di genere 3 siano in grado di estenderle subito pel genere 4.

Avendo scelto come fondamento della rappresentazione un sistema di NOETHER di dieci caratteristiche pari, il sottogruppo formato di quelle sostituzioni che scambiano fra loro queste dieci caratteristiche pari, è rappresentabile coll'assieme delle permutazioni fra i dieci punti.

Passando da un sistema di NOETHER ad un altro qualunque dei $136 \cdot 96$ esistenti, si hanno in tutto $136 \cdot 96 \cdot 10!$ sostituzioni fra loro diverse; ma le sostituzioni di monodromia sono in tal numero, dunque in tal maniera si hanno tutte le sostituzioni di monodromia.

In tal maniera conoscendo le configurazioni di tutti i sistemi completi di dieci caratteristiche pari, si possono rappresentare *tutte* le sostituzioni. Ma noi possiamo utilmente sostituire ai sistemi completi di caratteristiche pari, quelli di caratteristiche dispari, di cui abbiamo trovate avanti tutte le possibili configurazioni.

E ciò è tanto più conveniente inquantochè i sistemi completi di caratteristiche pari, contenendo parecchie caratteristiche pari rappresentate da cinque punti danno luogo ad una configurazione più complicata.

Allora possiamo dire che tutte le sostituzioni di monodromia sono rappresentate dalla permutazione di un sistema completo di caratteristiche dispari in un altro qualunque, accompagnata da una permutazione degli otto piani fra loro.

Però si noti che siccome effettivamente il sistema di otto caratteristiche dispari non può dare *tutte* le caratteristiche, se non si fissa una delle sue caratteristiche basi q o q' , così nel far corrispondere un sistema di otto ad un altro di otto, bisogna anche fissare la corrispondenza di una delle caratteristiche basi q o q' .

Siccome i sistemi di otto sono $255 \cdot 36 \cdot 64$ si hanno così tutte le $255 \cdot 36 \cdot 64 \cdot 2 \cdot 8!$ sostituzioni di monodromia.

Troviamo quante sostituzioni esistono che lasciano fissa una data caratteristica dispari. Basta trovare quanti sistemi completi vi sono che hanno un dato piano fisso. Dal § 22 sappiamo che tal numero è $8 \cdot 36 \cdot 136$, onde moltiplicando tal numero per $2 \cdot 7!$ si ha il numero richiesto delle sostituzioni.

Come conseguenza delle cose dette risulta che se si hanno due assieme

dello stesso numero di piani, e un solo di essi forma una configurazione appartenente ad un sistema completo mentre l'altro no, allora non esisterà nessuna sostituzione che muti il primo assieme nel secondo, perchè per una sostituzione qualunque i sistemi completi si permutano fra loro.

§ 24. Dimostrazione di alcuni teoremi sui sistemi completi.

Siamo ora in grado di esporre la dimostrazione dei teoremi 7, 8, 9, 10 del § 22.

Dimostriamo che otto piani tali che contengono tutte terne pari (cioè dei tipi I, II, V, VII, X, XI, XII fig. 18.^a) formano necessariamente una delle 13 figure dei sistemi completi.

Per dimostrare ciò faremo vedere che con una sostituzione di monodromia si potrà sempre trasformare il sistema degli otto piani in un sistema di otto piani passanti per due punti fissi, cioè in un sistema completo, e quindi per i principii stabiliti nel paragrafo precedente se ne deduce che il sistema primitivo era anche un sistema completo.

Consideriamo una terna del sistema dato. Tali terne saranno dei tipi I, II, V, VII, X, XI, XII, e poichè si verifica subito che queste compariscono sempre in un sistema completo, cioè che esiste sempre un sistema completo contenente una di quelle terne (*), così si deduce che con un'opportuna sostituzione si potrà sempre ridurre quella terna ad una del tipo V, cioè a tre piani passanti per due punti. Allora tutti gli altri piani si trasformano in altri in modo però che resti inalterata la proprietà che l'assieme possieda solo terne pari.

Consideriamo ora un altro piano insieme con i tre ridotti al tipo unico indicato. Si vede che non sono possibili che solo le tre figure (a) (b) (c) della fig. 40.^a.

Ora tali quaterne esistono in sistemi completi, e propriamente

- (a) esiste nella fig. 27.^a o 30.^a ecc.;
- (b) esiste nella fig. 26.^a o 28.^a ecc.;
- (c) esiste nella fig. 24.^a o 26.^a ecc.

(*) Si noti per es. che le terne XI esistono solo nelle fig. 32.^a e 35.^a; nella prima di tali figure ne esistono tre sole cioè quelle formate coi due piani (1 2 6) (8 9 10) e con uno degli altri tre (3 7 4), (7 4 5), (7 5 3), mentre nella seconda ne esistono due e sono (3 4 10) (2 6 7) (1 8 5), (3 4 10) (2 6 7) (1 9 5).

Dunque possiamo sempre con una sostituzione ridurci al tipo (c) cioè a quattro piani passanti per due punti.

Vediamo come può allora essere disposto un altro dei piani.

Evidentemente un quinto piano lo posso disporre in tre altre maniere in modo che si verifichi sempre la proprietà di non esservi che terne pari, e cioè

(a') Quattro piani passanti per due punti e un quinto piano avente nessun punto comune con questi.

(b') Quattro piani passanti per due punti e un quinto avente un vertice in uno di questi due punti.

(c') Cinque piani passanti per due punti.

Ora tali configurazioni esistono in sistemi completi, cioè per es.

(a') esiste in fig. 27.^a;

(b') esiste in fig. 27.^a;

(c') esiste in fig. 24.^a.

Quindi ci possiamo ridurre, al solito, solo al tipo (c').

Un sesto piano può riunirsi ai cinque di (c') al solito in tre sole maniere cioè

(a'') non avente alcun vertice comune coi piani di (c');

(b'') avente un vertice in uno dei due punti comuni dei piani di (c');

(c'') avente due vertici nei due punti comuni.

È facile ora verificare che non esiste alcun sistema completo contenente una figura come (a''), però si può far vedere che se adesso alla figura (a'') voglio aggiungere un altro piano dotato delle medesime proprietà non lo posso più fare, perchè in primo luogo sono esauriti tutti i dieci punti, e quindi quest'altro piano non può che avere tutti i suoi vertici comuni con piani della figura a''; intanto questo settimo piano dovendo formare sempre terne pari coi cinque piani passanti per due punti, può o non avere con essi nessun vertice di comune o passare per uno dei due vertici comuni, o per amendue. Ma nel primo caso sarebbe lo stesso del sesto piano di (a''), e negli altri casi dovendo poi avere due o un vertice comune con tale sesto piano darebbe sempre luogo ad una terna dispari, come è facile verificare. Dunque la figura (a'') resta esclusa, e poichè (b'') esiste in un sistema completo per es. nella fig. 26.^a, così possiamo sempre ridurci a sei piani passanti per due punti.

Aggiungendo un altro piano, questo può aggiungersi in due modi, cioè in modo che nel complesso formino o:

(b'') Sei piani passanti per due punti, e uno avente un vertice in uno di tali due punti.

(c'') Sette piani passanti per due punti.

Poichè (b'') è contenuto in un sistema completo e propriamente per es. nella fig. 26.^a, così con una sostituzione possiamo ridurre a (c''). Allora finalmente l'ottavo piano non può che passare per i due punti comuni, perchè in qualunque altra maniera darebbe luogo a terne dispari.

Dunque il sistema dato essendo trasformabile in un sistema completo e propriamente nella fig. 25.^a, è esso stesso un sistema completo.

Evidentemente ora si può osservare che se il sistema dato fosse stato composto di nove piani, allora otto di essi possono trasformarsi in otto piani passanti per due punti, e il nono dovrebbe trasformarsi in un altro che coi primi dà sempre terne pari. Ma ad otto piani siffatti non può aggiungersi un nono piano con questa condizione, dunque non esistono nove piani colla proprietà detta.

In tal maniera resta dimostrato anche il teorema 8.º.

Dimostriamo ora il teorema 9.º.

Supponiamo che otto piani $a_1 a_2 \dots a_8$ sieno tali che $q + a_r + a_s$ sia sempre dispari, dove q è una caratteristica pari. Questa q pari sia una di quelle rappresentate da un punto solo, per es. dal punto 1. Prendiamo allora due dei piani del sistema dato, e facilmente si vede che essi possono rispetto al punto 1 avere solo le seguenti figure

(a)	(1 2 3)	(1 2 4)
(b)	(2 3 4)	(2 3 5)
(c)	(1 2 3)	(2 4 5)
(d)	(2 3 4)	(5 6 7).

Ora figure come quelle formate da questi due piani insieme al punto $1 \equiv q$ esistono in sistemi completi, cioè la seconda esiste nella fig. 25.^a e 26.^a, la terza esiste in 26.^a o 27.^a, e la quarta esiste in 25.^a, e quindi adoperando una trasformazione come quelle di sopra io posso trasformare tali sistemi completi in uno come la fig. 24.^a, e allora le figure (b) (c) (d) vengono tutte a trasformarsi nella figura (a).

Consideriamo ora insieme ad (a) un altro piano dotato delle stesse proprietà. Esso potrà essere solo o (1 2 5) ovvero (2 5 6).

Nel secondo caso si hanno tre piani che con 1 formano una figura che esiste nella fig. 27.^a o 28.^a, e quindi con una trasformazione il secondo caso può ridursi al primo, che è una figura risultante di tre piani passanti per due punti di cui uno è il punto 1. Aggiungiamo ora ancora un altro piano. Questo o passa per gli stessi due punti o pel punto 2 solamente, senza avere altri vertici comuni coi piani già esistenti. Tale seconda figura esiste nella fig. 28.^a e quindi sempre ci riduciamo alla fig. 24.^a, e così di seguito finchè siamo giunti a cinque piani passanti per due punti 1, 2 e ad un altro piano (2 8 9) che è l'ultima configurazione di questa specie esistente nei sistemi completi e che esiste propriamente nella fig. 28.^a. Quindi infine al solito modo ci riduciamo a sei piani passanti per due punti di cui uno è $1 \equiv q$.

Volendo aggiungere gli altri due piani, se uno di essi è (2 9 10) non se ne può costruire un altro in modo da conservare inalterata la proprietà stabilita, e se invece uno di essi è (1 2 9) l'altro non può essere che (1 2 10), e così ci siamo ridotti a otto piani passanti per due punti di cui uno è q , e con ciò resta dimostrato il teorema.

§ 25. Determinazione delle caratteristiche corrispondenti alle tangenti doppie della curva di quart'ordine.

Nel volume 11 dei Math. Ann. il KLEIN si propone di determinare le caratteristiche delle tangenti doppie di quella curva di quart'ordine di PLÜCKER che ha tutte le tangenti doppie reali, e la cui forma è, come sappiamo, l'assieme di quattro ovali esterne l'una all'altra (vedi figura nel lavoro citato di KLEIN). Messa l'equazione della quartica sotto la forma

$$\lambda D' D'' D''' D^{IV} - \Omega^2 = 0,$$

dove le D sono quattro convenienti tangenti doppie e Ω è la conica che passa per i punti di contatto di esse, facendo convergere λ a zero si ha come caso limite una conica doppia che rappresenta la curva di quart'ordine ridotta iperellittica. Su questa conica vi sono otto punti di diramazione, le cui congiungenti a due a due rappresentano le tangenti doppie.

Il KLEIN considerando direttamente gli integrali abeliani determina le caratteristiche di queste congiungenti, e basta evidentemente limitarsi a questa

sola determinazione perchè poi col principio di continuità si può passare alle tangenti doppie della quartica primitiva.

Ora la determinazione delle caratteristiche pel caso iperellittico si può fare immediatamente paragonando la figura che noi otteniamo cogli otto punti di diramazione colla figura da noi presa per fondamento nelle ricerche precedenti e che ha anche otto punti fondamentali. Per assegnare quindi le caratteristiche basta scegliere arbitrariamente sette rette formanti una configurazione di un sistema completo, cioè una delle due figure 11.^o e assegnare a tali rette le caratteristiche di un sistema completo per es. (*)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La somma di queste sette caratteristiche è $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Assegnando (fig. 41.^a) queste caratteristiche alle sette rette partenti da uno degli otto punti per es. da 1, e ritrovando poi le caratteristiche di tutte le altre rette (ij) colla formola

$$(ij) = (1i) + (1j) + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

si viene a trovare la stessa figura trovata da KLEIN nel lavoro citato.

§ 26. Determinazione delle caratteristiche dei 120 piani tritangenti della sestica.

Una considerazione analoga possiamo fare pel caso della sestica storta di genere 4.

Prima di tutto ricordiamo che possiamo immaginare anche una sestica con cinque rami reali come la quartica di PLUCKER ha quattro rami reali.

Infatti da un lavoro di HILBERT (**) risulta che il numero dei rami reali

(ⁱ) Vedi WEBER, *Abelsch. Funct.*, pag. 183.

(**) Math. Ann., Bd. 38, pag. 122 (1891). In questi ultimi tempi è uscita una interessante Nota di KLEIN in cui generalizza alle curve di genere qualunque i risultati, sulla realtà delle tangenti doppie della quartica, ottenuti da ZEUTHEN nel 7.^{mo} vol. dei Math. Ann. Vedi: *Ueber Realitätsverhältnisse im Gebiete der Abelschen Functionen*. Göttinger Nachrichten, n.° 9, 1892.

di una curva storta irriducibile di n^{mo} ordine è al più $\frac{1}{4}(n-2)^2 + 1$ ovvero $\frac{1}{4}(n-1)(n+3) + 1$ secondochè n è pari o dispari, ed esistono effettivamente nei due casi curve aventi tanti rami reali. Onde si ha che esisterà una setica con cinque ovali. Se la forma diventa iperellittica si ha una cubica doppia con dieci punti di diramazione, e i 120 piani tritangenti diventano i piani congiungenti a tre a tre questi dieci punti. Per determinare quindi le caratteristiche dei diversi piani tritangenti nel caso iperellittico basta assegnare ai dieci punti le caratteristiche di un sistema completo di NOETHER (vedi § 18) e allora la caratteristica di un piano sarà la somma delle tre caratteristiche dei vertici.

§ 27. Gruppo delle 27 rette della superficie di terz'ordine.

Vogliamo far vedere come mediante le considerazioni precedenti si può studiare il gruppo e la configurazione delle 27 rette della superficie cubica (*).

Teniamo presente la figura di GEISER (§ 4) nella quale le 27 rette corrispondono a 27 tangenti doppie della quartica. Ogni sezione piana della superficie cubica corrisponde ad una cubica di contatto della quartica e propriamente ad una cubica del sistema di contatto coniugato alla 28.^a tangente doppia, cioè tale che per i sei punti di contatto di essa cubica e per i due punti di contatto della 28.^a tangente doppia passa una conica.

Allora volendo studiare il gruppo delle 27 rette dobbiamo studiare il sottogruppo di monodromia che lascia inalterata una caratteristica dispari, e le sostituzioni di questo sottogruppo le possiamo rappresentare tutte mediante le considerazioni svolte nel § 23.

Prima di tutto possiamo ricercare quanti sono i sistemi completi contenenti una data retta fissa. Si trova che sono 72 (§ 23), onde ne deduciamo che il gruppo delle sostituzioni fra le 27 rette ha per ordine $6!72$. Inoltre consideriamo tre tangenti doppie formanti una cubica di contatto del sistema coniugato alla 28.^a tangente doppia; in altri termini consideriamo tre tangenti doppie che insieme colla tangente doppia fissa formino una quaterna zero (§ 8). Allora per la figura di GEISER si ha che il piano nello spazio a

(*) JORDAN, pag. 316.

tre dimensioni che corrisponderà a questa cubica di contatto degenerata in tre rette, dovrà passare per tre rette della superficie cubica; cioè le 27 rette della superficie cubica a tre a tre stanno in piani; e poichè di quaterne zero aventi una retta fissa ve ne sono 45 (vedi § 8), così esistono 45 triangoli formati dalle 27 rette (triangoli di STEINER) (*).

In questa maniera le 27 rette di S_3 sono rappresentate colle 27 rette che congiungono a due a due otto punti fissi, quando si esclude una delle congiungenti.

Vediamo in questa figura schematica come saranno rappresentate le coppie di rette che sulla superficie di terz'ordine si vengono ad incontrare o no.

Evidentemente due rette si taglieranno o no secondochè nella figura schematica saranno rappresentate da due rette che insieme alla retta fissa, formino o no, tre lati di una quaterna zero.

Quindi se (1 2) è la retta fissa (fig. 42.^a) per segnare due rette che rappresentino due che non si taglino dobbiamo segnare due rette che insieme con (1 2) non individuano una quarta retta; quindi possiamo segnare le coppie dei seguenti tipi:

I	(1 8)	(2 8)
II	(1 3)	(1 4)
III	(7 6)	(6 5)
IV	(1 3)	(5 6).

Vediamo quante di queste coppie possiamo segnare. Ve ne sono

$$6 + 2 \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} + 6 \cdot \frac{5 \cdot 4}{2} + 6 \cdot 2 \cdot \frac{5 \cdot 4}{2} = 216 = 27 \cdot 8,$$

cioè esistono 27 · 8 coppie di rette che non si tagliano (**).

Vediamo come si possono raggruppare queste coppie.

Congiungiamo i sei punti 3, 4, 5, 6, 7, 8 coi punti 1, 2. Abbiamo sei coppie del tipo I; queste sei coppie evidentemente sono tali che prese due di esse, le due rette di una tagliano le due rette dell'altra, cioè considerando per es. le due coppie (1 3) (2 3); (1 4) (2 4), è evidente che le due rette (1 3) (2 4) e le due rette (1 4) (2 3) rappresentano coppie che rispettivamente si tagliano.

(*) JORDAN, loc. cit. — STEINER, Crelle, 53.

(**) JORDAN, pag. 319.

Inoltre nessun'altra coppia si trova in tale condizione rispetto ad una delle sei coppie considerate; abbiamo così trovate sei coppie che si trovano fra loro in una relazione speciale, e tale relazione non può evidentemente venire alterata dalle sostituzioni del gruppo; quindi ne possiamo dedurre che tutte le $27 \cdot 8$ coppie si riuniscono a sei a sei in $\frac{27 \cdot 8}{6} = 36$ bisestuple (bise-
stuple di SCHLÄFLI).

Vediamo ogni retta quante altre ne incontra; basta verificare la cosa per una retta speciale perchè poi in virtù della transitività del gruppo lo stesso succederà per tutte le altre. Ora per es. (fig. 43.^a) la retta (1 3) incontra le rette

$$(2\ 4) \ (2\ 5) \ (2\ 6) \ (2\ 7) \ (2\ 8) \ (3\ 4) \ (3\ 5) \ (3\ 6) \ (3\ 7) \ (3\ 8),$$

perchè con ciascuna di queste rette può sempre formar parte di una quaterna zero.

Evidentemente con qualunque altra retta, la retta (1 3) formerebbe sempre una coppia di uno dei tipi della fig. 42.^a, e quindi possiamo concludere che ogni retta incontra dieci altre rette fra le 27 e si ritrova il teorema di STEINER.

Immaginiamo due triangoli di STEINER non aventi nessun lato comune. Essi saranno per es. rappresentati dalle rette (fig. 44.^a)

$$\begin{array}{ccc} (1\ 3) & (3\ 4) & (2\ 4) \\ (1\ 5) & (5\ 6) & (2\ 6). \end{array}$$

Allora ogni lato del primo triangolo incontra un lato del secondo; cioè evidentemente

$$\begin{array}{ccc} (1\ 3) & \text{incontra} & (2\ 6) \\ (3\ 4) & \text{»} & (6\ 5) \\ (2\ 4) & \text{»} & (1\ 5), \end{array}$$

e le rette (3 6) (7 8) (4 5) evidentemente formano un nuovo triangolo che con i due primi è combinato in modo che i lati corrispondenti dei tre triangoli si incontrano a due a due formando altri tre triangoli

$$\begin{array}{ccc} (1\ 3) & (2\ 6) & (3\ 6) \\ (3\ 4) & (6\ 5) & (7\ 8) \\ (2\ 4) & (1\ 5) & (4\ 5). \end{array}$$

Di queste terne di triangoli (formanti ciò che si chiama un triedro di STEINER)

ve ne sono tante quanto è il terzo del numero delle coppie di triangoli non aventi alcun lato comune. Ora se (1 3) (3 4) (4 2) è uno dei triangoli, un altro non avente con esso alcun lato comune o è del tipo

$$(1\ 5)\ (5\ 6)\ (6\ 2),$$

di cui ve ne sono $2 \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} = 12$ diversi o del tipo

$$(3\ 5)\ (4\ 6)\ (7\ 8),$$

di cui ve ne sono $2 \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} = 12$, o del tipo finalmente

$$(2\ 3)\ (3\ 5)\ (5\ 1),$$

di cui ve ne sono $4 \cdot 2 = 8$.

In tutto vi saranno $\frac{32 \cdot 45}{2}$ coppie di triangoli non aventi alcun lato comune, e quindi $\frac{45 \cdot 32}{2 \cdot 3}$ triedri di STEINER.

Nella Memoria seguente, che è già compiuta, esplicheremo largamente i concetti appena accennati in questo capitolo finale e ce ne serviremo per lo studio delle configurazioni.

Milano, Pavia, $\frac{\text{agosto } 1891}{\text{aprile } 1892}$.