ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN.

N^o 3315.

Band 139.

3.

Bemerkung zu dem Aufsatz des Herrn Weiler in A. N. 3312.

Von Paul Harzer.

Herr Weiler glaubt irrthümlicher Weise mit dem Aufsatz in A. N. 3312 dasselbe Ziel zu verfolgen, das ich mir bei meinen Untersuchungen über einen speciellen Fall des Problems der drei Körper gestellt hatte. Mir kam es bei der Behandlung des Problems wesentlich darauf an, die Bewegungen eines gestörten Planeten, dessen mittlere Bewegung n sich zu der des störenden n' nahezu wie 2 : 1 verhielt, in solcher Form darzustellen, dass $\delta = 1 - \frac{2n'}{n}$ beliebig klein und selbst gleich Null gesetzt werden könnte, ohne dass die Bewegungsgleichungen unstetig würden, wie es bei der gewöhnlichen Behandlungsweise und bei der des Herrn Weiler der Fall ist.

Das Ziel habe ich in meiner Arbeit bei Vermeidung der Integrationsdivisoren von der Grössenordnung von δ , dadurch zu erreichen gesucht, dass ich als erste Näherung für die wesentlichsten Theile der Bewegung in der Länge die Gleichung des in einer Ebene schwingenden Pendels herstellte, die zwei verschiedenartige Lösungen, entsprechend den Fällen des rotirenden und des oscillirenden Pendels, zulässt.

Herr Weiler lässt aber in seiner Darstellung den Integrationsdivisor δ zu, nimmt also damit stillschweigend den Fall des rotirenden Pendels an und verschliesst sich damit die Möglichkeit δ beliebig klein werden zu lassen und dementsprechend auch den Fall des oscillirenden Pendels zu erlangen.

Herr Weiler scheint aber nach seiner Bemerkung auf p. 410 Z. 20 v. u. sqq. geneigt zu sein, diese Unmöglichkeit der Erweiterung seiner Darstellung einer Unrichtigkeit meiner Lösung zuzuschreiben.

Der hier erörterte ist der einzige Punkt, in dem Herr Weiler seinen auf p. 386 ausgesprochenen unbestimmten Hinweis auf »unvermeidliche Mängel« meiner Arbeit präcisirt.

Zu der Frage, ob eine stabile Bewegung für jeden Werth von δ möglich sei, hat kürzlich Herr Callandreau*) einen beachtenswerthen Beitrag geliefert durch eine Behandlung des typisch vereinfachten Problems, bei dem die Bahn des störenden Planeten kreisförmig ist und die in gleicher Ebene liegende Bahn des gestörten Planeten so wenig von einem Kreise abweicht, dass man Glieder zweiten Grades in den Abweichungen weglassen darf. Herr Callandreau stellt für diesen Fall unter Benutzung des Jacobi'schen

Integrals für die den Radius vector $r = \frac{a}{1 + \rho}$ bestimmende Grösse ρ eine Differentialgleichung zweiter Ordnung mit periodischen Coefficienten her und zeigt, dass der zugehörige charakteristische Exponent complex wird, wenn $595''1 < n < 595''9$ ist.

Das Auftreten eines complexen Werthes des charakteristischen Exponenten ist nun stets als ein Zeichen der Instabilität der Lösung zu betrachten, wenn man von Gebieten überall dicht wählbarer Anfangswerthe von ρ und $\frac{d\rho}{dt}$ ausgeht. Es ist aber im Allgemeinen möglich für einen gegebenen Anfangswerth von ρ einen solchen Anfangswerth von $\frac{d\rho}{dt}$ anzugeben, der eine stabile Lösung ermöglicht.

Setzt man z. B. in Herrn Callandreau's Gleichung für ρ die Constante S_2 gleich Null, so erhält man die Form

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} + (1 + \varepsilon a + 2\varepsilon b \cos 2t) \rho = 0$$

wobei die Grösse ε von der Ordnung der störenden Masse ist. Ist im der charakteristische Exponent, so besteht für ρ die particuläre Lösung

$$e^{2imt} \sum_{\alpha=-\infty}^{+\infty} \mu_{\alpha} e^{2i\alpha t}$$

und es ist nach bekanntem Verfahren leicht zu sehen, dass für sehr kleine Werthe von ε die Gleichung

$$\cos 2m\pi = - \left(1 - \varepsilon^2 \frac{(a-b)(a+b)}{8} \pi^2 + \dots \right)$$

also

$$m = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\varepsilon}{2} \sqrt{(a-b)(a+b)} + \dots \right)$$

besteht. Wird also $(a-b)(a+b) = -\sigma^2$ negativ, so wird, übereinstimmend mit Herrn Callandreau's Resultat, m complex und die particuläre Lösung erlangt die Form

$$\rho_1 = e^{-\varepsilon\sigma t} \sum_{\alpha=-\infty}^{+\infty} \mu_{\alpha} e^{(2\alpha+1)it}$$

Eine zweite particuläre Lösung erhält man durch Vertauschen von t mit $-t$, da sich die Differentialgleichung dabei nicht ändert; sie ist

*) O. Callandreau, Sur les lacunes dans la Zone des petites planètes, Comptes Rendus T. CXVIII, p. 751 sqq. 1894.

$$\varrho_2 = e^{+6\sigma t} \sum_{\alpha=-\infty}^{+\infty} \mu_{\alpha} e^{-(2\alpha+1)it}$$

Da ϱ_1 und ϱ_2 einer Differentialgleichung mit reellen Coefficienten genügt, kann man, unbeschadet der Allgemeingültigkeit, die Reihen für ϱ_1 und ϱ_2 als reell betrachten, es müssen also μ_{α} und $\mu_{-\alpha-1}$ zu einander conjugirt complex sein.

Das Integral der Gleichung

$$\frac{d^2\varrho}{dt^2} + (1 + \varepsilon a + 2\varepsilon b \cos 2t) \varrho = F(t)$$

hat die Form

$$\varrho = a_1 \varrho_1 + a_2 \varrho_2 + \frac{1}{\kappa} \left(\varrho_1 \int \varrho_2 F(t) dt - \varrho_2 \int \varrho_1 F(t) dt \right)$$

wobei κ die Constante

$$\kappa = \varrho_2 \frac{d\varrho_1}{dt} - \varrho_1 \frac{d\varrho_2}{dt}$$

bedeutet. Ist nun z. B. $F(t)$ eine periodische Reihe von einem gegen 2π incommensurablen und von 2π nicht nur um eine Grösse von der Ordnung ε verschiedenen Modul, so ist ϱ immer dann stabil, wenn die Anfangswerthe von ϱ und $\frac{d\varrho}{dt}$ durch die Annahme $a_2 = 0$ darstellbar sind.

Dieser Fall trifft nun bei der von Herrn Callandreau behandelten Gleichung nicht zu, da $F(t)$ z. B. das Glied

$$\varepsilon c (e^{it} + e^{-it})$$

enthält und dadurch in ϱ Glieder von der Ordnung der Grösse $\frac{c}{\sigma}$ auftreten, die durch geeignete Wahl der in σ enthaltenen Constanten a beliebig gross gemacht werden kann.

Es muss aber vorerst unentschieden bleiben, ob die hier angezeigte Schwierigkeit materiell oder nur formell ist.

Bei meiner ersten Annäherung ist dem den complexen Werth des charakteristischen Exponenten herbeiführenden Gliede $2\varepsilon b \cos 2t$ keine Rücksicht getragen worden, weil im allgemeinen Falle wichtigere Glieder in erster Annäherung in Betracht zu ziehen waren; der nachträglichen Berücksichtigung dieses Gliedes in zweiter Näherung schienen keine Bedenken entgegen zu treten, Herrn Callandreau's Untersuchung macht aber jedenfalls eine sorgfältige Betrachtung dieses Gliedes nöthig.

Eine Verallgemeinerung des von Herrn Callandreau behandelten Falles zu dem in der Natur gegebenen ist nicht ohne Weiteres möglich, da hier kein Integral für das Partialsystem des störenden und gestörten Planeten existirt.

Die Lücke von etwa $\frac{3}{4}''$ in den mittleren Bewegungen, die man mit der Festhaltung von Herrn Callandreau's Interpretation erklären würde, ist übrigens im Vergleich zu der notorisch vorhandenen von etwa $42''$ so gering, dass diese im besten Falle noch nicht viel von ihrem räthselhaften Wesen verloren hat.

Gotha 1895 Oct. 11.

Paul Harzer.

Bemerkungen zu dem Aufsatz des Herrn Weiler:

„Die Störungen der Planeten für den Fall, dass die mittlere Bewegung etc.“

Von M. Brendel.

In Nr. 3312 der A. N. zieht Herr Weiler einige Citate aus meiner Erwiderung auf das Referat über die Abhandlung »Om användningar etc.« (Vierteljahrsschrift Jahrg. 25 Heft 3 und Jahrg. 26 Heft 1) heran, und bestreitet deren Richtigkeit, ohne jedoch irgend einen Beweis beizubringen. Obwohl hiermit bereits erledigte Streitfragen wieder ans Tageslicht gezogen werden, so mögen doch die folgenden Bemerkungen hier Platz finden.

Man kann offenbar die wahre Länge v eines Planeten durch folgende Relation ausdrücken:

$$v = A + nt + U \quad (1)$$

wo A und n Constanten sind und wo U eine Reihe trigonometrischer Glieder darstellt, also rein periodisch ist, während sonst über diese Function keine Voraussetzung gemacht werden soll. A ist der Werth der Differenz $v - U$ zur Anfangszeit $t = 0$, und n wird man die mittlere Bewegung nennen. Bewegt sich der Planet in einer ungestörten Ellipse, so setzt sich die Function U aus einer Reihe von Gliedern zusammen, die mit der Excentricität multiplicirt sind und die uns hier nicht interessiren. Ist ein störender Körper vorhanden, so werden in U auch die gesammten periodischen Störungsglieder enthalten sein.

Ich nehme nun an, dass man nach irgend einer beliebigen Methode einen Theil von U ermittelt habe, den ich mit U_0 bezeichne, während man den Rest $U_1 = U - U_0$ vernachlässigen will. Ueber die Grösse und Form dieses Restes wollen wir einige Betrachtungen anstellen. Man wird setzen können:

$$U_1 = \sum \alpha_n \sin(\lambda_n t + B_n) \quad (2)$$

wo α_n , λ_n und B_n Constante sein sollen.

Will man dahin gelangen, die Länge v für einen unbeschränkten Zeitraum so genau zu bestimmen, dass der Fehler eine gewisse Grösse ε nicht überschreitet, so wird man nothwendig haben müssen für die Summe der absoluten Beträge der Coefficienten α_n

$$\sum |\alpha_n| < \varepsilon$$

eine Bedingung, die die absolute Convergenz der Reihe (2) voraussetzt. Selbst wenn man diese Convergenz als vorhanden annehmen wollte, so bliebe doch noch immer die schwierige Frage nach der Grösse der Summe dieser Reihe zu untersuchen: man wird sich einstweilen damit begnügen müssen, die absoluten Beträge $|\alpha_n|$ der einzelnen Glieder