Bemerkung über pseudosphärische Mannigfaltigkeiten von drei Dimensionen.

Von

A. BRILL in Tübingen.

Bekanntlich zieht die Transformirbarkeit einer Form des Linien-elementes in eine andere die Gleichheit gewisser in den Coefficienten der Differentialien gebildeten Ausdrücke nach sich, welche hierdurch die Bedeutung von Invarianten für die vorzunehmende Transformation erlangen. Für das Linienelement einer Fläche ist ein solcher Ausdruck der, welcher das Krümmungsmass in einem Punkte der Fläche darstellt, ferner derjenige für die geodätische Krümmung einer auf derselben gezogenen Linie u. A. m. Von den Herren Christoffel und Lipschitz wurden Methoden zur Herstellung solcher Invarianten auch für eine grössere Anzahl von Variabeln angegeben. In expliciter Form hat Herr Suworoff, dem Falle von drei Variabeln entsprechend, drei solche Ausdrücke aufgestellt, welche, auf das Linienelement des Raumes*) von constantem negativen Krümmungsmass angewandt, einen merkwürdigen Schluss zu ziehen gestatten.

Herr Suworoff findet als Ergebniss einer längeren Rechnung (die in dem in Darboux's Bulletin des Sc. math. 1. Sér. T. 4, 1873 enthaltenen Auszuge nur angedeutet ist) Folgendes:

Wenn der Ausdruck für das Linienelement:

$$ds^2 = a_{11}dx_1^2 + 2a_{12}dx_1dx_2 + \dots + a_{33}dx_3^2$$

durch Transformation der Variabeln x_1, x_2, x_3 in die neuen X_1, X_2, X_3 die Form erhält:

$$ds^2 = A_{11}dX_1^2 + 2A_{12}dX_1dX_2 + \dots + A_{33}dX_3^2,$$

so gehen die Ausdrücke:

*) Ich bezeichne mit dem Worte „Raum“ eine Mannigfaltigkeit von drei Dimensionen, gleichviel, ob sie (in dem Sinne von Riemann) „eben“ ist, oder nicht; wie man ja auch das Wort „Fläche“ in uneigentlichem Sinne auf krumme Gebilde überträgt.

$$(I) = \frac{1}{\omega} \sum_p \sum_{p'} a_{pp'} v_{pp'},$$

$$(II) = \frac{1}{\omega^2} \sum_p \sum_{p'} \omega_{pp'} (v_{qq} v_{rr} - v_{qr} v_{rq}), \quad \left. \begin{matrix} p, q, r \\ p', q', r' \end{matrix} \right\} = 1, 2, 3,$$

$$(III) = \frac{1}{\omega^2} \sum \pm v_{1p} v_{2q} v_{3r}$$

in die entsprechenden^{*}, gebildet in den A_{ik} , $X_1 X_2 X_3$, über. Hier bedeuten q, r die Reste der Division von $p+1, p+2$ durch 3; $\sum \pm$ ist eine Determinante. Setzt man ferner zur Abkürzung:

$$a_{hk}^\alpha = \frac{\partial a_{hk}}{\partial x_\alpha}; \quad a_{hk}^{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 a_{hk}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta},$$

$$\left[\begin{matrix} mn \\ i \end{matrix} \right] = a_{mi}^n - a_{mn}^i + a_{ni}^m;$$

$$\omega = \sum \pm a_{11} a_{22} a_{33}; \quad \omega_{hk} = \frac{\partial \omega}{\partial a_{hk}},$$

so ist:

$$2v_{im} = a_{im}^{mn} - a_{in}^{mn} - a_{nn}^{im} - a_{in}^{mm} \\ - \sum_\sigma \sum_\rho \frac{\omega_{\rho\sigma}}{2\omega} \left\{ \left[\begin{matrix} ln \\ \sigma \end{matrix} \right] \left[\begin{matrix} mn \\ \rho \end{matrix} \right] - \left[\begin{matrix} nn \\ \sigma \end{matrix} \right] \left[\begin{matrix} ml \\ \rho \end{matrix} \right] \right\},$$

$$2v_{ii} = 2a_{nn}^{mn} - a_{nn}^{nn} - a_{nn}^{mm} - \sum_\sigma \sum_\rho \frac{\omega_{\rho\sigma}}{2\omega} \left\{ \left[\begin{matrix} mm \\ \sigma \end{matrix} \right] \left[\begin{matrix} nn \\ \rho \end{matrix} \right] - \left[\begin{matrix} mn \\ \sigma \end{matrix} \right] \left[\begin{matrix} mn \\ \rho \end{matrix} \right] \right\}.$$

Ebenso nun, wie der Ausdruck für das Krümmungsmass einer Fläche eine greifbare Bedeutung erst erhält, wenn man in den Raum übergeht, wo sich Normalen u. s. w. construiren lassen, so kann man die Frage stellen nach der geometrischen Bedeutung der Invarianten (I), (II), (III) in einem Raume, der durch eine Gleichung zwischen vier Variablen $x y z t$ aus einer ebenen Mannigfaltigkeit von vier Dimensionen ausgeschieden wird.

Sei:

$$f(x y z t) = 0$$

diese Gleichung, so lässt sich, ähnlich wie man bei Aufstellung der indicatorischen Linie für einen Punkt einer Fläche verfährt, durch Entwicklung der Variablen t nach aufsteigenden Potenzen von x, y, z , Verlegung des betrachteten Raumpunktes in den Ursprung und Drehung des Coordinatensystems, der Nachweis führen, dass in jedem Punkte drei zu einander senkrechte Hauptkrümmungsrichtungen existiren, für welche die Krümmungshalbmesser $R_1 R_2 R_3$ der zugehörigen ebenen

Schnittcurven mit denen eines „parabolischen“ Raumes 2. Ordnung übereinstimmt, dessen Gleichung ist:

$$2t = \frac{x^2}{R_1} + \frac{y^2}{R_2} + \frac{z^2}{R_3}.$$

Anstatt für den gegebenen Raum bilde man nun jene Invarianten für diesen Osculationsraum in der Nähe des Ursprungs des Coordinatensystems. Man hat für das Linienelement desselben:

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 + dt^2 \\ &= dx^2 + dy^2 + dz^2 + \frac{2}{R_2 R_3} yz dy dz + \frac{2}{R_3 R_1} zx dz dx \\ &\quad + \frac{2}{R_1 R_2} xy dx dy, \end{aligned}$$

wo x^2, y^2, z^2 als sehr kleine Grössen gegen die Einheit vernachlässigt wurden. Berechnet man nun, unter der nämlichen Annahme, hieraus die oben mit v_{im}, v_{ii} bezeichneten 6 Grössen, und setzt dieselben in die Ausdrücke (I), (II), (III) ein, so erhält man die folgenden Werthe:

$$\begin{aligned} (I) &= \frac{1}{R_2 R_3} + \frac{1}{R_3 R_1} + \frac{1}{R_1 R_2}, \\ (II) &= \frac{1}{R_1^2 R_2 R_3} + \frac{1}{R_2^2 R_3 R_1} + \frac{1}{R_3^2 R_1 R_2}, \\ (III) &= \frac{1}{R_1^2 R_2^2 R_3^2}. \end{aligned}$$

Der Ausdruck (III) hat also einen wesentlich positiven Werth in jedem Punkte eines Raumes, der aus einer ebenen Mannigfaltigkeit von vier Dimensionen durch eine Gleichung ausgeschieden werden kann. Diese Bemerkung hat auch Suworoff gemacht, aber er zieht daraus nicht den naheliegenden und doch wichtigen Schluss, dass es hiernach unmöglich ist, solche Räume, für welche, vermöge der eigenthümlichen Beschaffenheit ihres Linienelementes, die Invariante (III) eine wesentlich negative Grösse wird, aus einem ebenen Raume von vier Dimensionen durch eine Gleichung zwischen vier Variabeln auszusondern.

Insbesondere gilt diess für Räume von constantem negativem Krümmungsmass, für welche, aus der bekannten Form des Linienelementes:

$$(A) \quad ds^2 = \frac{d\xi_1^2 + d\xi_2^2 + d\xi_3^2}{\left[1 - \frac{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}{4R^2}\right]^2}$$

sofort folgt:

$$(I) = -\frac{3}{R^2}; \quad (II) = \frac{3}{R^4}; \quad (III) = -\frac{1}{R^6}.$$

Die Umkehrung des Vorzeichens von R^2 würde die Grösse (III) zu einer positiven machen, wie denn in der That ein Raum von constanter positiver Krümmung durch eine Gleichung zwischen den vier Coordinaten einer ebenen Mannigfaltigkeit:

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = R^2$$

darstellbar ist. — Andererseits steht nichts im Wege, anzunehmen, dass ein pseudosphärischer Raum durch zwei Gleichungen aus einer ebenen Mannigfaltigkeit von fünf Dimensionen ausgeschieden werden kann. In der That, sind x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 die fünf Coordinaten, so leisten diess die Gleichungen:

$$x_1 = \frac{\cos(Ry_1)}{y}; \quad x_2 = \frac{\sin(Ry_1)}{y};$$

$$x_3 = \frac{\cos(Ry_2)}{y}; \quad x_4 = \frac{\sin(Ry_2)}{y};$$

$$x_5 = - \int dy \frac{\sqrt{R^2 y^2 - 2}}{y^2},$$

welche, reelle Werthe der unabhängig Veränderlichen vorausgesetzt, für $y > \frac{\sqrt{2}}{R}$ reelle Werthe der Coordinaten ergeben, und aus denen folgt:

$$ds^2 = dx_1^2 + \dots + dx_5^2 = R^2 \cdot \frac{dy^2 + dy_1^2 + dy_2^2}{y^2},$$

eine Form des Linienelementes, die bekanntlich auf die (A) für den pseudosphärischen Raum transformirbar ist. Man kann diese Form des Linienelementes durch die Formeln:

$$y = \frac{\eta}{\eta^2 + \eta_1^2 + \eta_2^2}; \quad y_1 = \frac{\eta_1}{\eta^2 + \eta_1^2 + \eta_2^2}; \quad y_2 = \frac{\eta_2}{\eta^2 + \eta_1^2 + \eta_2^2}$$

in sich selbst überführen. Es erledigt sich hierdurch ein früher von Herrn R. Beez bezüglich der Verbiegbarkeit solcher Räume erhobenes Bedenken (vgl. Schlömilch's Journal, Bd. XXI, S. 377) und zwar in demjenigen Sinne, wie ich es in einer Besprechung seines Aufsatzes (Jahrbuch für die Fortschritte der Mathematik, Bd. 9, S. 513) vorausgesagt hatte und wie es die Untersuchungen des Herrn Monro (Proceed. London Math. Society, 9. Bd.) andererseits bestätigt haben.

Tübingen, im Juni 1885.