Ein paar allgemeine metrische Sätze für algebraische Curven*).

Von ELLING HOLST in Christiania.

Bekanntlich hat die sogenannte *Hesse'sche Normalform* der Gleichung einer geraden Linie

$$\frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$$

die Eigenschaft, dass die linke Seite, durch Einsetzen der Coordinaten eines willkürlichen Punktes, unmittelbar die senkrechte Entfernung dieses Punktes von der Geraden darstellt.

Eine analoge Normalform kann ganz allgemein für jede algebraische ebene Curve aufgestellt werden, wie ich zeigen werde**).

Sei

$$(1) \quad F(x, y) = 0$$

die Gleichung einer algebraischen Curve n^{ter} Ordnung und

$$\begin{aligned} A_1 x^n + A_2 x^{n-1} y + \dots + A_n x y^{n-1} + A_{n+1} y^n \\ = A_1 (x + \alpha_1 y) (x + \alpha_2 y) \dots (x + \alpha_n y) = \mathfrak{A}(x, y) \end{aligned}$$

der Inbegriff der in ihr enthaltenen Terme der n^{ten} Dimension. So soll als *Normalform der Gleichung* (1) die folgende bezeichnet werden:

$$\begin{aligned} (2) \quad F_N(x, y) &= \frac{F(x, y)}{A_1 \sqrt{(1 + \alpha_1^2)(1 + \alpha_2^2) \dots (1 + \alpha_n^2)}} = \frac{F(x, y)}{\sqrt{\mathfrak{A}(1, i) \cdot \mathfrak{A}(1, -i)}} \\ &= \frac{F(x, y)}{\sqrt{(A_1 - A_3 + A_5 + \dots)^2 + (A_2 - A_4 + A_6 - \dots)^2}} = 0. \end{aligned}$$

Die Glieder höchster Dimension können bei ihr in folgende Form gesetzt werden:

$$(\sin u_1 \cdot x + \cos u_1 \cdot y) (\sin u_2 \cdot x + \cos u_2 \cdot y) \dots (\sin u_n \cdot x + \cos u_n \cdot y);$$

*) Eine vollständigere Entwicklung wird im norwegischen „Archiv for Matematik og Naturvidenskaber“ erscheinen.

**) Ich habe verschiedene Punkte mit meinem hochgeehrten Freunde Herrn L. Sylow besprochen.

umgekehrt, wenn bei einer Gleichung die Glieder höchster Dimension in dieser Gestalt erscheinen, so hat die Gleichung die Normalform. Von dieser normirten Gleichung werde ich nun beweisen:

Wenn man in die linke Seite der Normalform die Coordinaten eines willkürlichen Punktes der Ebene einsetzt, so ist der entstehende Ausdruck gleich dem Producte der Längen derjenigen Normalen, die von dem Punkte auf die Curve gefällt werden können, dividirt durch das Product der Entfernungen, welche die reellen Brennpunkte der Curve von dem angenommenen Punkte besitzen.

Ist die Classe der Curve m , so ist die Anzahl der von einem beliebigen Punkte ausgehenden Normalen bekanntlich $n+m$. Es mögen α, β die Coordinaten des willkürlichen Punktes, x_i, y_i die Coordinaten der Fusspunkte der von ihm fällbaren Normalen bedeuten. Dann ist das Product der Normalen — unter Normale die Entfernung des Punktes (α, β) vom Normalenfusspunkte verstanden —:

$$P_N = \sqrt{[(\alpha - x_1)^2 + (\beta - y_1)^2] \cdot [(\alpha - x_2)^2 + (\beta - y_2)^2] \cdots [(\alpha - x_{n+m})^2 + (\beta - y_{n+m})^2]}.$$

Dieses Product verzhwindet nur, wenn einer seiner Factoren verzhwindet:

$$(\alpha - x_i)^2 + (\beta - y_i)^2 = 0;$$

das aber geschieht auf zwei wesentlich verschiedene Weisen; nämlich

1) wenn

$$\alpha = x_i, \quad \beta = y_i,$$

d. h. wenn

$$F(\alpha, \beta) = 0$$

2) wenn

$$(\alpha - x_i) \pm i(\beta - y_i) = 0,$$

also, wenn (α, β) so gegeben ist, dass eine der Normalen durch einen der zwei unendlich fernen Kreispunkte geht, in welchem Falle diese Normale auch beliebig als Tangente angesehen werden kann und durch einen der reellen Brennpunkte hindurchgeht. Wenn die letzteren mit ξ_i, η_i bezeichnet werden ($i=1, 2, \dots m$), erhält man somit, weil P_N nur für

$$F(\alpha, \beta) = 0$$

und für

$$(\alpha - \xi_i) \pm i(\beta - \eta_i) = 0$$

verschwindet und im Allgemeinen nur für unendliche Werthe von α und β unendlich wird:

$$P_N = k[F(\alpha, \beta)]^p$$

$$\{[(\alpha - \xi_1)^2 + (\beta - \eta_1)^2] \cdot [(\alpha - \xi_2)^2 + (\beta - \eta_2)^2] \cdots [(\alpha - \xi_m)^2 + (\beta - \eta_m)^2]\}^q,$$

wo k eine von α, β unabhängige Constante, p und q näher zu bestimmende Exponenten sind, die der Gleichung genügen:

$$m + n = pn + 2qm.$$

Man findet leicht, z. B. durch eine Reihenentwicklung, $p = 1$, woraus $q = \frac{1}{2}$, und die Formel wird:

$$P_N = k \cdot F(\alpha, \beta) \cdot P_B,$$

wenn man das Product aller Entfernungen des Punktes (α, β) von den reellen Brennpunkten P_B nennt.

Um k zu bestimmen lasse man (α, β) in einer willkürlichen Richtung, die nur nicht mit der Richtung einer Asymptote zusammenfällt, unendlich weit rücken. Von den Normalen nähern sich jetzt n den n Perpendikeln, welche von (α, β) auf die Asymptoten gefällt werden können; das Product der m übrigen Normalen nähert sich dem Producte P_B , in $F(\alpha, \beta)$ endlich kommen (immer mehr) nur die Glieder höchster Dimension in Betracht. So findet man

$$(3) \quad k = \frac{1}{\sqrt{(A_1 - A_3 + A_5 - \dots)^2 + (A_2 - A_4 + A_6 - \dots)^2}}$$

und somit die zu beweisende Formel:

$$(4) \quad F_N(\alpha, \beta) = \frac{P_N}{P_B}.$$

Das doppelte Vorzeichen, welches k nach (3) haben kann, findet seine Erklärung darin, dass P_N allemal sein Vorzeichen ändert, wenn $F(\alpha, \beta)$ den Werth Null überschreitet; das Zeichen hat also die Bedeutung, dass es die Punkte (α, β) unterscheidet, welche auf der einen oder anderen Seite der Curve liegt. Die imaginären Factoren in P_N kommen paarweise conjugirt vor und haben also keinen Einfluss auf das Zeichen, in Bezug auf welches auch P_B ganz indifferent ist.

Die Formel (4), die ich jetzt so schreiben will

$$(5) \quad P_N = F_N(\alpha, \beta) \cdot P_B,$$

kann nun noch folgendermassen verallgemeinert werden.

Man kann, in bekannter Weise, auf der Curve F , resp. auf allen Zügen derselben eine Bewegungsrichtung als positiv festsetzen. Zieht man nun durch (α, β) alle diejenigen Geraden, welche die Curve unter demselben Winkel Θ schneiden, dieses Θ von der positiven Bewegungsrichtung aus in positivem Sinne herumgerechnet, so ist die Anzahl solcher Geraden, für jedes Θ , $n + m$. Das Product der Strecken (Θ -Strecken), welche auf diesen Geraden von (α, β) und bez. dem ausgezeichneten Schnittpunkte*) mit F begrenzt werden, jede Strecke mit ihrem Vorzeichen genommen**), sei P_Θ . Man findet dann:

$$(6) \quad P'_\Theta = \frac{F_N(\alpha, \beta) \cdot P_B}{\sin^n \Theta} = P_{\pi - \Theta}.$$

*) Ein solcher Punkt soll ein Θ -Punkt genannt werden.

**) Dasselbe ist nach der nämlichen Regel zu bestimmen, wie das Vorzeichen der Normale.

Für $\Theta = \frac{\pi}{2}$ geht diese Formel in Formel (5) über. Für $\Theta = 0$ erhält man auf der rechten Seite ∞^n . In der That werden auf der linken Seite n der Θ -Strecken unendlich gross, diejenigen nämlich, die sich von (α, β) bis zu den unendlich fernen Punkten der Curve F erstrecken. Um die Formel in diesem Falle in bestimmter Weise umzuändern, ist nur nöthig, in (6) mit $\sin^n \Theta$ hinüberzumultipliciren. Dann kann man $P_0 \sin^n \Theta$ betrachten als ein Product, gebildet aus m beliebigen Θ -Strecken und den n Entfernungen des Punktes (α, β) von den n Tangenten in den n übrigen Θ -Punkten. Wenn sich jetzt Θ der Null nähert und man lässt diese n Θ -Punkte eben diejenigen sein, welche auf den Asymptoten zweigen der Curve ins Unendliche rücken, so kommt:

$$P_T \cdot P_A = F_N(\alpha, \beta) \cdot P_B.$$

wo P_T das Product der Längen der Tangenten ist, die vom Punkte (α, β) an die Curve gehen, P_A das Product der Entfernungen des Punktes (α, β) von den Asymptoten. Man hat also für das Product der Tangenten:

$$(7) \quad P_T = \frac{F_N(\alpha, \beta) \cdot P_B}{P_A}.$$

Man bemerkt, dass F_N und P_A durch denselben Factor k in die Normalform gebracht sind, insofern in F_N und P_A die Glieder höchster Dimension übereinstimmen. Hält man nur an dieser Uebereinstimmung fest, so kann man in (7) von der strengen Normalform absehen. Weiter sieht man, dass P_T sein Zeichen ändert, sowohl wenn (α, β) die Curve als wenn es eine der Asymptoten überschreitet (jede Tangentenrichtung ist dabei entweder im Sinne der auf der Curve angenommenen Bewegungsrichtung oder im entgegengesetzten zu nehmen). Man hat also hier ein neues Mittel, um das betr. auf alle Züge ausgedehnte Richtungsgesetz zu untersuchen und zu controliren.

Aus (5), (6), (7) zieht man noch folgende Formel, die allgemein für algebraische Curven gilt:

$$(8) \quad P_N = P_0 \cdot \sin^n \Theta = P_T \cdot P_A.$$

— Die hier entwickelten Sätze, die zu mehreren ähnlichen Anlass geben und ein gewisses Licht verbreiten über die Bedeutung der Anzahl $n + m$ der Θ -Strecken, werden für besondere Curven unbestimmt, nämlich für diejenigen, welche die unendlich ferne Gerade berühren oder dieselbe in den Kreispunkten schneiden, resp. berühren. Für solche Curven geben die meisten unserer Formeln $\infty = \infty$.

Was die ersteren betrifft, so wird eine Parabel, als ein Typus derselben, sowohl die Frage als die Lösung illustriren. Es wird bei ihr P_0 (resp. P_N) unendlich (∞^1), indem der Berührungspunkt mit den unendlich fernen Geraden ein Θ -Fusspunkt ist; gleichzeitig wird aber

P_B unendlich (∞^1), indem derselbe Punkt auch als ein Brennpunkt auftritt. Die Formeln (5) und (6) behalten also im Wesentlichen ihre Bedeutung; man hat die P auf die *im Endlichen gelegenen* Θ -Fusspunkte und Brennpunkte zu beschränken. Für die Formel (7) gilt es dagegen, das Verhältniss zwischen dem einen unendlich grossen Factor in P_B und dem unendlich grossen Nenner P_A zu suchen. Wenn man die Parabel ($y^2 - 2px = 0$) als Grenzübergang zwischen Hyperbel und Ellipse betrachtet, findet man das betr. Verhältniss $= -\frac{2}{p}$ und desshalb:

$$P_T = -\frac{2 F_N(\alpha, \beta) \cdot B}{p},$$

wo B die Entfernung des Punktes (α, β) von dem im Endlichen befindlichen Brennpunkte ist — eine Formel, die man leicht controlirt.

Hat nun eine Curve n^{ter} Ordnung r einfache (gewöhnliche) Asymptoten und s parabolische Bögen, wo $r + 2s = n$, so ist ihre Gleichung von der Form:

$$F_N(x, y) = A_1 A_2 \cdots A_r (B_1^2 - 2p_1 C_1) (B_2^2 - 2p_2 C_2) \cdots (B_s^2 - 2p_s C_s) \\ + f_{n-2}(x, y) = 0,$$

wo $A_i = 0$, $B_i = 0$, $C_i = 0$ Gerade vorstellen, die in der Normalform gegeben sind. Dann wird:

$$P_T = (-2)^s \cdot \frac{F_N(\alpha, \beta) \cdot P_{B(m-s)}}{A_1 A_2 \cdots A_r \cdot p_1 p_2 \cdots p_s},$$

einfach analog mit der Parabel.

Ist die unendlich ferne Gerade *Inflexionstangente* (ein- oder mehrfach), so treten auf ähnliche Weise Formeln auf, die zuerst bei den Curven dritter Ordnung, die diese Singularitäten besitzen, zum Vorschein kommen etc.

Als Typus für Curven, die durch die Kreispunkte gehen, mag der Kreis selbst gewählt werden. Bekanntlich hat der Kreis eine Art Normalform unmittelbar, wenn die Coefficienten von x^2 und y^2 gleich 1 sind. Unsere Formel (3) giebt dagegen $k = \frac{1}{1-1} = \infty$. Formel (6) nimmt (den Mittelpunkt des Kreises als Anfangspunkt genommen) die Gestalt an:

$$P_0 = \frac{F(\alpha, \beta)}{1-1} \cdot \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\sin^2 \Theta}.$$

Wenn man nun überlegt, dass die Strecken, die von (α, β) nach den Kreispunkten laufen, als zwei von den vier Θ -Strecken anzusehen sind, und bemerkt, dass dieselben in gewissem Sinne die Werthe besitzen*):

*) Wenn die Tangente im Θ -Fusspunkte ist:

$$Ax + By + C = 0,$$

$$\frac{1}{\sin \Theta} \cdot \frac{\alpha + i\beta}{\sqrt{1-1}}, \quad \frac{1}{\sin \Theta} \cdot \frac{\alpha - i\beta}{\sqrt{1-1}},$$

so bekommt man für das Product der beiden *endlichen* Θ -Strecken

$$P = F(\alpha, \beta).$$

Analoges gilt für höhere Curven. — Curven, die sowohl allgemeine als Kreisasympoten besitzen, bieten ebenfalls keine wesentlichen Schwierigkeiten.

Als eine bemerkenswerthe Eigenschaft dieser Art von Sätzen erscheint namentlich die Fähigkeit der Formeln (5) und (6), sich immer auf das endliche Gebiet beschränken zu lassen. — Dass die Sätze eine Reihe bekannter Wahrheiten als Corollare in sich schliessen, braucht kaum erwähnt zu werden.

Auch im Raume gelten ähnliche Normalformen. Näheres hierüber verspare ich für eine spätere Gelegenheit.

Christiania im December 1876.

so ist die Θ -Strecke des Punktes (α, β) durch

$$\frac{A\alpha + B\beta + C}{\sin \Theta \cdot \sqrt{A^2 + B^2}}$$

bestimmt; für die nach den Kreispunkten hingehenden Θ -Strecken erhält man somit

$$\frac{\alpha \pm i\beta}{\sin \Theta \cdot \sqrt{1-1}}.$$