**IX. Ueber die Spannung flüssiger Lamellen;
von Hrn. G. Van der Mensbrugghe.**

(Uebersandt vom Hrn. Verf. aus d. *Bull. de l'acad. roy. de Belgique, Sér. II, T. XXIII*.)

Zweiter Aufsatz.

In meiner ersten Arbeit über die Spannung flüssiger Lamellen ¹⁾ gab ich die Gesetze, welchen die Curve genügen muß, die ein biegsamer unausdehnbarer und gewichtsloser Faden annimmt, wenn er an seinem Umfang alleinig von der Contractionskraft einer im Gleichgewicht befindlichen flüssigen Lamelle ergriffen wird. Das eine dieser Gesetze besteht, wie man sich erinnern wird, darin, daß der Krümmungsradius derselbe ist in allen Punkten der besagten Linie. Andererseits fällt die osculirende Ebene überall mit der Tangentialebene der Laminarfläche zusammen. Combinirt man nun diese beiden Eigenschaften, so gelangt man zu einer sehr wichtigen, schon von Hrn. Lamarle bezeichneten Folgerung ²⁾. Gesetzt nämlich, man lege durch eine Tangente der Curve den normalen Schnitt der Fläche. Dem Meusnier'schen Theorem zu Folge hat irgend ein schiefer Schnitt, der durch dieselbe Tangente geht, einen Krümmungsradius, der gleich ist der Projection des Krümmungsradius des normalen Schnitts auf die Ebene des schiefen Schnitts. Wenn man dieses Theorem auf den durch die osculirende Ebene der Curve gelegten Schnitt anwendet, so findet man, daß der normale Schnitt nothwendig einen unendlichen Krümmungsradius haben muß.

Daraus folgt, daß die von dem biegsamen Faden auf den flüssigen Lamellen beschriebenen Curven genau diejenigen sind, welche Hr. Dupin *asymptotische Linien* genannt hat ³⁾ und Hr. Michael Roberts mit dem Namen *Erzeu-*

1) Siehe *Annalen* Bd. CXXXIII, S. 277.

2) Siehe den Bericht des Hrn. Lamarle über meine erste Arbeit (*Bull. de l'acad. de Belg. Sér. II, T. XXII, p. 272.*)

3) *Développements de géometrie* p. 189.

gende Linien (*génératrices*) belegt¹⁾. Hier bietet sich eine interessante Frage dar, welche den Gegenstand der vorliegenden Arbeit bilden wird, nämlich die zu untersuchen, ob die Eigenschaften der Linien des Spannungsgleichgewichts sich vereinbaren lassen mit der Natur der Minimumfläche, mit welcher man operirt.

Bekanntlich können, nach Monge, die Flächen mit nullgleicher Mittelkrümmung vorgestellt werden durch die Gesamtheit der drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} x &= u + v & y &= \varphi(u) + \psi(v) \\ z &= V - 1 \left[\int \sqrt{1 + [\varphi'(u)]^2} du + \int \sqrt{1 + [\psi'(v)]^2} dv \right] \end{aligned} \quad (1)$$

wo $\varphi(u)$, $\psi(v)$ irgend welche Functionen der willkürlichen Größen u und v sind. Andererseits hat man für die allgemeine Gleichung der auf Minimumflächen gezogenen asymptotischen Linien (siehe die Abhandl. des Hrn. Roberts)

$$\frac{\varphi''}{\sqrt{1 + \varphi'^2}} du^2 = \frac{\psi''}{\sqrt{1 + \psi'^2}} dv^2 \quad . \quad . \quad (2)$$

φ' und ψ' , φ'' und ψ'' bezeichnen die ersten und zweiten Derivirten der Functionen $\varphi(u)$ und $\psi(v)$. Es handelt sich nun darum zu sehen, ob in jedem besonderen Fall die durch die Gleichung (2) repräsentirten Curven eine gleiche Krümmung in allen ihren Punkten haben oder nicht. Im ersten Fall kann der Faden sich auf die betrachtete Laminarfläche legen, ohne eine Entstaltung derselben zu bewirken; im zweiten Fall dagegen wird er sich nicht auf der Oberfläche halten können, oder, wenn es der Fall ist, wird die Fläche nothwendigerweise verändert werden.

1. Ebene Fläche.

Setzen wir $\varphi'' = 0$, $\psi'' = 0$, so finden wir, nach Elimination von u und v aus den Gleichungen (1), ein Resultat von der Form

$$z = Ax + By + C$$

1) Sur les surfaces dont les rayons de courbure sont égaux mais dirigés en sens opposés (*Journ. de Liouville*, T. XI, p. 302).

folglich ist die Minimumfläche alsdann eine Ebene; da die Krümmung der von dem Faden beschriebenen Curve constant seyn muß, so wird dieser immer eine Kreisgestalt annehmen; dafs dies richtig sey, habe ich durch zahlreiche Versuche in meiner ersten Arbeit bewiesen.

2. Helicoide mit Richtebene (*Hélicoïde gauche à plan directeur*).

Bestimmen wir zweitens die Functionen φ und ψ , indem wir nehmen

$$\varphi(u) = \sqrt{1-u^2} \sqrt{1+u^2}$$

$$\psi(v) = \sqrt{1-v^2} \sqrt{1+v^2}$$

so geben die Gleichungen (1) bekanntlich:

$$z = -\text{arc. tang. } \frac{x}{y}$$

und repräsentiren folglich eine Helicoïde mit Richtebene. Was die Gleichung (2) betrifft, so wird sie:

$$\frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \pm \frac{dv}{\sqrt{1+v^2}}$$

Um diese Differentialgleichung leicht zu integriren, setzen wir $u = \sqrt{1-u^2} \sin \lambda$, $v = \sqrt{1-v^2} \sin \mu$, und haben sonach

$$x = \sqrt{1-u^2} [\sin \lambda + \sin \mu]$$

$$y = \sqrt{1-u^2} [\cos \lambda + \cos \mu]$$

$$z = -(\lambda + \mu)$$

$$d\lambda = \pm d\mu.$$

Nimmt man das Zeichen $-$, so hat man $\lambda + \mu = -z = \text{const.}$ Man erhält sonach alle geradlinigen Generatrices der Helicoïde. Nimmt man dagegen das Zeichen $+$, so findet man

$$\lambda - \mu = C$$

$$x^2 + y^2 = -4 \cos^2 \left(\frac{\lambda - \mu}{2} \right) = -4 \cos^2 \frac{C}{2}$$

Macht man $C = \pi + 2\alpha$, so findet man:

$$x^2 + y^2 = (e^\alpha - e^{-\alpha})^2$$

eine Formel, welche, aufser der Axe der Helicoïde, die Gesamtheit aller Schraubenlinien von gleichem Gang, die

man auf der Fläche ziehen kann, repräsentirt; andererseits weiß man, daß die Schraubenlinie eine constante Krümmung hat. Daraus folgt, daß die Linien des Spannungsgleichgewichts auf der Helicoïde mit Richtebeue sind: die geradlinigen Generatrices, die Axe und die Schraubenlinie von gleichem Gang mit der leitenden Schraubenlinie (*hélice directrice*)¹⁾.

Um diese theoretischen Deductionen auf die Probe der Erfahrung zu stellen, verwirklichte ich die besagte Fläche im Laminarzustand. Bei Anwendung eines allgemeinen Princip, welches er in einer seiner Abhandlungen gegeben, hat Hr. Plateau vor langer Zeit diese Verwirklichung ausgeführt²⁾ und in einer noch nicht veröffentlichten Arbeit dargelegt; er war so gut, mich zu ermächtigen, sie hier zu gebrauchen und zu beschreiben. Man construirt aus Eisendraht eine Schraubenlinie, die einen Gang von etwa 30^{mm} hat und zu einem Cylinder von 45^{mm} Radius gehört (Fig. 21, Taf. III). Im Allgemeinen kann man dieser Schraubenlinie eine beliebige Anzahl von Gängen geben, allein für unseren Zweck ist es besser, sich mit einem Gang zu begnügen. Die Enden dieser Linie verbindet man durch gerade Eisendrähte mit einem anderen geraden Draht, der als Axe der Schraubenlinie dient, und einen Fortsatz hat, mittelst dessen das Gerippe sich leicht in die Glycerinflüssigkeit tauchen läßt. Klar ist, daß wir solchergestalt einen geschlossenen Umriss (Fig. 21), welcher zu einer Helicoïde gehört, dargestellt haben. Nach dem Princip des Hrn. Plateau muß man an dem aus der Flüssigkeit herausgezogenen Gerippe eine helicoïdale Lamelle erhalten, und dieß bestätigt auch die Beobachtung in allen Punkten.

Da die Bewahrheitung der Theorie im gegenwärtigen Fall etwas feine Versuche erfordert, so glaubte ich auf den Gebrauch von Seiden- oder Baumwollenfäden verzichten zu müssen, denn das Gewicht dieser Fäden, vereint mit dem

1) Dieß Resultat findet sich schon in dem erwähnten Bericht des Hrn. Lamarle angegeben.

2) *Recherches etc. Ser. VII*, letzten Paragraph (*Mémoires de l'acad. T. XXXVI.*) (Diese Ann. Bd. 130, S. 264.)

der Flüssigkeit, welche sie immer einsaugen, ist zu bedeutend, als daß man davon ganz absehen könnte; wenn sich also in der Form einer Laminarfläche eine Veränderung ergäbe, so würde man sie immer, ganz oder zum Theil, der störenden Wirkung des Gewichtes des getränkten Fadens zuschreiben können. Deshalb gebrauchte ich Baumwollenfäden, deren Gewicht ganz zu vernachlässigen war; zwar sind dieselben nicht unausdehnbar, allein man kann mit sehr geringen Längen operiren.

Ich gehe nun zur Beschreibung der Versuche. Zuvörderst ist es mir nicht geglückt, die geradlinigen Generatrices der Helicoïde darzustellen. Wenn ich, nachdem ein Baumwollenfaden nach einer dieser Generatrices ausgespannt worden, die Laminarfläche darstellte, und das Stück der Lamelle auf der einen oder anderen Seite des Fadens zum Platzen brachte, so beschrieb dieser immer, statt einer geraden, eine gegen die Außenseite der Lamelle concave Linie. Diefß muß so seyn. Ist nämlich m (Fig. 22, Taf. III) ein Punkt des als gerade vorausgesetzten Fadens ab , so wird dieser Punkt offenbar von drei Kräften sollicitirt, von den beiden gleichen und entgegengesetzten Spannungen des Fadens und von der gegen ab winkelrechten Resultante mr aller Elementar-Actionen der Spannung der Flüssigkeit auf m . Nun ist klar, daß diese Kräfte sich niemals das Gleichgewicht halten können, es sey denn, die beiden ersteren wären unendlich. Da es nun unmöglich ist, diese Bedingung zu erfüllen und der Faden überdiefß nicht unausdehnbar ist, so müssen die beiden in m auslaufenden Elemente sich nothwendig gegen die Lamelle beugen. Dasselbe findet in allen Punkten des biegsamen Fadens statt, und folglich muß die erhaltene Curve concav seyn gegen das Außere der Figur, wie ich es auch immer beobachtet habe.

Dieselbe Schlusssfolge zeigt auch, daß jede Gleichgewichtslinie, die ein biegsamer Faden darstellt und die eine Laminarfläche partiell begränzt, ihre Concavität nach Außen kehrt. Die Gleichgewichtscurven, welche dieser Bedingung gentigen, sind also die einzigen realisirbaren. Darauf hat man bei

den Versuchen, um die es hier sich handelt, immer Rücksicht zu nehmen.

Ich komme nun zu der Darstellung einer Gleichgewichts-Schraubenlinie, in den Fällen, wo der Versuch allen Einschränkungen der Theorie entspricht. Ich verfähre folgendermaßen. Ich beginne damit, die Länge einer Schraubenwindung zu suchen, welche auf einem Cylinder von z. B. 6^{mm} Radius gezogen wäre und denselben Gang hätte wie die leitende Schraubenlinie (*hélice directrice*) des von mir angewandten Gerippes (dieser Gang, gemessen mit dem Kathetometer, beträgt 31^{mm},1). Die Länge, um die es sich handelt, ist also gleich der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen zwei andere Seiten respective sind $\pi \times 12^{\text{mm}}$ und 31^{mm},1 d. h. gleich 48^{mm},9. Ich nehme also einen Baumwollenfaden, der, wenn er mit Glycerinflüssigkeit getränkt ist, möglichst genau diese Länge habe. Mittelst ein wenig Wachs befestige ich die beiden Enden auf 6^{mm} von der Axe, in zwei Punkten der starren Drähte, welche die äußersten Generatrices der Helicoïde vorstellen. Bei dieser Operation muß man sorgfältig darauf sehen, das zweite Ende des Fadens nicht eher zu befestigen, als bis man diesen eine ganze Umdrehung um die solide Axe in dem von der Richtung der leitenden Schraubenlinie vorgezeichneten Sinn hat machen lassen. Dann tauche ich das Geripp in Glycerinflüssigkeit, ziehe es heraus und erhalte so eine helicoïdale Lamelle, auf welcher der Baumwollenfaden schwimmt. Hierauf zerreiße ich, mittelst einer Spitze aus Filtrirpapier, den zwischen der Axe und dem Baumwollenfaden liegenden Theil der Laminarfläche, damit die Concavität der erhaltenen Curve auswärts der Lamelle sey. Sogleich äußert sich die Spannung der Flüssigkeit längs dem ganzen Faden und dieser krümmt sich einer Schraubenlinie gemäß, die vollkommen das Ansehen der Fig. 21, Taf. III hat.

Um zu erfahren, ob bei dieser Operation der übrig bleibende Theil der Fläche verändert worden, befestigte ich den Stiel des Gerippes an einem Gestell, und bevor ich die Lamelle zerriß und dadurch eine Schraubenlinie hervor-

brachte, stellte ich eine Kerzenflamme in solcher Weise auf, daß ich durch Reflexion der Strahlen an einem 7 bis 8^{mm} von der Axe entfernten Punkt der Fläche ein helles Bild im Brennpunkt des Fernrohrs eines Kathetometers erhielt. Sobald dies Bild genau im Centrum des Fadenkreuzes war, liefs ich wie zuvor die Schraubenlinie entstehen und beobachtete abermals das Bild der Flamme; ich fand, daß es verschoben war, aber um eine kaum merkliche Gröfse. Diese geringe Entstellung erklärt sich, glaube ich, sehr gut durch die schwache Ausdehnbarkeit des Fadens, welche die Regelmäßigkeit der Curve stört. Wenn man dagegen eins der Enden des Fadens auch nur wenig der Axe nähert oder von ihr entfernt, ohne das andere Ende zu berühren, so erleidet das Bild der Flamme sogleich eine beträchtliche Verschiebung, was klar beweist, daß alsdann die Lamelle eine sehr beträchtliche Entstellung erleidet. Ich schliesse daraus, daß die einzigen Curven des Spannungsgleichgewichts, welche sich auf der Helicoïde mit Richtebeng sehr nahe darstellen lassen, die Schraubenlinien auf Cylindern sind, deren gemeinschaftliche Axe zusammenfällt mit der der in Rede stehenden Fläche.

Ich habe hier zwei Bemerkungen zu machen. Zunächst nehme ich den Einfallspunkt der von der Flamme ausgehenden Strahlen bei 7 oder 8^{mm} von der Axe, d. h. in unmittelbarer Nähe der dargestellten Schraubenlinie, damit ich, nach dem Zerreißen des zwischen der Axe und dem Faden liegenden Stücks der Lamelle, die eingetretene Entstellung besser beobachten kann. Diese Vorsicht ist nothwendig, denn wie ich weiterhin zeigen werde, ist die Veränderung der Figur desto stärker, je mehr man sich dem Baumwollenfaden nähert. Wenn man, statt das zwischen der Axe und dem biegsamen Faden liegende Stück der Lamelle zu sprengen, dasjenige zerreißt, welches zwischen dem Faden und der leitenden Schraubenlinie liegt, so sieht man den Faden plötzlich längs der Axe der Figur zurückgeworfen. Dies rührt offenbar davon her, daß die Tendenz, welche die rückständige Lamelle besitzt, die kleinst mögliche Fläche

darzubieten, sich dann frei äufsern kann, bis zum Moment, wo diese Fläche vernichtet ist.

Nach dem Studium der Linien, welche von Baumwollenfäden, deren Enden an zwei Punkten des Gerippes befestigt sind, erzeugt werden, kann man sich die Aufgabe stellen, in einer helicoïdalen Lamelle eine Oeffnung entstehen zu lassen, die durch einen Faden von geschlossenem Umriss begrenzt sey. Der Versuch gelingt immer, wenn der Faden nicht zu lang ist, nur stellt dann die Lamelle keine Helicoïde dar, wovon man sich leicht durch den oben beschriebenen Proceß überzeugen kann. Man findet auf dieselbe Weise, dafs die Entstellung der Lamelle desto ausgesprochener ist, als die Oeffnung sich in Portionen von stärkeren Krümmungen befindet. Ich fragte mich, ob die Lamelle nicht ein gröfseres Areal erlange, in dem Maafse sie tiefer verändert wird, und demgemäfs nicht einen mit dieser Vergröfserung der Fläche wachsenden Widerstand entgegensetzt, in dem Maafse als diese sich mehr entferne von der Gestalt des ursprünglichen stabilen Gleichgewichts. Diese Voraussicht hat sich durch folgenden Versuch auf eine recht sonderbare Weise bestätigt. Man lege auf die helicoïdale Lamelle einen Baumwollenfaden von 50 bis 60^{'''} Länge, dessen Enden man verknüpft hat. Nachdem man die Lamelle im Innern dieses Umrisses gesprengt hat, kann man den Faden, vermöge seines Gewichts auf allen Theilen der Fläche, herumführen, bis auf die Nähe der Axe der Helicoïde. Zwar kann man den Faden gezwungen auch in diese Portion der Lamelle einführen; allein so wie man ihn losläfst, entfernt er sich ungeachtet seines Gewichts lebhaft von der Axe und biegt sich nach den Portionen von schwächerer Krümmung.

3. Catenoïde.

Wenn man, als dritte Hypothese, $\varphi(u) = \sqrt{1 - u^2}$ und $\psi(v) = \sqrt{1 - v^2}$, so stellen die Gleichungen (1) bekanntlich eine Catenoïde vor und die asymptotischen Linien werden gegeben durch die Relation :

$$r = \frac{a}{2} (e^{\omega-x} + e^{-\omega+x})$$

worin r und ω Petorcoordinaten bezeichnen und α eine willkürliche Constante ist.

Nach einer allgemeinen, von Hrn. Roberts bewiesenen Eigenschaft schneiden nun diese Linien die Meridiancurven der Catenoïde unter 45° ¹⁾. Folglich sind es helicoidale Curven, deren Schraubengänge desto breiter sind als sie sich weiter vom Hohlkehlekreise (*cercle de gorge*) entfernen. Sie können daher nicht in allen Punkten denselben Krümmungsradius haben²⁾ und sind folglich keine Curven des Spannungsgleichgewichts. Um dieses Resultat durch directe Beobachtung zu bewahrheiten, bediene ich mich wieder der beiden, in meinem ersten Aufsatz beschriebenen Ringe. Sie halten 70^{mm} im Durchmesser; der obere ist mit einer Gabel versehen, der untere wird von einem Dreifuß getragen. Gesetzt der Abstand dieser Ringe sey 40^{mm}, so suche ich die Länge des von dem einen zum andern gezogenen Stücks der asymptotischen Linie. Dazu reicht es hin, die Länge

- 1) Siehe die Abhandlung des Hrn. Michael Roberts, p. 312. Diese Eigenschaft erlaubt unmittelbar die obige Gleichung zu erhalten. Denn einerseits wird die meridiane Kettenlinie repräsentirt durch die Relation:

$$v = \frac{1}{2}a \left(e^{\frac{z}{a}} + e^{-\frac{z}{a}} \right);$$

und andererseits wird die Gleichung der Trajectorie, die in jedem Punkt einen Winkel von 45° mit der Meridianlinie bildet, gegeben durch die Formel:

$$d\omega = \frac{dz}{r} \sqrt{1 + \left(\frac{dr}{dz} \right)^2} = \frac{dz}{a}$$

woraus:

$$\omega = \frac{z}{a} + \alpha \text{ und } r = \frac{a}{2} (e^{\omega-x} + e^{-\omega+x}).$$

(Siehe die Abhandlung des Abbé Aoust: *Sur les trajectoires qui coupent sous un angle constant les courbes méridiennes des surfaces de révolution* (Journ. de Liouville, T. XI, p. 184).

- 2) In dem schon erwähnten Bericht giebt Hr. Lamarle für den Werth dieses Krümmungsradius: $T/2$, worin T der Theil der Tangente des Meridians von dem betrachteten Punkt bis zur Umdrehungsaxe ist,

des zwischen denselben Ringen liegenden Stücks der meridianen Kettenlinie zu dividiren durch den Cosinus von 45° ¹⁾. So erhalte ich für die gesuchte Länge sehr nahe 63^{mm} . Andererseits ist es leicht zu finden, daß die Meridian-Ebenen, welche durch die Enden dieses Stücks der asymptotischen Linie gehen, einen Winkel von etwa 86° mit einander machen.

Dieses gesetzt, mache ich den Versuch wie folgt. Ich befestige den mit Gabel versehenen Ring an einem Gestell und zwar recht horizontal, darunter setze ich den mit Dreifuß versehenen Ring auf eine horizontale Glastafel, solcher-gestalt, daß der lothrechte Abstand zwischen beiden Ringen, gezählt von der Mitte der Dicke eines jeden Drahts, 40^{mm} betrage. Hierauf befestige ich einen 63^{mm} langen und mit Glycerinflüssigkeit getränkten Faden durch etwas Wachs mit einem Ende an einem Punkt des oberen Ringes, und mit dem anderen an einem Punkt des unteren. Alsdann befestige ich die Enden eines zweiten ebenso langen Baumwollenfadens an zwei Punkten, die von den ersteren 10^{mm} entfernt sind und auf derselben Seite wie diese liegen. Dieses gethan, bringe ich den unteren Ring fast in Berührung mit dem oberen, und fülle den kleinen Zwischenraum, welcher beide trennt, mit Glycerinflüssigkeit aus. Dann lasse ich vorsichtig den mit Dreifuß versehenen Ring hinunter, darauf achtend, daß die Fäden gänzlich in der sich bildenden catenoidalen Lamelle liegen. Wenn der Ring auf die Glastafel steht, messe ich mittelst eines horizontalen Kathetometers den Durchmesser des Hohlkehlkreises der Lamelle. Hierauf nähere ich diesen Ring bis auf 20^{mm} dem oberen, sprengte die zwischen den Baumwollenfäden befindliche Lamelle, und lasse den unteren Ring sehr langsam wieder auf die Tafel hinab. Ich drehe ihn um die Axe der Figur so, daß zwischen den Azimuten der Befestigungspunkte eines jeden der beiden Fäden ein Winkelabstand von 86° hergestellt sey. In diesem Augenblick bilden die Fäden zwei Curven von gleicher Gestalt, aber umgekehrter Lage. So

1) Siehe die ebenerwähnte Abhandlung des Hrn. Aout.

weit das Auge es zu beurtheilen vermag, haben diese Curven in allen Punkten eine gleiche Krümmung (Fig. 23 Taf. III). Allein nun ist die Lamelle keine Catenoïde mehr. Um sich davon zu überzeugen, braucht man nur die Breite der Hohlkehllinie der neuen Gestalt zu messen. Ich fand, dafs diese Breite, die übrigens nach den Azimuten verschieden ist, zwei Mllm. gröfser seyn kann, als der Durchmesser des Kreises der ursprünglichen Hohlkehle. Die Fläche ist also merklich verschieden von einer Catenoïde ¹⁾.

Es erübrigt nun noch zu wissen, ob die Entstellung, welche man an einer Lamelle nach dem Zerreißen einer von dem biegsamen Faden begränzten Portion beobachtet, blofs local ist oder sich auf die ganze Fläche erstreckt. Um mich darüber aufzuklären, machte ich folgende Versuche. Ich verknüpfte die Enden eines benähten Baumwollenfadens zu einem geschlossenen Umfang von 92^{mm} Länge und legte ihn auf eine catenoidale Lamelle, deren Hohlkehlkreis einen Durchmesser von 54^{mm},6 ergeben hatte. Nachdem ich die Lamelle innerhalb des Baumwollenfadens zerrissen hatte, sah ich, dafs er sich nach einer windschiefen Curve anordnete, deren einer Theil sich der Linie der Hohlkehle sehr näherte. Ich brachte dann die Symmetrie-Ebene dieser Curve successive in verschiedene Azimute, und notirte, nach einer Messung mit dem horizontalen Kathetometer, die Breite der Linie, die in der Ebene des ursprünglichen Hohlkehlkreises lag. So erhielt ich folgende Resultate. Das Azimut α der Symmetrie-Ebene der Curve ist gezählt abwärts von der lothrechten Ebene, welche durch die Axe des Kathetometerferrohrs geht, und l bezeichnet die entsprechende Breite

- 1) Wenn ich in meinem ersten Aufsatz sagte, dafs durch die Gegenwart eines Fadens, welcher der Spannung einer catenoidalen Lamelle ausgesetzt sey, die Fläche nicht verändert zu werden scheine, so rührte dies daher, dafs ich keine genauen Messungen machte. Wenn ich übrigens eine Entstellung beobachtet hätte, so würde ich sie, wenigstens theilweis, dem Gewicht des benähten Seidenfadens zugeschrieben haben.

α	l	α	l
0°	54 ^{mm} ,80	100°	55 ^{mm} ,15
45	54 ,95	135	54 ,90
80	55 ,25	180	54 ,75.

Diese Zahlen zeigen deutlich, daß die Entstellung der catenoidalen Fläche sehr bedeutend ist in der unmittelbaren Nähe des Fadens und daß sie desto geringer wird als man sich von diesem Faden mehr entfernt. Dies stimmt auch vollkommen mit den schon bei der windschiefen Helicoïde beschriebenen Versuchen.

Daraus folgt, daß durch das Zerreißen einer von dem biegsamen Faden begränzten Portion der Lamelle eine neue Minimumfläche entsteht, deren Natur sich allen vorhin angegebenen Gleichgewichtsbedingungen anschmiegt und die, bei einem mehr oder weniger großen Abstände, mit der ursprünglichen Fläche zusammenfällt.

Ich hätte sehr gewünscht, die experimentelle Probe auch auf andere Flächen von nullgleicher Mittelkrümmung anwenden zu können; allein die außerordentliche Complication der Rechnungen hat mich daran gehindert. Defsungeachtet, glaube ich, erlauben die vorhin studirten Beispiele folgende Schlüsse aufzustellen.

Jedesmal, wenn man eine vom biegsamen Faden ganz oder theilweis begränzte Portion der Lamelle zerreißt, wird die ursprüngliche Fläche der Lamelle bedeutend verändert, sobald die asymptotischen Linien nicht in allen Punkten gleiche Krümmung haben. Diese Veränderung findet selbst in dem Falle statt, daß man sucht, diesen Faden mit einer asymptotischen Linie in Coïncidenz zu bringen.

Wenn dagegen die asymptotischen Linien überall denselben Krümmungshalbmesser haben und überdies der Faden sich nach ihrer Richtung biegen kann, so erleidet die Lamelle nur eine sehr schwache Entstellung, die alleinig davon herzurühren scheint, daß der Faden, als nicht unausdehnbar, der Spannung etwas nachgiebt und nicht mehr genau mit einer asymptotischen Linie zusammenfällt.

In allen Fällen beschreibt der Faden eine Curve de-

ren Krümmungshalbmesser, dem Ansehen nach, in allen Punkten derselbe zu seyn scheint.

Zum Schlusse dieses Aufsatzes sey es mir noch erlaubt, einen recht sonderbaren Spannungseffect der flüssigen Lamellen zu beschreiben.

In einem mit Gabel versehenen Ring bildet man eine ebene Lamelle und stellt ihn senkrecht auf (Fig. 24 Taf. V). Hierauf nimmt man eine Hohlkugel von sehr dünnem Glase, 8 bis 12^{mm} im Durchmesser haltend und 10 bis 20 Mllgr. schwer, benetzt sie mit Glycerinflüssigkeit und bringt sie sanft mit dem unteren Theil der Lamelle in Berührung; diese rückt sogleich auf Seite der Kugel vor und bildet eine krumme Fläche, welche sich einerseits auf einem Theil des Ringes stützt, und andererseits auf einen kleinen Kreis der Kugel, parallel der Ebene dieses Ringes. Wenn man das Centrum der Kugel sanft gegen diese Ebene verschiebt, so benäht die Lamelle die Kugel längs einer mehr oder weniger großen Circumferenz, welche zuletzt zur Circumferenz eines großen Kreises wird. Läßt man nun die Kugel auf dem Drahttring ruhen und überläßt sie sich selbst, so bleibt sie vollkommen in Gleichgewicht (Fig. 24). Man kann den Ring rasch um seine Axe drehen, ohne daß die Lamelle platzt und ohne daß die Hohlkugel sich von ihr ablöst.

Ist die Kugel, statt sphärisch, ellipsoïdisch, so sieht man immer das Ellipsoïd sich drehen bis zum Moment, wo es von der Ebene der Lamelle geschnitten wird nach seinem Maximum-Schnitt, welcher, nachdem er einmal in die Lamelle eingetreten ist, beständig darin bleibt, wenn man auch den Ring rasch rotiren läßt. Die von mir angewandte ellipsoïdische Kugel hielt 15^{mm} im kleinsten und 20^{mm} im größten Durchmesser.

Denselben Versuch wiederholte ich mit der helicoïdalen Lamelle. Die Kugel ruhte auf einem Punkt der eisernen Schraubenlinie, welche sie ihrer ganzen Länge nach durchlaufen konnte, ohne die Lamelle zu verlassen, wenn ich die horizontal gehaltene Axe der Fläche sich drehen liefs.

Die Laminarfläche endigte dann an der Kugel in einer windschiefen Curve.

Die Erklärung der eben beschriebenen Effecte ist, glaube ich, folgende. So wie die ebene Lamelle die Kugel berührt, endigt sie an dieser in einem Durchschnitt, dessen Areal die Verringerung der Fläche dieser Lamelle ausdrückt. Da diese in allen Punkten der Contractionskraft der Flüssigkeit ausgesetzt ist, so strebt sie darnach so klein wie möglich zu werden, und dies geschieht genau, wenn der in die Ebene des Ringes eingetretene Durchschnitt *acb* (Fig. 24) ein Maximum ist, dann ist das Gleichgewicht vollkommen stabil. Das Phänomen erklärt sich auf dieselbe Weise bei einer helicoidalen Lamelle; nur ist die Curve des Durchschnitts der Kugel- und Lamellenfläche dann eine windschiefe Curve.

**X. Ueber die chemische Harmonica;
von Hrn. A. Terquem,**

Prof. d. Physik an der Fakultät zu Straßburg.

(*Compt. rend. T. LXVI, p. 1037.*)

Die Tonbildung in der chemischen Harmonica hat ungeachtet der vielen Arbeiten über diesen Gegenstand noch keine genügende Erklärung erhalten. Die annehmlichste Theorie ist die, welche Prof. Schrötter vor mehr als zehn Jahren gegeben hat ¹⁾. Nach ihm führt der Luftstrom, der in der tönenden Röhre durch die Verbrennung des Gases erzeugt wird, dies letztere mit sich und bedingt einen rascheren Ausfluß aus dem Entwicklungsrohr. Daraus entsteht eine Druckverminderung in dem das Gas erzeugenden Apparat und in Folge dessen wird das Gas einige Augenblicke in der Ableitungsröhre zurückgedrängt, bis es, fortdauernd zur Mündung gelangend, den ursprünglichen Druck wieder

1) Sitzungsberichte d. Wien. Akad. Bd. XXIV (1857) S. 18. (P.)