Zur Krümmungstheorie der Curvenschaaren.

Von

R. v. LILIENTHAL in Santiago de Chile.

Die folgenden Untersuchungen, welche ich als Fortsetzung meiner Arbeit „Ueber die Krümmung der Curvenschaaren“ (diese Annalen Bd. 32, S. 545) zu betrachten bitte, beziehen sich auf die unbeschränkte Veränderlichkeit der drei unabhängigen Variabeln, während in der genannten Arbeit jene Veränderlichkeit an die Bedingung des Fortschreitens in der Normalebene einer Curve der Schaar an der betrachteten Stelle geknüpft war. Hierdurch treten weitere geometrische Invarianten auf, welche in der Theorie der geradlinigen Strahlensysteme nicht vorkommen, die aber die Transformation einer reellen Differentialform von drei Variabeln in Bezug auf die Curvenschaar in der Art ermöglichen, dass die Integrabilitätsbedingungen der Form die Differentialgleichungen zwischen den geometrischen Invarianten der Curvenschaar in einfachster Weise bilden lassen.

Nach der Transformation der Lamé'schen Differentialparameter in Bezug auf die Curvenschaar ist ein besonderer Paragraph den Beziehungen der Curvenschaar zur Einheitskugel gewidmet. Dort stellt sich der reciproke Quotient aus dem Querschnitt eines Tangentenbündels und dem parallelen Kugeloberflächenelement als Invariante des Quadrats des durch die Curvenschaar bestimmten Linearelements heraus. Den Schluss der Untersuchungen bilden Folgerungen für die Flächentheorie.

§ 1.

Einführung geometrischer Invarianten.

Wir betrachten die beiden Punkte (u, v, w) und

$$\left(u + \frac{\partial u}{\partial r} dr, \quad v + \frac{\partial v}{\partial r} dr, \quad w + \frac{\partial w}{\partial r} dr\right),$$

welche bei constantem p und q einem Werthe von r und seinem benachbarten entsprechen. Durch den ersten der beiden Punkte gehen

die Geraden $(\kappa_1, \lambda_1, \mu_1)$ und $(\kappa_2, \lambda_2, \mu_2)$ — Tangenten der Krümmungslinien — und durch den zweiten die Geraden $(\kappa_1 + \frac{\partial \kappa_1}{\partial r} dr, \dots)$ und $(\kappa_2 + \frac{\partial \kappa_2}{\partial r} dr, \dots)$. Bezeichnet man in Bezug auf den Punkt (u, v, w) die Abscisse des Punktes P_1 , in welchem die Projection der Geraden $(\kappa_1 + \frac{\partial \kappa_1}{\partial r} dr, \dots)$ auf die durch $(\kappa_1, \lambda_1, \mu_1)$ und (ξ, η, ζ) gehende Ebene die Gerade $(\kappa_1, \lambda_1, \mu_1)$ trifft, mit P_1 , so wird:

$$P_1 = - \frac{\sqrt{a_{33}}}{\sum \xi \frac{\partial \kappa_1}{\partial r}}.$$

Der kürzeste Abstand der beiden Geraden $(\kappa_1, \lambda_1, \mu_1)$ und $(\kappa_1 + \frac{\partial \kappa_1}{\partial r} dr, \dots)$ treffe die erstere in einem Punkte, dessen Abscisse in Bezug auf den Punkt (u, v, w) P_1' sei. Man hat dann:

$$P_1' = - \frac{\sqrt{a_{33}} \cdot \sum \xi \frac{\partial \kappa_1}{\partial r}}{\sum (\frac{\partial \kappa_1}{\partial r})^2}.$$

Bei analogen Bezeichnungen hinsichtlich der Geraden $(\kappa_2, \lambda_2, \mu_2)$ und $(\kappa_2 + \frac{\partial \kappa_2}{\partial r} dr, \dots)$ folgt:

$$P_2 = - \frac{\sqrt{a_{33}}}{\sum \xi \frac{\partial \kappa_2}{\partial r}}, \quad P_2' = - \frac{\sqrt{a_{33}} \cdot \sum \xi \frac{\partial \kappa_2}{\partial r}}{\sum (\frac{\partial \kappa_2}{\partial r})^2}.$$

Nimmt man eine beliebige durch den Punkt (u, v, w) gehende Normale der betrachteten Curve, welche mit der Geraden $(\kappa_1, \lambda_1, \mu_1)$ den Winkel α bilden möge, so entspricht ihr eine durch den Punkt $(u + \frac{\partial u}{\partial r} dr, \dots)$ gehende Normale, welche zum selben Verhältniss $\frac{dq}{dp}$ gehört. Die Projection der letzteren auf die durch die erstere und die Gerade (ξ, η, ζ) gehende Ebene schneide die erstere Normale in einem Punkt P , dessen Abscisse in Bezug auf den Punkt (u, v, w) P sei. Es ist dann:

$$\frac{1}{P} = \frac{\cos \alpha}{P_1} + \frac{\sin \alpha}{P_2}.$$

Somit liegen die Punkte P auf der durch P_1 und P_2 gehenden Geraden. Letztere ist die Krümmungsaxe der Curve für den betrachteten Punkt, und der Radius der ersten Krümmung erhält den Werth:

$$\varrho = \frac{P_1 P_2}{\sqrt{P_1^2 + P_2^2}}.$$

Aus dem Gleichungssysteme:

$$\sum \xi \frac{\partial \xi}{\partial r} = 0, \quad \sum \kappa_1 \frac{\partial \xi}{\partial r} = \frac{\sqrt{a_{33}}}{P_1}, \quad \sum \kappa_2 \frac{\partial \xi}{\partial r} = \frac{\sqrt{a_{33}}}{P_2}$$

erhält man:

$$\frac{\frac{\partial \xi}{\partial r}}{\sqrt{a_{33}}} = \frac{\kappa_1}{P_1} + \frac{\kappa_2}{P_2}.$$

Den Ausdruck: $\sum \kappa_2 \frac{\partial \kappa_1}{\partial r}$ wollen wir mit $\sqrt{a_{33}} \cdot \vartheta_0$ bezeichnen.

Dann ergibt sich aus dem System:

$$\sum \xi \frac{\partial \kappa_1}{\partial r} = -\frac{\sqrt{a_{33}}}{P_1}, \quad \sum \kappa_1 \frac{\partial \kappa_1}{\partial r} = 0, \quad \sum \kappa_2 \frac{\partial \kappa_1}{\partial r} = \sqrt{a_{33}} \cdot \vartheta_0$$

die Folgerung:

$$\frac{\frac{\partial \kappa_1}{\partial r}}{\sqrt{a_{33}}} = -\frac{\xi}{P_1} + \kappa_2 \vartheta_0,$$

und analog:

$$\frac{\frac{\partial \kappa_2}{\partial r}}{\sqrt{a_{33}}} = -\frac{\xi}{P_2} - \kappa_2 \vartheta_0.$$

Die Grösse ϑ_0 spielt eine wichtige Rolle in der Theorie der Curvenschaaren. Es ist zunächst:

$$\vartheta_0^2 = \frac{1}{P_1} \left(\frac{1}{P_1'} - \frac{1}{P_1} \right) = \frac{1}{P_2} \left(\frac{1}{P_2'} - \frac{1}{P_2} \right).$$

Ferner hat der kürzeste Abstand der beiden Geraden $(\kappa_1, \lambda_1, \mu_1)$ und $(\kappa_1 + \frac{\partial \kappa_1}{\partial r} dr, \dots)$ den Werth:

$$\frac{\vartheta_0 \sqrt{a_{33}} dr}{\sqrt{\frac{1}{P_1^2} + \vartheta_0^2}},$$

und der kürzeste Abstand der beiden Geraden $(\kappa_2, \lambda_2, \mu_2)$ und $(\kappa_2 + \frac{\partial \kappa_2}{\partial r} dr, \dots)$ den Werth:

$$\frac{\vartheta_0 \sqrt{a_{33}} dr}{\sqrt{\frac{1}{P_2^2} + \vartheta_0^2}}.$$

Daher besagt das Verschwinden von ϑ_0 , dass die Tangenten der Krümmungslinien längs einer Curve der Schaar zwei abwickelbare Flächen bilden. Verschwindet ϑ_0 in der Weise, dass P_1 und P_2 unendlich grosse Werthe annehmen, so geht die Curvenschaar in ein Strahlensystem über und die genannten abwickelbaren Flächen werden Ebenen.

Als Bedingung dafür, dass die betrachtete Curve ($p = \text{const}, q = \text{const}$) eben ist, erhält man:

$$\frac{\partial}{\partial r} \arctan \frac{P_2}{P_1} = \sqrt{a_{33}} \vartheta_0.$$

§ 2.

Transformationen in Bezug auf eine Curvenschaar.

Es sei eine lineare Differentialform:

$$W = F_1 du + F_2 dv + F_3 dw$$

gegeben, in welcher F_1, F_2, F_3 reguläre Functionen von u, v, w bedeuten. Wir wollen sie in Bezug auf eine Curvenschaar transformiren, die entsteht wenn u, v, w als Functionen von p, q, r und p, q als Parameter betrachtet werden.

Man hat:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial p} &= u_p + \frac{\partial u}{\partial r} \frac{a_{13}}{a_{33}}, \\ \frac{\partial u}{\partial q} &= u_q + \frac{\partial u}{\partial r} \frac{a_{23}}{a_{33}}, \end{aligned}$$

sodass

$$du = \delta u + \xi \frac{a_{13} dp + a_{23} dq + a_{33} dr}{\sqrt{a_{33}}}$$

wird.

Wenn wir nun:

$$\mathfrak{S}_0 = \frac{a_{13} dp + a_{23} dq + a_{33} dr}{\sqrt{a_{33}}}$$

setzen, so folgt:

$$du = \kappa_1 \mathfrak{S}_1 + \kappa_2 \mathfrak{S}_2 + \xi \mathfrak{S}_0.$$

Wird ferner:

$$\begin{aligned} f_1 &= \kappa_1 F_1 + \lambda_1 F_2 + \mu_1 F_3, \\ f_2 &= \kappa_2 F_1 + \lambda_2 F_2 + \mu_2 F_3, \\ f_0 &= \xi F_1 + \eta F_2 + \zeta F_3, \end{aligned}$$

genommen, so entsteht die Gleichung:

$$W = f_1 \mathfrak{S}_1 + f_2 \mathfrak{S}_2 + f_0 \mathfrak{S}_0.$$

In zweiter Linie haben wir nöthig, die Ableitungen einer Function F von u, v, w in Bezug auf die Curvenschaar zu transformiren, was auf die Transformation der Ableitungen von p, q, r nach u, v, w hinauskommt. Es ist:

$$\begin{aligned} J \frac{\partial p}{\partial u} &= \frac{\partial v}{\partial q} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial q} = \frac{\partial w}{\partial r} \left(\frac{\partial v}{\partial q} - \frac{a_{23}}{a_{33}} \frac{\partial v}{\partial r} \right) - \frac{\partial v}{\partial r} \left(\frac{\partial w}{\partial q} - \frac{a_{23}}{a_{33}} \frac{\partial w}{\partial r} \right) \\ &= \sqrt{a_{33}} \cdot \{ \xi v_q - \eta w_q \}, \end{aligned}$$

wo J den Werth der Determinante:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial p} & \frac{\partial u}{\partial q} & \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial v}{\partial p} & \frac{\partial v}{\partial q} & \frac{\partial v}{\partial r} \\ \frac{\partial w}{\partial p} & \frac{\partial w}{\partial q} & \frac{\partial w}{\partial r} \end{vmatrix}$$

bedeutet, für die wir den Ausdruck:

$$\delta_0(\sigma_1 \sigma_4 - \sigma_2 \sigma_3) \sqrt{a_{33}}$$

gefunden haben. (Diese Annalen Bd. 32, S. 552).

Da nun:

$$v_q = \lambda_1 \sigma_2 + \lambda_2 \sigma_4, \quad w_q = \mu_1 \sigma_2 + \mu_2 \sigma_4,$$

so kommt:

$$\frac{\partial p}{\partial u} = \frac{\kappa_1 \sigma_4 - \kappa_2 \sigma_2}{\sigma_1 \sigma_4 - \sigma_2 \sigma_3}.$$

Auf dieselbe Weise erhält man folgende Ausdrücke:

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial u} &= \frac{\kappa_2 \sigma_1 - \kappa_1 \sigma_3}{\sigma_1 \sigma_4 - \sigma_2 \sigma_3}, \\ \frac{\partial r}{\partial u} &= \frac{\xi}{\sqrt{a_{33}}} - \frac{a_{13}}{a_{33}} \frac{\partial p}{\partial u} - \frac{a_{23}}{a_{33}} \frac{\partial q}{\partial u}, \\ \frac{\partial p}{\partial v} &= \frac{\lambda_1 \sigma_4 - \lambda_2 \sigma_2}{\sigma_1 \sigma_4 - \sigma_2 \sigma_3}, \quad \frac{\partial q}{\partial v} = \frac{\lambda_2 \sigma_1 - \lambda_1 \sigma_3}{\sigma_1 \sigma_4 - \sigma_2 \sigma_3}, \\ \frac{\partial r}{\partial v} &= \frac{\eta}{\sqrt{a_{33}}} - \frac{a_{13}}{a_{33}} \frac{\partial p}{\partial v} - \frac{a_{23}}{a_{33}} \frac{\partial q}{\partial v}, \\ \frac{\partial p}{\partial w} &= \frac{\mu_1 \sigma_4 - \mu_2 \sigma_2}{\sigma_1 \sigma_4 - \sigma_2 \sigma_3}, \quad \frac{\partial q}{\partial w} = \frac{\mu_2 \sigma_1 - \mu_1 \sigma_3}{\sigma_1 \sigma_4 - \sigma_2 \sigma_3}, \\ \frac{\partial r}{\partial w} &= \frac{\xi}{\sqrt{a_{33}}} - \frac{a_{13}}{a_{33}} \frac{\partial p}{\partial w} - \frac{a_{23}}{a_{33}} \frac{\partial q}{\partial w}. \end{aligned}$$

Führen wir noch die Bezeichnungen ein:

$$F_p = \frac{\partial F}{\partial p} - \frac{a_{13}}{a_{33}} \frac{\partial F}{\partial r}, \quad F_q = \frac{\partial F}{\partial q} - \frac{a_{23}}{a_{33}} \frac{\partial F}{\partial r},$$

so ergibt sich:

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \kappa_1 \frac{\sigma_4 F_p - \sigma_3 F_q}{\sigma_1 \sigma_4 - \sigma_2 \sigma_3} + \kappa_2 \frac{\sigma_1 F_q - \sigma_2 F_p}{\sigma_1 \sigma_4 - \sigma_2 \sigma_3} + \xi \frac{\partial F}{\sqrt{a_{33}}}.$$

Die hier auftretenden Coefficienten von κ_1 , κ_2 , ξ wollen wir zur Abkürzung der Reihe nach gleich $g_1(F)$, $g_2(F)$, $g_0(F)$ setzen, sodass entsteht:

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial u} = \kappa_1 g_1(F) + \kappa_2 g_2(F) + \xi g_0(F), \\ \frac{\partial F}{\partial v} = \lambda_1 g_1(F) + \lambda_2 g_2(F) + \eta g_0(F), \\ \frac{\partial F}{\partial w} = \mu_1 g_1(F) + \mu_2 g_2(F) + \xi g_0(F), \\ dF = g_1(F) \mathfrak{S}_1 + g_2(F) \mathfrak{S}_2 + g_0(F) \mathfrak{S}_0, \end{cases}$$

wobei, wie noch bemerkt sein möge:

$$g_1(F) \mathfrak{S}_1 + g_2(F) \mathfrak{S}_2 = F_p dp + F_q dq$$

ist.

Die Functionen $g_1(F)$, $g_2(F)$, $g_0(F)$ besitzen die Eigenschaft, invariabel zu sein bei jeder Substitution, welche den geometrischen Charakter der Curvenschaar ungeändert lässt. Solche Substitution drückt die beiden Parameter p und q durch Functionen zweier neuer Parameter, die Variable r durch eine Function einer neuen Variablen aus.

Um die nöthigen Formeln zu entwickeln, setzen wir die Curvenschaar als in den Variablen p_1, q_1, r_1 gegeben voraus und betrachten dann p_1 und q_1 als Functionen der neuen Variablen p und q , sowie r_1 als Function der neuen Variablen r .

Die Grössen $\alpha_{\alpha\beta}$, $e_{\alpha\beta}$, σ_α in den alten Variablen wollen wir mit $\alpha'_{\alpha\beta}$, $e'_{\alpha\beta}$, σ'_α , die Grössen H, Ψ, τ, ψ in den alten Variablen mit $H_1, \Psi_1, \tau_1, \psi_1$ bezeichnen. Man erhält dann:

$$\begin{aligned} a_{13} &= \left(\alpha'_{13} \frac{\partial p_1}{\partial p} + \alpha'_{23} \frac{\partial q_1}{\partial p} \right) \frac{dr_1}{dr}, \\ a_{23} &= \left(\alpha'_{13} \frac{\partial p_1}{\partial q} + \alpha'_{23} \frac{\partial q_1}{\partial q} \right) \frac{dr_1}{dr}, \\ a_{33} &= \alpha'_{33} \left(\frac{dr_1}{dr} \right)^2. \end{aligned}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen der Reihe nach mit dp, dq, dr , so geht die Bedingung:

$$\alpha'_{13} dp_1 + \alpha'_{23} dq_1 + \alpha'_{33} dr_1 = 0,$$

da $\frac{dr_1}{dr}$ von Null verschieden sein muss, in die folgende über:

$$a_{13} dp + a_{23} dq + a_{33} dr = 0.$$

Nehmen wir nun irgend eine Function $f(p, q, r)$, so ist:

$$\begin{aligned} f_p &= \frac{\partial f}{\partial p} - \frac{a_{13}}{a_{33}} \frac{\partial f}{\partial r} \\ &= \frac{\partial f}{\partial p_1} \frac{\partial p_1}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial q_1} \frac{\partial q_1}{\partial p} - \frac{\alpha'_{13} \frac{\partial p_1}{\partial p} + \alpha'_{23} \frac{\partial q_1}{\partial p}}{\alpha'_{33}} \frac{\partial f}{\partial r_1} \end{aligned}$$

d. h. aber:

$$f_p = f_{p_1} \frac{\partial p_1}{\partial p} + f_{q_1} \frac{\partial q_1}{\partial p}.$$

Ebenso folgt:

$$f_q = f_{p_1} \frac{\partial p_1}{\partial q} + f_{q_1} \frac{\partial q_1}{\partial q}.$$

Setzt man f der Reihe nach gleich ξ, η, ζ , so erhält man:

$$\begin{aligned}
\sqrt{H} \cos \tau &= \sqrt{H_1} \cos \tau_1 \frac{\partial p_1}{\partial p} + \sqrt{\Psi_1} \cos (\tau_1 - \psi_1) \frac{\partial q_1}{\partial p}, \\
\sqrt{\Psi} \cos (\tau - \psi) &= \sqrt{H_1} \cos \tau_1 \frac{\partial p_1}{\partial q} + \sqrt{\Psi_1} \cos (\tau_1 - \psi_1) \frac{\partial q_1}{\partial q}, \\
\sqrt{H} \sin \tau &= \sqrt{H_1} \sin \tau_1 \frac{\partial p_1}{\partial p} + \sqrt{\Psi_1} \sin (\tau_1 - \psi_1) \frac{\partial q_1}{\partial p}, \\
\sqrt{\Psi} \sin (\tau - \psi) &= \sqrt{H_1} \sin \tau_1 \frac{\partial p_1}{\partial q} + \sqrt{\Psi_1} \sin (\tau_1 - \psi_1) \frac{\partial q_1}{\partial q}, \\
\sqrt{H} \sqrt{\Psi} \sin \psi &= \sqrt{H_1} \sqrt{\Psi_1} \sin \psi_1 \left(\frac{\partial p_1}{\partial p} \frac{\partial q_1}{\partial q} - \frac{\partial p_1}{\partial q} \frac{\partial q_1}{\partial p} \right).
\end{aligned}$$

Auf ähnliche Weise folgt:

$$\begin{aligned}
e_{11} &= e'_{11} \left(\frac{\partial p_1}{\partial p} \right)^2 + (e'_{12} + e'_{21}) \frac{\partial p_1}{\partial p} \frac{\partial q_1}{\partial p} + e'_{22} \left(\frac{\partial q_1}{\partial p} \right)^2, \\
e_{12} &= e'_{11} \frac{\partial p_1}{\partial q} \frac{\partial p_1}{\partial p} + e'_{12} \frac{\partial p_1}{\partial p} \frac{\partial q_1}{\partial q} + e'_{21} \frac{\partial p_1}{\partial q} \frac{\partial q_1}{\partial p} + e'_{22} \frac{\partial q_1}{\partial p} \frac{\partial q_1}{\partial q}, \\
e_{21} &= e'_{11} \frac{\partial p_1}{\partial p} \frac{\partial p_1}{\partial q} + e'_{12} \frac{\partial p_1}{\partial q} \frac{\partial q_1}{\partial p} + e'_{21} \frac{\partial p_1}{\partial p} \frac{\partial q_1}{\partial q} + e'_{22} \frac{\partial q_1}{\partial p} \frac{\partial q_1}{\partial q}, \\
e_{22} &= e'_{11} \left(\frac{\partial p_1}{\partial q} \right)^2 + (e'_{12} + e'_{21}) \frac{\partial p_1}{\partial q} \frac{\partial q_1}{\partial q} + e'_{22} \left(\frac{\partial q_1}{\partial q} \right)^2.
\end{aligned}$$

Mit Hülfe dieser Beziehungen ergeben sich die folgenden Transformationsformeln für die Ausdrücke σ_α :

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= \sigma'_1 \frac{\partial p_1}{\partial p} + \sigma'_2 \frac{\partial q_1}{\partial p}, & \sigma_2 &= \sigma'_1 \frac{\partial p_1}{\partial q} + \sigma'_2 \frac{\partial q_1}{\partial q}, \\
\sigma_3 &= \sigma'_3 \frac{\partial p_1}{\partial p} + \sigma'_4 \frac{\partial q_1}{\partial p}, & \sigma_4 &= \sigma'_3 \frac{\partial p_1}{\partial q} + \sigma'_4 \frac{\partial q_1}{\partial q},
\end{aligned}$$

welche die behauptete Invariabilität der Functionen $g_1(F)$, $g_2(F)$, $g_0(F)$ aufs leichteste erkennen lassen.

§ 3.

Anwendung des Vorhergehenden auf ξ , κ_1 , κ_2 ,

Man hat (diese Annalen Bd. 32, S. 550, 551, 559):

$$\begin{aligned}
\delta \xi &= \kappa_1 H_2 + \kappa_2 H_1, \\
\delta \kappa_1 &= \kappa_2 U - \xi H_2 = \kappa_2 \left(\frac{\mathfrak{S}_1}{R_1} - \frac{\mathfrak{S}_2}{R_2} \right) - \xi H_2, \\
\delta \kappa_2 &= -\kappa_1 U - \xi H_1 = -\kappa_1 \left(\frac{\mathfrak{S}_1}{R_1} - \frac{\mathfrak{S}_2}{R_2} \right) - \xi H_1.
\end{aligned}$$

Hier sind H_1 und H_2 durch $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ auszudrücken. Um dies zu vereinfachen, sei

$$\varepsilon_0 = \frac{e_0}{r_3 r_4 Q_\xi}$$

gesetzt. Es gilt dann, da:

$$e_0^2 = (r_3 r_4 - r_1 r_2) Q_\xi^2,$$

für die Grösse ε_0^2 zunächst die Beziehung:

$$\varepsilon_0^2 = \frac{1}{r_3 r_4} - \frac{1}{h_1 h_2}.$$

Ferner folgt aus den beiden ersten Gleichungen Bd. 32, S. 561 dieser Annalen:

$$\varepsilon_0 = \frac{R_1}{h_2} \left(\frac{1}{R''} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{R_2}{h_1} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R'} \right).$$

Nun wird:

$$\begin{aligned} H_1 &= \varepsilon_0 \mathfrak{S}_1 - \frac{\mathfrak{S}_2}{h_1}, \\ H_2 &= -\frac{\mathfrak{S}_1}{h_2} - \varepsilon_0 \mathfrak{S}_2 \end{aligned}$$

und damit:

$$\begin{aligned} \delta \xi &= \left(-\frac{\kappa_1}{h_2} + \kappa_2 \varepsilon_0 \right) \mathfrak{S}_1 + \left(-\kappa_1 \varepsilon_0 - \frac{\kappa_2}{h_1} \right) \mathfrak{S}_2, \\ \delta \kappa_1 &= \left(\frac{\kappa_2}{R_1} + \frac{\xi}{h_2} \right) \mathfrak{S}_1 + \left(-\frac{\kappa_2}{R_2} + \varepsilon_0 \xi \right) \mathfrak{S}_2, \\ \delta \kappa_2 &= \left(-\frac{\kappa_1}{R_1} - \xi \varepsilon_0 \right) \mathfrak{S}_1 + \left(\frac{\kappa_1}{R_2} + \frac{\xi}{h_1} \right) \mathfrak{S}_2. \end{aligned}$$

Mit Hülfe der im § 1 entwickelten Formeln erhalten wir dann:

$$\begin{aligned} d\xi &= \left(-\frac{\kappa_1}{h_2} + \kappa_2 \varepsilon_0 \right) \mathfrak{S}_1 + \left(-\kappa_1 \varepsilon_0 - \frac{\kappa_2}{h_1} \right) \mathfrak{S}_2 + \left(\frac{\kappa_1}{P_1} + \frac{\kappa_2}{P_2} \right) \mathfrak{S}_0, \\ d\kappa_1 &= \left(\frac{\kappa_2}{R_1} + \frac{\xi}{h_2} \right) \mathfrak{S}_1 + \left(-\frac{\kappa_2}{R_2} + \varepsilon_0 \xi \right) \mathfrak{S}_2 + \left(-\frac{\xi}{P_1} + \kappa_2 \vartheta_0 \right) \mathfrak{S}_0, \\ d\kappa_2 &= \left(-\frac{\kappa_1}{R_1} - \xi \varepsilon_0 \right) \mathfrak{S}_1 + \left(\frac{\kappa_1}{R_2} + \frac{\xi}{h_1} \right) \mathfrak{S}_2 + \left(-\frac{\xi}{P_2} - \kappa_1 \vartheta_0 \right) \mathfrak{S}_0, \end{aligned}$$

woraus sich die Ausdrücke für die Ableitungen von ξ , κ_1 , κ_2 etc. nach u , v , w unmittelbar ergeben. Dieselben liefern die Mittel, um die Beziehungen zwischen den Untersuchungen des Herrn A. Voss (diese Annalen Bd. 23, S. 45) und den vorliegenden herzustellen.

Die dort mit p_1 , p_2 , p_3 bezeichneten Grössen lassen sich, ohne der Allgemeinheit Eintrag zu thun, beziehentlich durch ξ , η , ξ ersetzen, sodass das betrachtete Punktebenensystem durch die Gleichung:

$$\xi du + \eta dv + \xi dw = 0,$$

bestimmt wird. Für die von Herrn Voss benutzten Ausdrücke G , Δ und Δ' ergeben sich mit Hülfe unserer Formeln die Gleichungen:

$$G = -2\delta_0 \varepsilon_0, \quad \Delta = -\frac{1}{r_3 r_4}, \quad \Delta' = -\frac{1}{h_1 h_2}.$$

Berücksichtigt man nun, dass:

$$\frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{\partial \eta}{\partial v} + \frac{\partial \xi}{\partial w} = -\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2}$$

ist, so ergibt sich die Gleichung für $\frac{1}{h_1}$ und $\frac{1}{h_2}$ in der Form:

$$x^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{\partial \eta}{\partial v} + \frac{\partial \xi}{\partial w} \right) x - \Delta' = 0,$$

die Gleichung für r_1 und r_2 in der Form:

$$x^2 - \frac{1}{\Delta} \left(\frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{\partial \eta}{\partial v} + \frac{\partial \xi}{\partial w} \right) x - \frac{\Delta'}{\Delta^2} = 0,$$

und die Gleichung für r_3, r_4 in der Form:

$$x^2 - \frac{1}{\Delta} \left(\frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{\partial \eta}{\partial v} + \frac{\partial \xi}{\partial w} \right) x - \frac{1}{\Delta} = 0.$$

Die gewonnenen Gleichungen setzen uns in den Stand das Analoge für die beiden mit dem betrachteten Punktebenensystem gegebenen Punktebenensysteme zu leisten, welche den Gleichungen:

$$\kappa_1 du + \lambda_1 dv + \mu_1 dw = 0$$

und

$$\kappa_2 du + \lambda_2 dv + \mu_2 dw = 0$$

entsprechen. Die in Bezug auf das erstere derselben genommenen Ausdrücke G, Δ, Δ' sollen mit G_1, Δ_1, Δ_1' , die entsprechenden Ausdrücke in Bezug auf das zweite mit G_2, Δ_2, Δ_2' bezeichnet werden.

Dann folgt:

$$G_1 = G_2 = \delta_0 (\vartheta_0 - \varepsilon_0),$$

worin der Satz liegt, dass die beiden in Frage stehenden Punktebenensysteme nur gleichzeitig aus lauter Flächentangentialebenen bestehen können, und dass die Bedingung hierfür ist:

$$\varepsilon_0 = \vartheta_0.$$

Ferner wird:

$$\frac{\partial \kappa_1}{\partial u} + \frac{\partial \lambda_1}{\partial v} + \frac{\partial \mu_1}{\partial w} = -\frac{1}{R_2} - \frac{1}{P_1},$$

$$\Delta_1 = \varepsilon_0 \vartheta_0 - \frac{1}{R_2 P_1},$$

$$\Delta_1' = \frac{(\varepsilon_0 + \vartheta_0)^2}{4} - \frac{1}{R_2 P_1},$$

$$\frac{\partial \kappa_2}{\partial u} + \frac{\partial \lambda_2}{\partial v} + \frac{\partial \mu_2}{\partial w} = -\frac{1}{R_1} - \frac{1}{P_2},$$

$$\Delta_2 = \varepsilon_0 \vartheta_0 - \frac{1}{R_1 P_2},$$

$$\Delta_2' = \frac{(\varepsilon_0 + \vartheta_0)^2}{4} - \frac{1}{R_1 P_2},$$

Man ersieht hieraus, dass, wenn $\varepsilon_0 + \vartheta_0 = 0$, die Grössen h_1, h_2 in dem der Gleichung

$$\kappa_1 du + \lambda_1 dv + \mu_1 dw = 0$$

entsprechenden Punktebenensystem mit P_1 und R_2 , in dem der Gleichung:

$$\kappa_2 du + \lambda_2 dv + \mu_2 dw = 0$$

entsprechenden mit P_2 und R_1 zusammenfallen.

§ 4.

Weitere Transformationen.

Es soll die Transformation der Integrabilitätsbedingungen einer linearen Differentialform:

$$W = F_1 du + F_2 dv + F_3 dw = f_1 \mathfrak{S}_1 + f_2 \mathfrak{S}_2 + f_0 \mathfrak{S}_0$$

in Bezug auf die Curvenschaar durchgeführt werden.

Man hat nach § 2:

$$F_1 = \kappa_1 f_1 + \kappa_2 f_2 + \xi f_0,$$

$$F_2 = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \eta f_0,$$

$$F_3 = \mu_1 f_1 + \mu_2 f_2 + \zeta f_0.$$

Unter Anwendung der entwickelten Formeln nimmt die linke Seite der Gleichung:

$$\frac{\partial F_1}{\partial v} - \frac{\partial F_2}{\partial u} = 0$$

die Gestalt:

$$\mu_1 A + \mu_2 B + \xi C,$$

die linke Seite der Gleichung:

$$\frac{\partial F_2}{\partial w} - \frac{\partial F_3}{\partial v} = 0$$

die Gestalt:

$$\kappa_1 A + \kappa_2 B + \xi C,$$

die linke Seite der Gleichung:

$$\frac{\partial F_3}{\partial u} - \frac{\partial F_1}{\partial w} = 0$$

die Gestalt:

$$\lambda_1 A + \lambda_2 B + \eta C$$

an. Es müssen daher A , B , C gleichzeitig verschwinden, und dies liefert die gesuchten Bedingungen in der Form:

$$g_2(f_1) - g_1(f_2) = \frac{f_1}{R_1} - \frac{f_2}{R_2} + 2\varepsilon_0 f_0,$$

$$g_0(f_2) - g_2(f_0) = f_1(\varepsilon_0 - \vartheta_0) + \frac{f_2}{h_1} - \frac{f_0}{P_2},$$

$$g_1(f_0) - g_0(f_1) = -\frac{f_1}{h_2} + f_2(\varepsilon_0 - \vartheta_0) + \frac{f_0}{P_1}.$$

Die Anwendung dieser Gleichungen auf die neun Differentiale $d\xi$, $d\kappa_1$, $d\kappa_2$, etc. lehrt die Differentialgleichungen erster Ordnung kennen,

welche zwischen den eingeführten geometrischen Invarianten der Curvenschaar $h_1, h_2, \varepsilon_0, \vartheta_0$ etc. bestehen. Die Rechnung zeigt, dass nur 9 von einander verschiedene Differentialgleichungen auftreten und zwar sind dies die folgenden:

$$\begin{aligned} g_2\left(\frac{1}{h_2}\right) - g_1(\varepsilon_0) &= \frac{1}{R_1}\left(\frac{1}{h_2} - \frac{1}{h_1}\right) - \frac{2\varepsilon_0}{P_1}, \\ g_1\left(\frac{1}{h_1}\right) + g_2(\varepsilon_0) &= \frac{1}{R_2}\left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2}\right) + \frac{2\varepsilon_0}{P_2}, \\ g_0(\varepsilon_0) + g_2\left(\frac{1}{P_1}\right) &= \vartheta_0\left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2}\right) + \varepsilon_0\left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2}\right) - \frac{1}{P_2}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{P_1}\right), \\ g_0\left(\frac{1}{h_1}\right) + g_2\left(\frac{1}{P_2}\right) &= \frac{1}{h_1}\left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2}\right) + \frac{1}{R_2P_1} + \frac{1}{P_2^2} - \frac{1}{r_3r_4}, \\ g_1\left(\frac{1}{P_1}\right) + g_0\left(\frac{1}{h_2}\right) &= \frac{1}{R_1P_2} + \frac{1}{P_1^2} - \frac{1}{r_3r_4} + \frac{1}{h_2}\left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2}\right), \\ g_1\left(\frac{1}{P_2}\right) - g_0(\varepsilon_0) &= \vartheta_0\left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2}\right) - \varepsilon_0\left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2}\right) + \frac{1}{P_1}\left(\frac{1}{P_2} - \frac{1}{R_1}\right), \\ g_2\left(\frac{1}{R_1}\right) + g_1\left(\frac{1}{R_2}\right) &= \frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} + \frac{1}{r_3r_4} + 2\varepsilon_0\vartheta_0, \\ g_0\left(\frac{1}{R_2}\right) + g_2(\vartheta_0) &= \varepsilon_0\left(\frac{1}{P_2} - \frac{1}{R_1}\right) + \vartheta_0\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{P_2}\right) + \frac{1}{h_1}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{P_1}\right), \\ g_1(\vartheta_0) - g_0\left(\frac{1}{R_1}\right) &= \varepsilon_0\left(\frac{1}{P_1} - \frac{1}{R_2}\right) + \vartheta_0\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{P_1}\right) + \frac{1}{h_2}\left(\frac{1}{P_2} - \frac{1}{R_1}\right). \end{aligned}$$

§ 5.

Lamé'sche Differentialparameter.

Machen wir jetzt eine Anwendung der entwickelten Formeln auf die Theorie der Lamé'schen Differentialparameter.

Es sei f eine Function von p, q, r , also auch von u, v, w .

Für den ersten Lamé'schen Differentialparameter ergibt sich dann die Gleichung:

$$\Delta_1(f)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)^2 = g_1(f)^2 + g_2(f)^2 + g_0(f)^2.$$

Nach § 2 ist aber:

$$\begin{aligned} g_1(f)^2 + g_2(f)^2 &= \frac{(\sigma_1^2 + \sigma_3^2)f_q^2 - 2(\sigma_3\sigma_4 + \sigma_1\sigma_2)f_p f_q + (\sigma_2^2 + \sigma_4^2)f_p^2}{(\sigma_1\sigma_4 - \sigma_2\sigma_3)^2} \\ &= \frac{\mathfrak{E}f_q^2 - 2\mathfrak{F}f_p f_q + \mathfrak{G}f_p^2}{\mathfrak{E}\mathfrak{G} - \mathfrak{F}^2}. \end{aligned}$$

(Diese Annalen Bd. 32, S. 547). Daher hat man gleichzeitig:

$$\Delta_1(f)^2 = \frac{\mathfrak{E}f_q^2 - 2\mathfrak{F}f_p f_q + \mathfrak{G}f_p^2}{\mathfrak{E}\mathfrak{G} - \mathfrak{F}^2} + g_0(f)^2.$$

Um den zweiten Lamé'schen Differentialparameter zu transformiren, führen wir zur Abkürzung die Bezeichnung ein:

$$g_{\alpha\beta}(f) = g_{\alpha}(g_{\beta}(f)).$$

Dann erhält man:

$$\Delta_2(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial w^2} = g_{11}(f) + g_{22}(f) + g_{00}(f) \\ - g_1(f) \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{P_1} \right) - g_2(f) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{P_2} \right) - g_0(f) \left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} \right).$$

Auch hier lässt ein Theil der rechten Seite eine ähnliche Umformung zu, wie sie bei dem ersten Differentialparameter statthat. Setzen wir für den Augenblick:

$$A = \frac{\mathfrak{G}f_p - \mathfrak{F}f_q}{\sqrt{\mathfrak{G}\mathfrak{G} - \mathfrak{F}^2}}, \quad B = \frac{\mathfrak{G}f_q - \mathfrak{F}f_p}{\sqrt{\mathfrak{G}\mathfrak{G} - \mathfrak{F}^2}}, \quad N = \sqrt{\mathfrak{G}\mathfrak{G} - \mathfrak{F}^2} = \sigma_1 \sigma_4 - \sigma_2 \sigma_3,$$

so wird:

$$A = \sigma_4 g_1(f) - \sigma_2 g_2(f), \quad B = \sigma_1 g_2(f) - \sigma_3 g_1(f),$$

d. h.:

$$g_1(f) = \frac{\sigma_4}{N} A + \frac{\sigma_2}{N} B, \quad g_2(f) = \frac{\sigma_3}{N} A + \frac{\sigma_1}{N} B.$$

Die Ausrechnung ergibt:

$$g_{11}(f) + g_{22}(f) = g_1(f) \frac{\sigma_{3q} - \sigma_{4p}}{N} + g_2(f) \frac{\sigma_{2p} - \sigma_{1q}}{N} + \frac{1}{N} (A_p + B_q).$$

Die Coefficienten von $g_1(f)$ und $g_2(f)$ in letzter Gleichung haben eine sehr einfache Bedeutung. Es ist:

$$u_p = \kappa_1 \sigma_1 + \kappa_2 \sigma_3, \quad u_q = \kappa_1 \sigma_2 + \kappa_2 \sigma_4.$$

Daher:

$$\sigma_1 = \sum \kappa_1 u_p, \quad \sigma_2 = \sum \kappa_1 u_q, \quad \sigma_3 = \sum \kappa_2 u_p, \quad \sigma_4 = \sum \kappa_2 u_q,$$

somit:

$$\sigma_{3q} - \sigma_{4p} = \sum \kappa_{2q} u_p - \sum \kappa_{2p} u_q + \sum \kappa_2 (u_{pq} - u_{qp}).$$

Zunächst hat man $u_{pq} - u_{qp}$ zu berechnen. Da zeigt sich:

$$u_{pq} - u_{qp} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{1}{a_{33}} \left\{ \sum u_q \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial p} - \sum u_p \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial q} + \frac{a_{23}}{a_{33}} \sum u_p \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right. \\ \left. - \frac{a_{13}}{a_{33}} \sum u_q \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right\}.$$

Benutzt man jetzt die Formeln:

$$\frac{\partial \xi}{\partial p} = \frac{1}{\sqrt{a_{33}}} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial p} - \xi \frac{\partial \log \sqrt{a_{33}}}{\partial p},$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial q} = \frac{1}{\sqrt{a_{33}}} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial q} - \xi \frac{\partial \log \sqrt{a_{33}}}{\partial q},$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial r} = \frac{1}{\sqrt{a_{33}}} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \xi \frac{\partial \log \sqrt{a_{33}}}{\partial r},$$

so folgt:

$$u_{pq} - u_{qp} = \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{1}{\sqrt{a_{33}}} \left\{ \sum u_q \xi_p - \sum u_p \xi_q \right\},$$

d. h. aber

$$u_{pq} - u_{qp} = \xi (e_{12} - e_{21}) = 2\xi e_0.$$

Analog hat man:

$$v_{pq} - v_{qp} = 2\eta e_0, \quad w_{pq} - w_{qp} = 2\xi e_0,$$

so dass:

$$\sum \kappa_2 (u_{pq} - u_{qp}) = 0.$$

Da nun:

$$\begin{aligned} \sum \kappa_{2q} u_p - \sum \kappa_{2p} u_q &= \sigma_1 \sum \kappa_1 \kappa_{2q} - \sigma_2 \sum \kappa_1 \kappa_{2p} \\ &= -\sigma_1 U_2 + \sigma_2 U_1 \\ &= \frac{\sigma_1 \sigma_4 - \sigma_2 \sigma_3}{R_2}, \end{aligned}$$

so erhalten wir:

$$\frac{\sigma_{3q} - \sigma_{4p}}{\sigma_1 \sigma_4 - \sigma_2 \sigma_3} = \frac{1}{R_2},$$

und in ähnlicher Weise:

$$\frac{\sigma_{2p} - \sigma_{1q}}{\sigma_1 \sigma_4 - \sigma_2 \sigma_3} = \frac{1}{R_1}.$$

Daher entsteht:

$$g_{11}(f) + g_{22}(f) = \frac{g_1(f)}{R_2} + \frac{g_2(f)}{R_1} + \frac{1}{N} (A_p + B_q),$$

sowie:

$$\begin{aligned} \Delta_2(f) &= \frac{1}{V\mathfrak{E}\mathfrak{G} - \mathfrak{F}^2} \left\{ \left(\frac{\mathfrak{G}f_p - \mathfrak{F}f_q}{V\mathfrak{E}\mathfrak{G} - \mathfrak{F}^2} \right)_p + \left(\frac{\mathfrak{G}f_q - \mathfrak{F}f_p}{V\mathfrak{E}\mathfrak{G} - \mathfrak{F}^2} \right)_q \right\} \\ &\quad - \frac{g_1(f)}{P_1} - \frac{g_2(f)}{P_2} - g_0(f) \left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} \right) + g_{00}(f). \end{aligned}$$

Der Uebergang von den Lamé'schen Differentialparametern zu den Beltrami'schen vollzieht sich jetzt in einfachster Weise.

Setzen wir zunächst voraus, dass die Function f von r unabhängig sei, so entsteht:

$$\Delta_1(f)^2 = g_1(f)^2 + g_2(f)^2 = \frac{\mathfrak{E} \left(\frac{\partial f}{\partial q} \right)^2 - 2\mathfrak{F} \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial f}{\partial q} + \mathfrak{G} \left(\frac{\partial f}{\partial p} \right)^2}{\mathfrak{E}\mathfrak{G} - \mathfrak{F}^2},$$

$$\begin{aligned} \Delta_2(f) &= g_{11}(f) + g_{22}(f) - g_1(f) \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{P_1} \right) - g_2(f) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{P_2} \right) \\ &= \frac{1}{V\mathfrak{E}\mathfrak{G} - \mathfrak{F}^2} \left\{ \left(\frac{\mathfrak{G} \frac{\partial f}{\partial p} - \mathfrak{F} \frac{\partial f}{\partial q}}{V\mathfrak{E}\mathfrak{G} - \mathfrak{F}^2} \right)_p + \left(\frac{\mathfrak{G} \frac{\partial f}{\partial q} - \mathfrak{F} \frac{\partial f}{\partial p}}{V\mathfrak{E}\mathfrak{G} - \mathfrak{F}^2} \right)_q \right\} \\ &\quad - \frac{g_1(f)}{P_1} - \frac{g_2(f)}{P_2}. \end{aligned}$$

Wird nun an Stelle der Curvenschaar ein Strahlensystem genommen, welches durch die Gleichungen:

$$u = x + r\xi, \quad v = y + r\eta, \quad w = z + r\xi$$

definirt ist, wo x, y, z, ξ, η, ξ nur von p und q abhängen, so verschwinden die Ausdrücke $\frac{1}{P_1}$ und $\frac{1}{P_2}$. Giebt man dann dem Quadrate des Linearelements der Fläche (x, y, z) die Gestalt:

$$E dp^2 + 2F dp dq + G dq^2$$

und betrachtet die Differentialparameter für den Werth $r = 0$, so ergeben sich die Beltrami'schen Ausdrücke für $\Delta_1(f)$ und $\Delta_2(f)$, wenn man das Strahlensystem mit dem Normalensystem der Fläche (x, y, z) zusammenfallen lässt.

§ 6.

Beziehungen zwischen Curvenschaar und Einheitskugel.

Jeder im Punkt (u, v, w) zur Curve ($p = \text{const.}, q = \text{const.}$) normalen Richtung entspricht eine durch den Punkt (ξ, η, ξ) gehende Tangente der Einheitskugel, deren Gleichung: $\xi^2 + \eta^2 + \xi^2 = 1$ ist. Die erstere Richtung ist gekennzeichnet durch die Richtungscosinus:

$$\frac{\delta u}{\sqrt{\Sigma \delta u^2}}, \quad \frac{\delta v}{\sqrt{\Sigma \delta u^2}}, \quad \frac{\delta w}{\sqrt{\Sigma \delta u^2}},$$

und die zweite durch die Richtungscosinus:

$$\frac{\delta \xi}{\sqrt{\Sigma \delta \xi^2}}, \quad \frac{\delta \eta}{\sqrt{\Sigma \delta \xi^2}}, \quad \frac{\delta \xi}{\sqrt{\Sigma \delta \xi^2}},$$

wobei der Werth des Verhältnisses $\frac{dq}{dp} = t$ in allen sechs Ausdrücken derselbe sein muss.

Fragt man, unter welchen Umständen entsprechende Richtungen parallel sind, so findet sich die Bedingung:

$$(e_{11}\Phi - e_{21}H) + (e_{11}\Psi + (e_{12} - e_{21})\Phi - e_{22}H)t + (e_{12}\Psi - e_{22}\Phi)t^2 = 0,$$

d. h. die Brennpunkte des Tangentenbündels müssen reell sein, und die fraglichen durch den Punkt (u, v, w) gehenden Richtungen treffen diejenigen Nachbartangenten, welche die Tangente (ξ, η, ξ) schneiden.

Als Bedingung der Orthogonalität entsprechender Richtungen erhält man:

$$r_1 H_1^2 + r_2 H_2^2 = 0,$$

d. h. die Asymptotenlinien müssen reell sein und die fraglichen Normalen der Curve ($p = \text{const.}, q = \text{const.}$) sind Tangenten der Asymptoten-

linien. Man kann in der Theorie der Curvenschaaren ebenso wie in der Flächentheorie auch von Curven $p = \text{const.}$, $q = \text{const.}$ reden, wenn man nur gleichzeitig orthogonale Trajectorien darunter versteht. Fallen z. B. die Curven $q = \text{const.}$, mit den Krümmungslinien $(\kappa_1, \lambda_1, \mu_1)$, die Curven $p = \text{const.}$ mit den Krümmungslinien $(\kappa_2, \lambda_2, \mu_2)$ zusammen, so ist $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, wenn aber die Curven $p = \text{const.}$ bez. $q = \text{const.}$ mit den Krümmungslinien $(\kappa_1, \lambda_1, \mu_1)$ bez. $(\kappa_2, \lambda_2, \mu_2)$ zusammenfallen, so ist $\sigma_1 = \sigma_4 = 0$.

Soll Entsprechendes auf der Einheitskugel (ξ, η, ζ) stattfinden, so muss

$$\Phi = 0 \quad \text{und} \quad e_{12} + e_{21} = 0$$

sein.

Fallen die Curven $p = \text{const.}$, $q = \text{const.}$ mit den Asymptotenlinien der Curvenschaar zusammen, so hat man:

$$\sigma_1^2 \sigma_4^2 - \sigma_2^2 \sigma_3^2 = 0 \quad \text{und} \quad r_1 \sigma_1^2 + r_2 \sigma_3^2 = 0.$$

Wichtiger ist die Frage nach dem Zusammenhang des reciproken Quotienten aus dem Querschnitt des Tangentenbündels und dem parallelen Kugeloberflächenelement mit den Coefficienten des Quadrats des Linearelements

$$a_{11} dp^2 + a_{22} dq^2 + a_{33} dr^2 + 2a_{12} dp dq + 2a_{13} dp dr + 2a_{23} dq dr.$$

Für jenen Quotienten haben wir die drei Ausdrücke:

$$\frac{\sqrt{H\Psi - \Phi^2}}{\sqrt{\mathfrak{G}\mathfrak{G} - \mathfrak{F}^2}}, \quad \frac{Q_\xi}{\sigma_1 \sigma_4 - \sigma_2 \sigma_3}, \quad \frac{1}{r_3 r_4}$$

gefunden. Es wird sich herausstellen, dass er eine Invariante des angeführten Quadrats des Linearelements ist.

Wenn man: $\mathfrak{G}\mathfrak{G} - \mathfrak{F}^2 = P^2$ setzt, so folgt aus den Gleichungen:

$$\sum \xi \xi_p = 0, \quad \sum u_p \xi_p = e_{11}, \quad \sum u_q \xi_p = e_{12}$$

die Beziehung:

$$\xi_p \cdot P^2 = u_p(e_{11} \mathfrak{G} - e_{12} \mathfrak{F}) + u_q(e_{12} \mathfrak{G} - e_{11} \mathfrak{F}),$$

und aus den Gleichungen:

$$\sum \xi \xi_q = 0, \quad \sum u_p \xi_q = e_{21}, \quad \sum u_q \xi_q = e_{22}$$

folgt:

$$\xi_q P^2 = u_p(e_{21} \mathfrak{G} - e_{22} \mathfrak{F}) + u_q(e_{22} \mathfrak{G} - e_{21} \mathfrak{F}).$$

Daher ist:

$$H P^2 = e_{11}(e_{11} \mathfrak{G} - e_{12} \mathfrak{F}) + e_{12}(e_{12} \mathfrak{G} - e_{11} \mathfrak{F}),$$

$$\Phi P^2 = e_{21}(e_{11} \mathfrak{G} - e_{12} \mathfrak{F}) + e_{22}(e_{12} \mathfrak{G} - e_{11} \mathfrak{F})$$

$$= e_{11}(e_{21} \mathfrak{G} - e_{22} \mathfrak{F}) + e_{12}(e_{22} \mathfrak{G} - e_{21} \mathfrak{F}),$$

$$\Psi P^2 = e_{21}(e_{21} \mathfrak{G} - e_{22} \mathfrak{F}) + e_{22}(e_{22} \mathfrak{G} - e_{21} \mathfrak{F}),$$

sodass:

$$P^2(H\Psi - \Phi^2) = (e_{11}e_{22} - e_{12}e_{21})^2$$

und:

$$\frac{\sqrt{H\Psi - \Phi^2}}{\sqrt{\mathfrak{G}\mathfrak{G} - \mathfrak{F}^2}} = \frac{e_{11}e_{22} - e_{12}e_{21}}{\mathfrak{G}\mathfrak{G} - \mathfrak{F}^2}.$$

Man hat aber:

$$e_{11} = \frac{-1}{P} \begin{vmatrix} u_{pp} & v_{pp} & w_{pp} \\ u_p & v_p & w_p \\ u_q & v_q & w_q \end{vmatrix}, \quad e_{21} = \frac{-1}{P} \begin{vmatrix} u_{pq} & v_{pq} & w_{pq} \\ u_p & v_p & w_p \\ u_q & v_q & w_q \end{vmatrix},$$

$$e_{12} = \frac{-1}{P} \begin{vmatrix} u_{qp} & v_{qp} & w_{qp} \\ u_p & v_p & w_p \\ u_q & v_q & w_q \end{vmatrix}, \quad e_{22} = \frac{-1}{P} \begin{vmatrix} u_{qq} & v_{qq} & w_{qq} \\ u_p & v_p & w_p \\ u_q & v_q & w_q \end{vmatrix},$$

woraus folgt:

$$e_{11}e_{22} - e_{12}e_{21} = \frac{1}{P^2} \begin{vmatrix} \sum u_{pp} u_{qq} & \mathfrak{F}_q - \frac{1}{2} \mathfrak{G}_p & \frac{1}{2} \mathfrak{G}_q \\ \frac{1}{2} \mathfrak{G}_p & \mathfrak{G} & \mathfrak{F} \\ \mathfrak{F}_p - \frac{1}{2} \mathfrak{G}_q & \mathfrak{F} & \mathfrak{G} \end{vmatrix} - \frac{1}{P^2} \begin{vmatrix} \sum u_{pq} u_{qp} & \frac{1}{2} \mathfrak{G}_q & \frac{1}{2} \mathfrak{G}_p \\ \frac{1}{2} \mathfrak{G}_q & \mathfrak{G} & \mathfrak{F} \\ \frac{1}{2} \mathfrak{G}_p & \mathfrak{F} & \mathfrak{G} \end{vmatrix}.$$

Es handelt sich nun noch um die Transformation der Differenz:

$$\sum u_{pp} u_{qq} - \sum u_{pq} u_{qp}.$$

Es ist:

$$\mathfrak{G}_{pp} = 2 \sum u_{qp}^2 + 2 \sum u_q u_{qpp},$$

$$\mathfrak{F}_{pq} = \sum u_q u_{ppq} + \sum u_{pp} u_{qq} + \sum u_{pq} u_{qp} + \sum u_p u_{qpq},$$

$$\mathfrak{F}_{qp} = \sum u_q u_{ppq} + \sum u_{pq} u_{qp} + \sum u_{pp} u_{qq} + \sum u_p u_{qpq},$$

$$\mathfrak{G}_{qq} = 2 \sum u_{pq}^2 + 2 \sum u_p u_{pqq}.$$

Aus der Relation:

$$u_{pq} - u_{qp} = 2\xi e_0$$

und den analogen zieht man die Folgerungen:

$$\begin{vmatrix} \sum u_{qp}^2 = \sum u_{qp} u_{pq} + 2e_0 e_{12}, & \sum u_q u_{qpp} = \sum u_q u_{ppq} - 2e_0 e_{12}, \\ \sum u_{pq}^2 = \sum u_{pq} u_{qp} - 2e_0 e_{21}, & \sum u_p u_{pqq} = \sum u_p u_{qpq} + 2e_0 e_{21}. \end{vmatrix}$$

Es bleiben also noch die beiden Summen $\sum u_q u_{ppq}$ und $\sum u_p u_{qqp}$ umzuformen. Durch directe Rechnung folgt:

$$u_{ppq} - u_{pqp} = 2e_0 \left\{ \xi_p + \xi \left((\log \sqrt{a_{33}})_p - \frac{\partial \frac{a_{13}}{a_{33}}}{\partial r} \right) \right\},$$

$$u_{qqp} - u_{qpq} = -2e_0 \left\{ \xi_q + \xi \left((\log \sqrt{a_{33}})_q - \frac{\partial \frac{a_{23}}{a_{33}}}{\partial r} \right) \right\},$$

sodass:

$$\sum u_q u_{ppq} = \sum u_q u_{pqp} + 2e_0 e_{12}$$

und

$$\sum u_p u_{qqp} = \sum u_p u_{qpq} - 2e_0 e_{21}.$$

Mit Hülfe dieser Formeln kommt:

$$\sum u_{pp} u_{qq} - \sum u_{pq} u_{qp} = \frac{1}{2} \{ -\mathfrak{G}_{pp} + \mathfrak{F}_{pq} + \mathfrak{F}_{qp} - \mathfrak{G}_{qq} - e_0^2 \}.$$

Berücksichtigt man nun, dass:

$$\mathfrak{G} = a_{11} - \frac{a_{13}^2}{a_{33}},$$

$$\mathfrak{F} = a_{12} - \frac{a_{13} a_{23}}{a_{33}},$$

$$\mathfrak{G} = a_{22} - \frac{a_{23}^2}{a_{33}},$$

$$\frac{2e_0}{\sqrt{a_{33}}} = \left(\frac{a_{23}}{a_{33}} \right)_p - \left(\frac{a_{13}}{a_{33}} \right)_q$$

ist, so zeigt sich in der That der Quotient $\frac{Q_{\xi}}{P}$ allein durch die Coefficienten des Quadrats des Linearelements und deren Ableitungen ausgedrückt.

Nimmt man als Curvenschaar das Normalensystem einer Fläche, so wird $e_0 = 0$ und die durch den unteren Index p oder q angezeigten zusammengesetzten Differentiationen gehen in gewöhnliche nach p oder q genommene über. Für $r=0$ ergibt sich dann der bekannte Gauss'sche Ausdruck.

§ 7.

Folgerungen für die Flächentheorie.

Die im Vorigen entwickelte Anwendung der linearen Differentialformen $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_0$ kann in analoger Weise auch in der Flächentheorie mit Erfolg durchgeführt werden.

Sind x, y, z , — die Coordinaten der Punkte einer nicht abwickelbaren Fläche — Functionen von p und q , so hat man:

$$dx = -\varrho_1 A_1 H_1 - \varrho_2 A_2 H_2,$$

$$dy = -\varrho_1 B_1 H_1 - \varrho_2 B_2 H_2,$$

$$dz = -\varrho_1 C_1 H_1 - \varrho_2 C_2 H_2,$$

wo ϱ_1, ϱ_2 die beiden Hauptkrümmungshalbmesser, A_1, B_1, C_1 , bez. A_2, B_2, C_2 die Richtungscosinus der Tangente der zu ϱ_1 , bez. ϱ_2 gehörenden Krümmungslinie bedeuten, und

$$H_1 = \sqrt{L} \cos \sigma \, dp + \sqrt{N} \cos (\sigma - \varphi) \, dq,$$

$$H_2 = \sqrt{L} \sin \sigma \, dp + \sqrt{N} \sin (\sigma - \varphi) \, dq$$

gesetzt ist. Dabei sind die Richtungscosinus der Flächennormale mit X, Y, Z bezeichnet und die sonstigen vorkommenden Grössen definirt durch die Gleichungen:

$$L = \sum \left(\frac{\partial X}{\partial p} \right)^2, \quad N = \sum \left(\frac{\partial X}{\partial q} \right)^2,$$

$$\sqrt{L} \cos \sigma = \sum A_1 \frac{\partial X}{\partial p}, \quad \sqrt{N} \cos (\sigma - \varphi) = \sum A_1 \frac{\partial X}{\partial q},$$

$$\sqrt{L} \sin \sigma = \sum A_2 \frac{\partial X}{\partial p}, \quad \sqrt{N} \sin (\sigma - \varphi) = \sum A_2 \frac{\partial X}{\partial q}.$$

Man kann nun das Differential einer Function f der beiden Variablen p und q als lineare Form von H_1 und H_2 darstellen wie folgt:

$$df = \frac{\partial df}{\partial H_1} H_1 + \frac{\partial df}{\partial H_2} H_2,$$

und man überzeugt sich leicht, dass die hier auftretenden Coefficienten von H_1 und H_2 invariable Functionen sind. Den Zusammenhang zwischen diesen Coefficienten und den Ableitungen von f nach p und q liefern die Gleichungen:

$$\frac{\partial df}{\partial H_1} = \frac{\frac{\partial f}{\partial q} \sqrt{L} \sin \sigma - \frac{\partial f}{\partial p} \sqrt{N} \sin (\sigma - \varphi)}{\sqrt{L} \sqrt{N} \sin \varphi},$$

$$\frac{\partial df}{\partial H_2} = \frac{\frac{\partial f}{\partial p} \sqrt{N} \cos (\sigma - \varphi) - \frac{\partial f}{\partial q} \sqrt{L} \cos \sigma}{\sqrt{L} \sqrt{N} \sin \varphi}.$$

Für die Differentiale der Richtungscosinus X, A_1, A_2 etc. erhält man:

$$dX = A_1 H_1 + A_2 H_2,$$

$$dA_1 = -(A_2 t_1 + X) H_1 + A_2 t_2 H_2,$$

$$dA_2 = A_1 t_1 H_1 - (A_1 t_2 + X) H_2,$$

wo $t_1 = \frac{\varrho_1}{R_1}$, $t_2 = \frac{\varrho_2}{R_2}$ genommen ist und R_1, R_2 die geodätischen Krümmungsradien der Krümmungslinien bedeuten. (Diese Annalen Bd. 31, S. 88).

Die Anwendung der Ausdrücke $\frac{\partial df}{\partial H_1}$ und $\frac{\partial df}{\partial H_2}$ ist von vielfachem Nutzen. Fällt z. B. die durch die Gleichung $f(p, q) = \text{const.}$ bestimmte Curvenschaar auf der Fläche mit den zu ϱ_1 oder ϱ_2 gehörenden Krümmungslinien zusammen, so hat man:

$$\frac{\partial df}{\partial H_1} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial df}{\partial H_2} = 0.$$

Jene Gleichung definirt eine Schaar von Asymptotenlinien, wenn:

$$\varrho_1 \left(\frac{\partial df}{\partial H_2} \right)^2 + \varrho_2 \left(\frac{\partial df}{\partial H_1} \right)^2 = 0.$$

Die Gleichungen $f(p, q) = \text{const.}$ und $f_1(p, q) = \text{const.}$ liefern conjugirte Curvenschaaren, wenn:

$$\varrho_1 \frac{\partial df}{\partial H_2} \frac{\partial df_1}{\partial H_2} + \varrho_2 \frac{\partial df}{\partial H_1} \frac{\partial df_1}{\partial H_1} = 0.$$

Die Determinante der zu ϱ_1 gehörenden Krümmungslinie hat den Werth:

$$\Delta_1 = - \varrho_1^3 H_1^6 \frac{\partial dt_1}{\partial H_1}$$

und die Determinante der zu ϱ_2 gehörenden:

$$\Delta_2 = \varrho_2^3 H_2^6 \frac{\partial dt_2}{\partial H_2}.$$

Bei der ersteren Krümmungslinie erhält der Radius der ersten Krümmung den Werth:

$$r_1 = \frac{\varrho_1}{\sqrt{1+t_1^2}},$$

der Radius der zweiten Krümmung den Werth:

$$r_1' = - \frac{\varrho_1(1+t_1^2)}{\frac{\partial dt_1}{\partial H_1}}.$$

Die entsprechenden Ausdrücke für die zweite Krümmungslinie sind:

$$r_2 = \frac{\varrho_2}{\sqrt{1+t_2^2}}, \quad r_2' = \frac{\varrho_2(1+t_2^2)}{\frac{\partial dt_2}{\partial H_2}}.$$

Setzt man:

$$d\varrho_1 = \varrho_{11} H_1 + \varrho_{12} H_2, \quad d\varrho_2 = \varrho_{21} H_1 + \varrho_{22} H_2,$$

so lässt sich die Gleichung derjenigen Normalschnitte, die von ihrem Schmiegunskreis vierpunktig berührt werden, in der Form schreiben:

$$\varrho_{11} H_1^3 + 3\varrho_{12} H_1^2 H_2 + 3\varrho_{21} H_1 H_2^2 + \varrho_{22} H_2^3 = 0.$$

Es sei jetzt irgend eine lineare Form von H_1 und H_2 gegeben, etwa: $F = F_1 H_1 + F_2 H_2$. Dann ist die Integrabilitätsbedingung derselben:

$$\frac{\partial dF_1}{\partial H_2} - \frac{\partial dF_2}{\partial H_1} = F_2 t_2 - F_1 t_1.$$

Die Anwendung dieser Beziehung auf dx, dy, dz liefert die beiden Gleichungen:

$$\varrho_{12} = (\varrho_2 - \varrho_1) t_1, \quad \varrho_{21} = (\varrho_1 - \varrho_2) t_2,$$

die Anwendung auf dX, dA_1, dA_2 , etc. lässt nur die eine Gleichung:

$$\frac{\partial dt_1}{\partial H_2} + \frac{\partial dt_2}{\partial H_1} = -1 - t_1^2 - t_2^2$$

hinzukommen. Diese Gleichungen, welche in anderer Form vielfach angewandt sind, müssen in den 9 am Schlusse des § 4 aufgestellten Gleichungen enthalten sein. Um das zu erkennen bemerken wir zunächst, dass die vorliegende Curvenschaar — das Normalensystem unserer Fläche — durch die Gleichungen:

$$u = x + rX, \quad v = y + rY, \quad w = z + rZ$$

bestimmt ist, wo die Werthe von r die von der Fläche (x, y, z) aus gerechneten Abscissen auf den Normalen der Fläche bedeuten. Im betrachteten Fall verschwinden die Grössen $\varepsilon_0, \vartheta_0, \frac{1}{P_1}$ und $\frac{1}{P_2}$. Ferner gehen h_1 und r_3 in den grösseren, h_2 und r_4 in den kleineren der beiden Hauptkrümmungshalbmesser der zum jeweiligen Werthe von r gehörenden Parallelfäche der Fläche (x, y, z) über, sodass man erhält:

$$h_1 = r_3 = \varrho_1 - r, \quad h_2 = r_4 = \varrho_2 - r.$$

Die Grössen R_1 und R_2 verwandeln sich in die geodätischen Krümmungsradien der Krümmungslinien der genannten Parallelfäche und sollen zur Unterscheidung von den in diesem Paragraphen auftretenden Grössen R_1 und R_2 mit R_1' und R_2' bezeichnet werden, sodass bei $r = 0$: $R_1 = R_1', \quad R_2 = R_2'$.

Endlich hat man hier, wenn f eine Function der Variablen p, q, r ist:

$$g_1(f) = -\frac{1}{\varrho_2 - r} \frac{\partial df}{\partial H_2}, \quad g_2(f) = -\frac{1}{\varrho_1 - r} \frac{\partial df}{\partial H_1}, \quad g_0(f) = \frac{\partial f}{\partial r}.$$

Die beiden letzten Gleichungen des § 4 liefern nun nach einfacher Integration:

$$R_1' = \frac{\varrho_2 - r}{t_2}, \quad R_2' = \frac{\varrho_1 - r}{t_1}.$$

(Vergl. diese Annalen Bd. 31, S. 90, 2)).

Die beiden ersten Gleichungen des in Rede stehenden Systems ergeben:

$$\varrho_{21} = t_2(\varrho_1 - \varrho_2), \quad \varrho_{12} = t_1(\varrho_2 - \varrho_1),$$

die siebente nimmt die Form:

$$\frac{\partial dt_1}{\partial H_2} + \frac{\partial dt_2}{\partial H_1} = -1 - t_1^2 - t_2^2$$

an, während die übrigen sich als identisch erfüllt herausstellen.

Auch die Formeln (1) § 2 gestatten eine directe Anwendung auf den vorliegenden Fall. Es gehen ξ, η, ζ bez. in X, Y, Z ; $\kappa_1, \lambda_1, \mu_1$ bez. in A_2, B_2, C_2 und $\kappa_2, \lambda_2, \mu_2$ bez. in A_1, B_1, C_1 über. Ist daher f eine Function von u, v, w , welche sich durch die Substitution:

$$u = x + rX, \quad v = y + rY, \quad w = z + rZ$$

in eine Function von p, q, r verwandelt, so hat man:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial u} &= -\frac{A_1}{e_1 - r} \frac{\partial df}{\partial H_1} - \frac{A_2}{e_2 - r} \frac{\partial df}{\partial H_2} + X \frac{\partial f}{\partial r}, \\ \frac{\partial f}{\partial v} &= -\frac{B_1}{e_1 - r} \frac{\partial df}{\partial H_1} - \frac{B_2}{e_2 - r} \frac{\partial df}{\partial H_2} + Y \frac{\partial f}{\partial r}, \\ \frac{\partial f}{\partial w} &= -\frac{C_1}{e_1 - r} \frac{\partial df}{\partial H_1} - \frac{C_2}{e_2 - r} \frac{\partial df}{\partial H_2} + Z \frac{\partial f}{\partial r}. \end{aligned}$$

Geht aber durch jene Substitution f in eine Function von p und q allein über, so entsteht für die Fläche $r = 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial u} = -\frac{A_1}{e_1} \frac{\partial df}{\partial H_1} - \frac{A_2}{e_2} \frac{\partial df}{\partial H_2}, \text{ etc.}$$

Die Anwendung auf X, A_1, A_2 etc. liefert ein System von 27 Gleichungen, welche sich aus den folgenden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial u} &= -\frac{A_1^2}{e_1} - \frac{A_2^2}{e_2}, & \frac{\partial X}{\partial v} &= -\frac{A_1 B_1}{e_1} - \frac{A_2 B_2}{e_2}, \\ & \frac{\partial X}{\partial w} = -\frac{A_1 C_1}{e_1} - \frac{A_2 C_2}{e_2}, \\ \frac{\partial A_1}{\partial u} &= A_1 \left(\frac{A_2}{R_2} + \frac{X}{e_1} \right) - \frac{A_2^2}{R_1}, & \frac{\partial A_1}{\partial v} &= B_1 \left(\frac{A_2}{R_2} + \frac{X}{e_1} \right) - \frac{B_2 A_2}{R_1}, \\ & \frac{\partial A_1}{\partial w} = C_1 \left(\frac{A_2}{R_2} + \frac{X}{e_1} \right) - \frac{C_2 A_2}{R_1}, \\ \frac{\partial A_2}{\partial u} &= -\frac{A_1^2}{R_2} + A_2 \left(\frac{A_1}{R_1} + \frac{X}{e_2} \right), & \frac{\partial A_2}{\partial v} &= -\frac{A_1 B_1}{R_2} + B_2 \left(\frac{A_1}{R_1} + \frac{X}{e_2} \right), \\ & \frac{\partial A_2}{\partial w} = -\frac{C_1 A_1}{R_2} + C_2 \left(\frac{A_1}{R_1} + \frac{X}{e_2} \right) \end{aligned}$$

durch cyklische Vertauschung von $X, Y, Z, u, v, w, A, B, C$ herleiten lassen.

Es ergibt sich die bekannte Beziehung:

$$\frac{\partial X}{\partial u} + \frac{\partial Y}{\partial v} + \frac{\partial Z}{\partial w} = -\frac{1}{e_1} - \frac{1}{e_2},$$

welcher die analogen:

$$\frac{\partial A_1}{\partial u} + \frac{\partial B_1}{\partial v} + \frac{\partial C_1}{\partial w} = - \frac{1}{R_1}$$

und:

$$\frac{\partial A_2}{\partial u} + \frac{\partial B_2}{\partial v} + \frac{\partial C_2}{\partial w} = - \frac{1}{R_2}$$

zur Seite treten.

Die Ausdrücke für ϱ_{12} und ϱ_{21} lassen unmittelbar den invariablen Charakter dieser Grössen erkennen, indem sie nur geometrische Invarianten aufweisen. Um für ϱ_{11} und ϱ_{22} Ausdrücke derselben Eigenschaft zu erhalten, hat man die Theorie der Krümmungsmittelpunktsflächen zu Hülfe zu nehmen. Dieselbe gestaltet sich bei Benutzung der entwickelten Methode besonders einfach. Bezüglich der zu ϱ_1 gehörenden Krümmungsmittelpunktsfläche wird der Krümmungsradius eines Normalschnitts gegeben durch die Gleichung:

$$\varrho' = \frac{\varrho_{11}^2 H_1^2 + 2 \varrho_{11} \varrho_{12} H_1 H_2 + (\varrho_{12}^2 + (\varrho_1 - \varrho_2)^2) H_2^2}{\varrho_{11} H_1^2 - \varrho_{21} H_2^2}.$$

Die Gleichung der Asymptotenlinien wird:

$$\varrho_{11} H_1^2 - \varrho_{21} H_2^2 = 0,$$

die der Krümmungslinien:

$$\varrho_{11} t_1 H_1^2 - (\varrho_1 - \varrho_2 - \varrho_{12} t_1 + \varrho_{11} t_2) H_1 H_2 - \varrho_{12} t_2 H_2^2 = 0,$$

und die beiden Hauptkrümmungsradien ϱ'_1, ϱ'_2 sind die Wurzeln der Gleichung:

$$t_2 \varrho^2 - \{t_2 \varrho_{11} - (\varrho_1 - \varrho_2)(1 + t_1^2)\} \varrho - \varrho_{11}(\varrho_1 - \varrho_2) = 0,$$

so dass:

$$\varrho_{11} = \frac{t_2 \varrho'_1 \varrho'_2}{\varrho_2 - \varrho_1}.$$

Bezüglich der zu ϱ_2 gehörenden Krümmungsmittelpunktsfläche ergibt sich das Analoge durch Vertauschung der Indices 1 und 2. Es wird im Besonderen:

$$\varrho_{22} = \frac{t_1 \varrho_1'' \varrho_2''}{\varrho_1 - \varrho_2},$$

man hat also allgemein:

$$d \varrho_1 = \frac{t_2 \varrho'_1 \varrho'_2}{\varrho_2 - \varrho_1} H_1 + (\varrho_2 - \varrho_1) t_1 H_2,$$

$$d \varrho_2 = (\varrho_1 - \varrho_2) t_2 H_1 + \frac{\varrho_1'' \varrho_2'' t_1}{\varrho_1 - \varrho_2} H_2.$$

Auch die Centraflächen der geodätischen Krümmungen der Krümmungslinien lassen sich mit unseren Methoden in einfacher Weise untersuchen. Bemerkt sei nur, dass die Gleichung der Asymptotenlinien der zu R_1 gehörenden Centrafläche die Form hat:

$$R_1 \frac{\partial d t_1}{\partial H_1} H_1^2 - t_2 \frac{\partial d R_1}{\partial H_2} H_2^2 = 0.$$

Was endlich die Differentialparameter einer Function f von p und q in Bezug auf die Fläche betrifft, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}\Delta_1(f)^2 &= \frac{1}{\varrho_1^2} \left(\frac{\partial df}{\partial H_1} \right)^2 + \frac{1}{\varrho_2^2} \left(\frac{\partial df}{\partial H_2} \right)^2, \\ \Delta_2(f) &= \frac{1}{\varrho_1^2} \frac{\partial d^2 f}{\partial H_1^2} + \frac{1}{\varrho_2^2} \frac{\partial d^2 f}{\partial H_2^2} + \left(\frac{1}{\varrho_1 R_1} - \frac{\varrho_{11}}{\varrho_1^3} \right) \frac{\partial df}{\partial H_1} \\ &\quad + \left(\frac{1}{\varrho_2 R_2} - \frac{\varrho_{22}}{\varrho_2^3} \right) \frac{\partial df}{\partial H_2},\end{aligned}$$

oder analog dem Früheren, wenn man:

$$S_\alpha(f) = \frac{1}{\varrho_\alpha} \frac{\partial df}{\partial H_\alpha}, \quad S_{\alpha\beta}(f) = S_\alpha\{S_\beta(f)\}$$

setzt:

$$\begin{aligned}\Delta_1(f)^2 &= S_1(f)^2 + S_2(f)^2, \\ \Delta_2(f) &= S_{11}(f) + S_{22}(f) + \frac{S_1(f)}{R_1} + \frac{S_2(f)}{R_2}.\end{aligned}$$

Das vollständige System der ersten und zweiten Differentialparameter der 9 Richtungscosinus X, A_1, A_2 etc. ergibt sich durch cyklische Vertauschung von A, B, C ; X, Y, Z aus folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}\Delta_1(X)^2 &= \frac{A_1^2}{\varrho_1^2} + \frac{A_2^2}{\varrho_2^2}, \\ \Delta_1(A_1)^2 &= A_2^2 \left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} \right) + 2 \frac{A_2 X}{\varrho_1 R_2} + \frac{X^2}{\varrho_1^2}, \\ \Delta_1(A_2)^2 &= A_1^2 \left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} \right) + 2 \frac{A_1 X}{\varrho_2 R_1} + \frac{X^2}{\varrho_2^2}, \\ \Delta_2(X) &= A_1 \left\{ \frac{1}{R_1} \left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2} \right) - \frac{\varrho_{11}}{\varrho_1^3} \right\} + A_2 \left\{ \frac{1}{R_2} \left(\frac{1}{\varrho_2} - \frac{1}{\varrho_1} \right) - \frac{\varrho_{22}}{\varrho_2^3} \right\} \\ &\quad - X \left(\frac{1}{\varrho_1^2} + \frac{1}{\varrho_2^2} \right), \\ \Delta_2(A_1) &= X \left\{ -\frac{1}{R_1} \left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} \right) + \frac{\varrho_{11}}{\varrho_1^3} \right\} - A_1 \left\{ \frac{1}{\varrho_1^2} + \frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} \right\} \\ &\quad + A_2 \left\{ \frac{1+t_1^2}{\varrho_1 r_1'} + \frac{1+t_2^2}{\varrho_2 r_2'} + \frac{t_1 \varrho_{11}}{\varrho_1^3} - \frac{t_2 \varrho_{22}}{\varrho_2^3} \right\}, \\ \Delta_2(A_2) &= X \left\{ -\frac{1}{R_2} \left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} \right) + \frac{\varrho_{22}}{\varrho_2^3} \right\} - A_1 \left\{ \frac{1+t_2^2}{\varrho_2 r_2'} + \frac{1+t_1^2}{\varrho_1 r_1'} - \frac{t_2 \varrho_{22}}{\varrho_2^3} + \frac{t_1 \varrho_{11}}{\varrho_1^3} \right\} \\ &\quad - A_2 \left\{ \frac{1}{\varrho_2^2} + \frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} \right\}.\end{aligned}$$

Santiago de Chile, im Juli 1890.