Zur Theorie der ternären cubischen Formen.

VON S. GUNDELFINGER IN TÜBINGEN.

Für die Theorie einer ternären cubischen Form f ist durch Einführung der Conjugirten P_f ein Dualismus begründet worden, der in ungleich einfacherer Weise als das aus der Geometrie bekannte Princip der Reciprocität gestattet, von jedem Satze in Punktcoordinaten sofort zu einem entsprechenden in Liniencoordinaten überzugehen. Dieser Dualismus ist jedoch nur dann endgiltig hergestellt, wenn sämtliche Formen eines vollständigen Systems von f , wie z. B. des von Gordan Bd. I. dieser Annalen S. 90—121 gegebenen, für P_f oder allgemeiner für $\lambda P_f - \lambda R_f$ als cubische Grundfunction gebildet sind. Ich habe mich daher dieser Arbeit unterzogen, und theile im Folgenden die Ergebnisse derselben mit.

Die hierher gehörigen, von Aronhold in Borchardt's Journal Bd. 55, S. 199 ohne Beweis aufgestellten Formeln habe ich bereits an anderer Stelle*) entwickelt. Des Zusammenhangs wegen ist diese Entwicklung hier (§ 2.) in vereinfachter Weise wiedergegeben.

In den beiden letzten Paragraphen wird im Anschluss an das Vorhergehende das Nöthigste über das Formensystem der Function $kS_f - lT_f$ und über die Auffindung von Relationen zwischen den Co-varianten u. s. w. von f gesagt werden.

§ 1.

Definitionen.

Wir definiren zunächst das vollständige System der Fundamentalfunction f , wie es dieser Abhandlung zu Grunde gelegt ist. Die 34 Formen desselben, theils mit den von Gordan gewählten identisch, theils möglichst einfache Combinationen derselben sind die folgenden.**)

*) Habilitationsschrift: Zur Theorie des simultanen Systems einer cubischen und einer biquadratischen binären Form. Stuttgart 1869.

**) Die hier angewandte Bezeichnungsweise ist die Aronhold'sche mit den Modificationen, die Clebsch und Gordan in Bd. I. dieser Annalen, S. 156 ff. eingeführt haben. Auch der abgekürzten Schreibweise der Differentialquotienten ist durchgehends dieselbe Bedeutung beizulegen, die sie am letzten Orte hat.

0^{te} Ord. $u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = u_x;$

1^{te} „ $f = (a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)^3 = a_x^3 = b_x^3 = \dots;$

2^{te} „ $\Theta = a_x b_x (abu)^2;$

3^{te} „ $B = \Sigma \pm \frac{\partial \Theta}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2} u_3, \quad \Delta = 6 \Sigma \pm f_{11} f_{22} f_{33} = a_x^3,$
 $S_f = (abc)(abu)(acu)(bcu) = u_x^3;$

4^{te} „ $N = \frac{2}{3} \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial \Delta}{\partial x_2} u_3, \quad H = a_x a_x (aau)^2, \quad S = \frac{1}{6} a_x^3,$
 $F = (abu)^2 (cd u)^2 (bcu)(adu);$

5^{te} „ $B' = \Sigma \pm \frac{\partial H}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2} u_3, \quad L = \frac{1}{2} \Sigma \frac{\partial \Theta}{\partial u_i} \frac{\partial \Delta}{\partial x_i} - S f u_x,$
 $L' = \frac{1}{2} \Sigma \frac{\partial \Theta}{\partial x_i} \frac{\partial S_f}{\partial u_i} - T_f u_x, \quad T_f = a_x b_x (abu)^2 = u_x^3;$

6^{te} „ $E = \Sigma \pm \frac{\partial L}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2} u_3, \quad Z = \Sigma \pm \frac{\partial L'}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2} u_3,$
 $K = a_x \beta_x (\alpha \beta u)^2, \quad T = \frac{1}{6} a_x^3;$

7^{te} „ $\Sigma \pm \frac{\partial S_f}{\partial u_1} \frac{\partial F}{\partial u_2} x_3, \quad B'' = \Sigma \pm \frac{\partial K}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2} u_3,$
 $M = \Sigma \frac{\partial H}{\partial u_i} \frac{\partial \Delta}{\partial x_i} - 2(2 T_f - S \Delta) u_x,$
 $M' = \frac{1}{2} \Sigma \frac{\partial \Theta}{\partial x_i} \frac{\partial T_f}{\partial u_i} - S \cdot S_f u_x;$

8^{te} „ $E' = \Sigma \pm \frac{\partial M}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2} u_3, \quad N' = \frac{2}{3} \Sigma \pm \frac{\partial S_f}{\partial u_1} \frac{\partial T_f}{\partial u_2} x_3;$
 $Z' = \Sigma \pm \frac{\partial L'}{\partial x_1} \frac{\partial \Delta}{\partial x_2} u_3 + \frac{3}{4} N' u_x,$
 $\psi = -\frac{3}{2} \Sigma \Sigma \frac{\partial^2 \Theta}{\partial u_i \partial u_x} \Delta_i \Delta_x - 2 T_f^2 + 3 S f \Delta;$

9^{te} „ $\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial \psi}{\partial x_2} u_3, \quad \Sigma \pm \frac{\partial T_f}{\partial u_1} \frac{\partial F}{\partial u_2} x_3, \quad B''' = \Sigma \pm \frac{\partial K}{\partial x_1} \frac{\partial \Delta}{\partial x_2} u_3;$

10^{te} „ $E'' = \Sigma \pm \frac{\partial M}{\partial x_1} \frac{\partial \Delta}{\partial x_2} u_3, \quad Z'' = \Sigma \pm \frac{\partial M'}{\partial x_1} \frac{\partial \Delta}{\partial x_2} u_3;$

11^{te} „ $\Sigma \pm \frac{\partial \Delta}{\partial x_1} \frac{\partial \psi}{\partial x_2} u_3;$

12^{te} „ $\Omega = \frac{1}{6} \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial \Delta}{\partial x_2} \frac{\partial \psi}{\partial x_3}, \quad \Pi = \frac{1}{6} \Sigma \pm \frac{\partial S_f}{\partial u_1} \frac{\partial T_f}{\partial u_2} \frac{\partial F}{\partial u_3}.$

In dieser Tafel sind die schon von Clebsch und Gordan in der eben citirten Arbeit (siehe Anm. auf voriger Seite) angewandten Benennungen vollständig beibehalten. Von den Formen B, B', B'', B''', sowie Z, Z', Z'' und E, E', E'' wird später gezeigt werden, dass sie folgende Gleichungen befriedigen:

$$B_{xf-1A} = x^3 B - 3x^2 \lambda B' + 3x \lambda^2 B'' - \lambda^3 B'''$$

$$E_{xf-1A} = G(x\lambda)(x^2 E - 2x\lambda E' + \lambda^2 E'')$$

$$Z_{xf-1A} = G(x\lambda)(x^2 Z - 2x\lambda Z' + \lambda^2 Z'').$$

Für die vier noch übrigen Formen

$\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial \psi}{\partial x_2} u_3$, $\Sigma \pm \frac{\partial \Delta}{\partial x_1} \frac{\partial \psi}{\partial x_2} u_3$, $\Sigma \pm \frac{\partial S_f}{\partial u_1} \frac{\partial F}{\partial u_2} x_3$ und $\Sigma \pm \frac{\partial T_f}{\partial u_1} \frac{\partial F}{\partial u_2} x_3$
besondere Zeichen zu wählen, lag kein Bedürfniss vor.

§ 2.

**Bildung von S , T , S_f , T_f , Δ , P_f und R_f für $\kappa P_f - \lambda R_f$
als Grundform.**

Als Ausgangspunkt für sämtliche aufzustellende Bildungen dienen uns die von Aronhold (Borchardt's Journal, Band 55, S. 188) bewiesenen Gleichungen:

$$(1) \quad \Delta_p = C' S_f = C(TP_f - SR_f)$$

$$(2) \quad S_p = K \cdot \Delta,$$

worin C und K constante, nur von den Coefficienten der Form f abhängige Factoren bedeuten.

Aus der Formel (2) ergibt sich leicht bis auf einen Zahlenfactor der Werth von S_p . Ist nämlich χ eine beliebige Invariante der Form f und von der Ordnung γ in den Coefficienten derselben, so bestehen (Borchardt's Journal, Bd. 73, S. 178) die beiden Beziehungen:

$$(3) \quad 6 R \chi_p = 6 R \cdot \Sigma! \frac{\partial \chi_p}{\partial p_{\kappa \lambda \mu}} x_\kappa x_\lambda x_\mu = \Sigma! \frac{\partial \chi_p}{\partial a_{\kappa \lambda \mu}} b_{\kappa \lambda \mu} \cdot f - \gamma \chi_p \Delta \\ = \delta(\chi_p) \cdot f - \gamma \chi_p \cdot \Delta,$$

$$(3_a) \quad 6 R \chi_{\kappa p - \lambda r} = - \left(\frac{\partial \chi_{\kappa p - \lambda r}}{\partial \kappa} \Delta + \frac{\partial \chi_{\kappa p - \lambda r}}{\partial \lambda} f \right). *$$

Hält man die Formel (3) für $\chi = S$ mit (2) zusammen, so sieht man, dass

$$\delta(S_p) = 0,$$

und dass daher S_p bis auf einen numerischen Factor α gleich einer Potenz von R ist, d. h. dass

$$(4) \quad S_p = \alpha R^3.$$

Indem man in dieser Gleichung f durch $\kappa f - \lambda \Delta$, also P_f durch $G^2(\kappa \lambda)$ ($\kappa P_f - \lambda R_f$) u. s. w. ersetzt, bekommt man

$$(4_a) \quad S_{\kappa p - \lambda r} = \alpha R^3 G(\kappa \lambda),$$

und hieraus mit Rücksicht auf (3) und (3_a):

$$(5) \quad S_p = -\alpha R^2 \Delta^{**},$$

*) Wie oben bemerkt, gebrauchen wir die Bezeichnungswiese von Clebsch und Gordan; man hat deshalb, um von Aronhold'schen Formeln zu den unserigen überzugehen, in den ersteren a durch κ , b durch $-\lambda$, R durch $-R$ und R_f durch $-R_f$ zu ersetzen.

**) Man erinnere sich, dass $S_f = \frac{1}{2} \Sigma! \frac{\partial S}{\partial a_{\kappa \lambda \mu}} u_\kappa u_\lambda u_\mu$.

$$(5a) \quad S_{xP-\lambda R} = -\alpha R^2 (\Delta G_1(x\lambda) + f G_2(x\lambda)).$$

Um den Factor C in (1) zu bestimmen, stellen wir folgende Erwägungen an. Bedeutet φ irgend eine Form von f und von der m^{ten} Ordnung in den Coefficienten, so wird $(\delta\varphi)_P$ erhalten, wenn man in $\Sigma! \frac{\partial\varphi}{\partial a_{x\lambda\mu}} b_{x\lambda\mu}$ an Stelle von $a_{x\lambda\mu} : p_{x\lambda\mu}$ und somit nach (1) an Stelle von $b_{x\lambda\mu} : C(Tp_{x\lambda\mu} - Sr_{x\lambda\mu})$ treten lässt. Man hat demnach:

$$(6) \quad (\delta\varphi)_P = C \left(T \Sigma! \frac{\partial\varphi_P}{\partial p_{x\lambda\mu}} p_{x\lambda\mu} - S \Sigma! \frac{\partial\varphi_P}{\partial p_{x\lambda\mu}} r_{x\lambda\mu} \right) \\ = C (m T \varphi_P - S \delta(\varphi_P)).$$

Für $\varphi = \Delta$ folgt hieraus mit Beziehung auf den Werth von S_P :

$$3\alpha R^3 P_f = -C [(3RC - ST\delta C) P_f - S^2\delta C R_f],$$

oder durch Vergleichung der Coefficienten von P_f und R_f auf beiden Seiten:

$$\delta C = 0 \quad \text{und} \quad C = (\pm \sqrt{-\alpha}) R.$$

Bezeichnen wir in diesem Ausdruck von C die Wurzel $\sqrt{-\alpha}$, mit dem richtigen Vorzeichen versehen, kurz durch β , so nimmt jetzt (1) diese Gestalt an:

$$(7) \quad \Delta_P = \beta R (T P_f - S R_f) = -2 R^2 S_f,$$

da der noch unbestimmte Zahlenfactor β durch die specielle Annahme $f = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$ ohne Mühe gleich -2 (und beiläufig auch $\alpha = -\beta^2 = -4$) gefunden wird.

Durch den Uebergang von f zu $\kappa f - \lambda \Delta$ erhält man aus der letzten Formel (7) die allgemeinere:

$$(7a) \quad \Delta_{xP-\lambda R} = -2 R (R_f \cdot S_1(x\lambda) + P_f S_2(x\lambda)).$$

In derselben Weise, in der wir aus dem Werthe von Δ_P für irgend eine Form φ von der Ordnung m in den Coefficienten die Relation

$$(8) \quad (\delta\varphi)_P = -2 R (m T \varphi_P - S \delta(\varphi_P))$$

abgeleitet haben, folgt aus dem Ausdruck von $\Delta_{xP-\lambda R}$:

$$(8a) \quad (\delta\varphi)_{xP-\lambda R} = 2 R \left(\frac{\partial\varphi_{xP-\lambda R}}{\partial\lambda} S_1(x\lambda) - \frac{\partial\varphi_{xP-\lambda R}}{\partial\kappa} S_2(x\lambda) \right).$$

Für $\varphi = S$ erhält man nach dieser Gleichung:

$$(9) \quad T_{xP-\lambda R} = -8 R^4 T(\kappa\lambda),$$

und hieraus nach (3a) sofort:

$$(10) \quad T_{xP-\lambda R} = 8 R^3 (\Delta T_1(\kappa\lambda) + f T_2(\kappa\lambda)).$$

Aus den nunmehr bekannten Werthen von $S_{xP-\lambda R}$, $T_{xP-\lambda R}$ etc. findet man alsdann:

$$\begin{aligned}
 (11) \quad P_{xP-2R} &= T_{xP-2R} S_{xP-2R} - S_{xP-2R} T_{xP-2R} \\
 &= 32 R^6 \{ G(x\lambda) (\Delta T_1(x\lambda) + f T_2(x\lambda)) \\
 &\quad - T(x\lambda) (\Delta G_2(x\lambda) + f G_1(x\lambda)) \}^* \\
 &= 32 R^6 (G_1(x\lambda) T_2(x\lambda) - G_2(x\lambda) T_1(x\lambda)) (xf - \lambda \Delta) \\
 &= -32 R^6 S^2(x\lambda) (xf - \lambda \Delta).
 \end{aligned}$$

Mit Rücksicht auf diese Formel folgt nach der Gleichung (8_a) für $\varphi = P_f$ die weitere:

$$(12) \quad R_{xP-2R} = 64 R^7 S^2(x\lambda) (S_1(x\lambda) \Delta + S_2(x\lambda) f)^{**}$$

Der letzte Ausdruck konnte auch noch in anderer Weise abgeleitet werden. Es ist nämlich:

$$\begin{aligned}
 (13) \quad R_{xP-2R} &= S_{xP-2R}^3 - T_{xP-2R}^3 = -64 R^8 (G^3(x\lambda) R + T^2(x\lambda)) \\
 &= -64 R^8 S^3(x\lambda).
 \end{aligned}$$

Mit Beziehung auf diese Gleichung wäre dann aus (3_a) für $\chi = R$ sofort wieder (12) hervorgegangen.

§ 3.

Vorbereitende Formeln.

Wir werden im Folgenden äusserst häufig ein System von Hilfsformeln nöthig haben, das wir hier im Voraus zusammenstellen, um nachher den Gang der Untersuchung nicht unterbrechen zu müssen.

Wenn φ irgend eine Form der Grundfunction f von der Ordnung m in den Coefficienten bedeutet und

$$(1) \quad \varphi_{xP-2R} = \varphi(x\lambda) = x^m \varphi - m x^{m-1} \lambda \varphi' + \binom{m}{2} x^{m-2} \lambda^2 \varphi'' - \binom{m}{3} x^{m-3} \lambda^3 \varphi''' + \dots$$

gesetzt wird, so ist (Borchardt's Journal, Bd. 73, S. 175):

$$\begin{aligned}
 &\varphi'_{xP-2R} = \varphi'(x\lambda) = \varphi_1(x\lambda) G_2(x\lambda) - \varphi_2(x\lambda) G_1(x\lambda), \\
 &\varphi''(x\lambda) = \varphi_{11}(x\lambda) G_2^2(x\lambda) - 2 \varphi_{12}(x\lambda) G_1(x\lambda) G_2(x\lambda) + \varphi_{22}(x\lambda) G_1^2(x\lambda) \\
 (2) \quad &\varphi'''(x\lambda) = \varphi_{111}(x\lambda) G_2^3(x\lambda) - 3 \varphi_{112}(x\lambda) G_2^2(x\lambda) G_1(x\lambda) \\
 &\quad + 3 \varphi_{122}(x\lambda) G_2^2(x\lambda) G_1(x\lambda) - \varphi_{222}(x\lambda) G_1^3(x\lambda), \\
 &\dots \dots \dots
 \end{aligned}$$

Diese Functionen $\varphi'(x\lambda)$, $\varphi''(x\lambda)$ etc. sind der mannichfaltigsten

*) Für irgend drei binäre Formen u , v , w von x und λ besteht die evidente Gleichung:

$$(u_1 v_2 - u_2 v_1) w = (u_1 w_2 - u_2 w_1) v - (v_1 w_2 - v_2 w_1) u.$$

Aus der Annahme $u = xf - \lambda \Delta$, $v = G(x\lambda)$, $w = T(x\lambda)$ folgt unmittelbar die oben benutzte Relation.

**) Demnach ist in dem Ausdrucke von R_{xP-2R} , der Bd. I. dieser Annalen, S. 83 angegeben ist, statt des numerischen Factors 8 die Zahl 16 zu setzen.

Umgestaltungen fähig. Da für irgend zwei binäre Formen v und w von x und λ die Gleichung besteht:

$$(3) \quad v_{11}w_2^2 - 2v_{12}w_1w_2 + v_{22}w_1^2 = -v(w_{11}w_{22} - w_{12}^2) + w[w, v]^2,^*)$$

so bekommt man für $w = G(x\lambda)$ und $v = \varphi(x\lambda)$:

$$(4) \quad \varphi''(x\lambda) - S(x\lambda)\varphi(x\lambda) = G(x\lambda)[G(x\lambda), \varphi(x\lambda)]^2.$$

Da ferner irgend drei binäre Formen u, v, w durch die Identität verbunden sind:

$$(5) \quad (u_1v_2 - u_2v_1)w = v(u_1w_2 - u_2w_1) - u(v_1w_2 - v_2w_1),$$

so folgt für

$$u = S(x\lambda), \quad v = G(x\lambda), \quad w = \varphi(x\lambda):$$

$$(6) \quad T(x\lambda)\varphi(x\lambda) - S(x\lambda)\varphi'(x\lambda) = G(x\lambda)[S(x\lambda), \varphi(x\lambda)].$$

Ersetzt man in der Formel

$$(7) \quad 2[u, v][w, v] = u([v, w]^2v - [v, v]^2w) - v([u, w]^2v - [u, v]^2w)^{**})$$

u durch $S(x\lambda)$, v durch $G(x\lambda)$ und w durch $\varphi(x\lambda)$, und bedenkt, dass durch diese Substitution $(u, v)^2$ identisch verschwindet, so folgt

$$2T(x\lambda)\varphi'(x\lambda) = S(x\lambda)[\varphi(x\lambda), G(x\lambda)]^2 \\ + S^2(x\lambda)\varphi(x\lambda) - G^2(x\lambda)[S(x\lambda), \varphi(x\lambda)],$$

und hieraus mit Rücksicht auf (4):

$$(8) \quad S^2(x\lambda)\varphi(x\lambda) - 2T(x\lambda)\varphi'(x\lambda) + S(x\lambda)\varphi''(x\lambda) = G^2(x\lambda)[S(x\lambda), \varphi(x\lambda)]^2.$$

Substituiert man dagegen in (7) $T(x\lambda)$ für u , $G(x\lambda)$ für v und $\varphi(x\lambda)$ für w , so erhält man:

$$(9) \quad T(x\lambda)\varphi''(x\lambda) - 2S^2(x\lambda)\varphi'(x\lambda) + S(x\lambda)T(x\lambda)\varphi(x\lambda) = G^2(x\lambda)[T(x\lambda), \varphi(x\lambda)]^2.$$

Um zu einer Umformung für $\varphi'''(x\lambda)$ zu gelangen, wenden wir die für zwei beliebige binäre Formen u und v bestehende Relation an:

$$(10) \quad v_{111}u_2^3 - 3v_{112}u_2^2u_1 + 3v_{221}u_2u_1^2 - v_{222}u_1^3 \\ = [v, u]^3u^2 + 2u[\Delta, v] - [v, u]\Delta^{***}),$$

*) Wir werden im Folgenden häufig von der Bezeichnungsweise Gordan's Gebrauch machen, wonach:

$$v_1w_2 - v_2w_1 = [v, w], \quad v_{11}w_{22} - 2v_{12}w_{12} + v_{22}w_{11} = [v, w]^2 \text{ etc.}$$

**) Bedeuten u, v, w und t irgend vier binäre Formen von x und λ , so geht der Ausdruck $2(u_1v_2 - u_2v_1)(w_1t_2 - w_2t_1)$ vermöge Ersetzung von u_i durch $u_1x + u_2\lambda$, von v_i durch $v_1x + v_2\lambda$ etc. über in:

$$2[u, v][w, t] = \begin{vmatrix} u_{11} & v_{11} & -\lambda^2 \\ -2u_{12} & -2v_{12} & -2x\lambda \\ u_{22} & v_{22} & -x^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} w_{22} & t_{22} & -x^2 \\ w_{12} & t_{12} & x\lambda \\ w_{11} & t_{11} & -\lambda^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} [u, w]^2 & [u, t]^2 & u \\ [v, w]^2 & [v, t]^2 & v \\ w & t & 0 \end{vmatrix}.$$

**) Diese Formel und die in (3) aufgestellte gehören einem Systeme von Recursionsformeln an, das als eine Verallgemeinerung des von Clebsch in Bd. III. dieser Annalen, S. 265 mitgetheilten zu betrachten ist, und das wie dieses vermittelst Principien abgeleitet werden kann, auf die ich an anderer Stelle zurückkommen werde.

in welcher $u_{11} u_{22} - u_{12}^2$ kurz mit Δ bezeichnet worden ist. Für $v = \varphi(x\lambda)$ und $u = G(x\lambda)$ folgt hieraus unmittelbar:

$$(11) \quad \begin{aligned} & \varphi'''(x\lambda) - S(x\lambda) [\varphi(x\lambda), G(x\lambda)] \\ &= 2 G(x\lambda) [\varphi(x\lambda), S(x\lambda) + G^2(x\lambda)] [\varphi(x\lambda), G(x\lambda)]^3, \end{aligned}$$

Alle diese Formeln haben wir einzeln abgeleitet, um folgendes allgemeine Theorem, das sie sämtlich als specielle Fälle in sich enthält und überaus einfach bewiesen werden kann, in ein klareres Licht zu stellen:

Die Formen $[\varphi(x\lambda), G(x\lambda)]_{x=1}^{\mu} \lambda=0$, $[\varphi(x\lambda), S(x\lambda)]_{x=1}^{\mu} \lambda=0$ und $[\varphi(x\lambda), T(x\lambda)]_{x=1}^{\nu} \lambda=0$ gehen, gebildet für $x\lambda - \lambda\Delta$ als cubische Grundform, beziehungsweise über in $G^{\mu-1}(x\lambda) [\varphi(x\lambda), G(x\lambda)]^{\mu}$, $G^{\mu}(x\lambda) [\varphi(x\lambda), S(x\lambda)]^{\mu}$ und $G^{\mu}(x\lambda) [\varphi(x\lambda), T(x\lambda)]^{\nu}$; $\mu \leq 4$ und $\nu \leq 6$.

Wenn nämlich irgend zwei simultane Covarianten in ihren Graden und Anfangsgliedern übereinstimmen, so sind dieselben identisch.*) Beispielsweise sind

$$\{[\varphi(x\lambda), T(x\lambda)]_{x=1}^{\nu} \lambda=0\}_{x\lambda - \lambda\Delta} \text{ und } [\varphi(x\lambda), T(x\lambda)]^{\nu} G^{\nu}(x\lambda)$$

zwei solche gleichgradige simultane Covarianten von $G(x\lambda)$ und $\varphi(x\lambda)$ mit denselben Anfangsgliedern, weshalb sie selbst miteinander zusammenfallen.

Im Späteren wird namentlich noch der besondere Fall $\nu = 3$ zur Anwendung kommen, wonach

$$(12) \quad \begin{aligned} T(x\lambda) \varphi'''(x\lambda) - 3S^2(x\lambda) \varphi''(x\lambda) + 3S(x\lambda) T(x\lambda) \varphi'(x\lambda) - T^2(x\lambda) \varphi(x\lambda) \\ = -G^3(x\lambda) [\varphi(x\lambda), T(x\lambda)]^3. \end{aligned}$$

§ 4.

Berechnung der Formen Θ , H , K für $xP_j - \lambda R_j$ als cubische Grundform.

Nach der Definition von Θ , H und K ist

$$(1) \quad \Theta_{x\lambda - \lambda\Delta} = \Theta(x\lambda) = x^2\Theta - 2x\lambda H + \lambda^2 K,$$

und daher nach § 3., 2:

$$2) \quad H(x\lambda) = \Theta_1(x\lambda) G_2(x\lambda) - \Theta_2(x\lambda) G_1(x\lambda),$$

$$3) \quad \begin{aligned} K(x\lambda) &= \Theta_{11}(x\lambda) G_2^2(x\lambda) - 2\Theta_{12}(x\lambda) G_2(x\lambda) G_1(x\lambda) + \Theta_{22}(x\lambda) G_1^2(x\lambda) \\ &= \Theta G_2^2(x\lambda) + 2H G_2(x\lambda) G_1(x\lambda) + K G_1^2(x\lambda). \end{aligned}$$

*) Der Beweis, den Hermite in Crelle's Journal Bd. 52, S. 7-8 für einen speciellen Fall gegeben, gilt offenbar allgemein für irgend welche simultane Systeme.

Um die Bildung dieser Formen für $\kappa P_f - \lambda R_f$ durchzuführen, erinnern wir an die zweite Definition von H durch die Gleichung:

$$(4) \quad H = \frac{1}{9} \sum \frac{\partial S_f}{\partial u_i} \frac{\partial f}{\partial x_i} - S u_x^2.$$

Vermitteltst mehrmaliger Anwendung des δ -Prozesses erhält man aus dieser Formel successive die weiteren:

$$(5) \quad K + 3 S \Theta = \frac{1}{3} \sum \frac{\partial T_f}{\partial u_i} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{1}{9} \sum \frac{\partial S_f}{\partial u_i} \frac{\partial \Delta}{\partial x_i} - 4 T u_x^2,$$

$$(6) \quad T \Theta = \frac{1}{18} \sum \frac{\partial T_f}{\partial u_i} \frac{\partial \Delta}{\partial x_i} + \frac{S}{2} (H - S u_x^2),$$

$$(7) \quad S \Theta = \frac{1}{18} \sum \frac{\partial T_f}{\partial u_i} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{1}{18} \sum \frac{\partial S_f}{\partial u_i} \frac{\partial \Delta}{\partial x_i} - T u_x^2,$$

von denen die letzte durch Weghebung des Factors S bereits auf ihre einfachste Form gebracht worden ist. Ersetzt man in (7) und (5) f durch P_f , so folgen aus ihnen wegen der Werthe von S_p , S_p etc.:

$$(9) \quad \Theta_p = -R \left(\frac{1}{9} \sum \frac{\partial T_f}{\partial u_i} \frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{1}{9} \sum \frac{\partial \Delta}{\partial x_i} \frac{\partial S_f}{\partial u_i} \right) = -R (K - S \Theta)$$

$$(10) \quad H_p = \frac{1}{2} (\delta \Theta)_p = -2 R^2 (K T - 2 H S^2 + \Theta S T) \quad (\S 2., 8)$$

$$(11) \quad K_p = 4 R^4 (K + 3 S \Theta).$$

Behufs des Uebergangs zu den Formeln für $\kappa P_f - \lambda R_f$ als Grundform lassen wir in den letzten Gleichungen $\kappa f - \lambda \Delta$ an Stelle von f treten und erhalten dann nach (4) und (9) in § 3. für $\varphi(\kappa \lambda) = \Theta(\kappa \lambda)$:

$$(9_a) \quad \Theta_{\kappa P - \lambda R} = -R [\Theta(\kappa \lambda), G(\kappa \lambda)]^2$$

$$(10_a) \quad H_{\kappa P - \lambda R} = -2 R^2 [\Theta(\kappa \lambda), T(\kappa \lambda)]^2$$

$$K_{\kappa P - \lambda R} = 4 R^4 \{ G(\kappa \lambda) [\Theta(\kappa \lambda), G(\kappa \lambda)]^2 + 4 S(\kappa \lambda) \Theta(\kappa \lambda) \}.^*)$$

§ 5.

Betrachtung von F , ψ , N , N' , Ω , Π , L , M etc.

Gerade wie eine neue Darstellungsweise von $S \Theta$ zum Werthe von Θ_p führte, so werden wir zur Bildung von F_p durch Aufstellung eines zweiten Ausdrucks für $S F$ gelangen.**). Setzen wir symbolisch $\Theta = \Theta_x^2$, so ist nach der Definition von F :

$$F = (abu)^2 (\Theta au) (\Theta bu).$$

Multipliziert man diese Gleichung mit $2S$ und ersetzt das symbolische Produkt $2S(\Theta au)(\Theta bu)$ durch den Werth, welcher vermit-

*) Diese Formeln sind zuerst ohne Beweis von Clebsch und Gordan in der schon öfter citirten Abhandlung aufgestellt worden.

**) Eine andere Ableitung von F_p und ψ_p ist in § 7. meiner Habilitationsschrift gegeben.

$$(8) \left(\Sigma \pm \frac{\partial T_f}{\partial u_1} \frac{\partial F}{\partial u_2} x_3 \right)_P = 32 R^5 S \left\{ T \Sigma \pm \frac{\partial \Delta}{\partial x_1} \frac{\partial \psi}{\partial x_2} u_3 - S^2 \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial \psi}{\partial x_2} u_3 + 6 R f N \right.$$

Vermöge des Uebergangs von f zu $\alpha f - \lambda \Delta$ erhalten wir:

$$(7.) \left(\Sigma \pm \frac{\partial S_f}{\partial u_1} \frac{\partial F}{\partial u_2} x_3 \right)_{\alpha P - \lambda R} = -16 R^5 S(\alpha \lambda) \left\{ G_2(\alpha \lambda) \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial \psi}{\partial x_2} u_3 \right. \\ \left. + G_1(\alpha \lambda) \Sigma \pm \frac{\partial \Delta}{\partial x_1} \frac{\partial \psi}{\partial x_2} u_3 + 6 N (\Delta S_1(\alpha \lambda) + f S_2(\alpha \lambda)) \right\}.$$

$$(8.) \left(\Sigma \pm \frac{\partial T_f}{\partial u_1} \frac{\partial F}{\partial u_2} x_3 \right)_{\alpha P - \lambda R} = -32 R^5 S(\alpha \lambda) \left\{ T_2(\alpha \lambda) \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial \psi}{\partial x_2} u_3 \right. \\ \left. + T_1(\alpha \lambda) \Sigma \pm \frac{\partial \Delta}{\partial x_1} \frac{\partial \psi}{\partial x_2} u_3 - 6 R G(\alpha \lambda) (\alpha f - \lambda \Delta) N \right\}.$$

Aus den Werthen von $\psi_{\alpha P - \lambda R}$ und $\Delta_{\alpha P - \lambda R}$ folgen endlich unmittelbar die den letzten Formeln dualistisch gegenüberstehenden:

$$(9) \left(\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial \psi}{\partial x_2} u_3 \right)_{\alpha P - \lambda R} \\ = 16 R^4 S^2(\alpha \lambda) \left\{ \alpha \Sigma \pm \frac{\partial P_f}{\partial u_1} \frac{\partial \Phi}{\partial u_2} x_3 - \lambda \Sigma \pm \frac{\partial R_f}{\partial u_1} \frac{\partial \Phi}{\partial u_2} x_3 \right\}$$

$$(10) \left(\Sigma \pm \frac{\partial \Delta}{\partial x_1} \frac{\partial \psi}{\partial x_2} u_3 \right)_{\alpha P - \lambda R} \\ = -32 R^5 S^2(\alpha \lambda) \left\{ S_1(\alpha \lambda) \Sigma \pm \frac{\partial R_f}{\partial u_1} \frac{\partial \Phi}{\partial u_2} x_3 + S_2(\alpha \lambda) \Sigma \pm \frac{\partial P_f}{\partial u_1} \frac{\partial \Phi}{\partial u_2} x_3 \right\}.$$

worin man die Zwischenformen rechter Hand leicht durch solche des vollständigen Systems — allerdings auf Kosten der Eleganz und Symmetrie — ausdrücken könnte.

§ 6.

Ueber die Formen $B^{(5)}$.

Der Definition von B gemäss ist:

$$B_{\alpha f - \lambda \Delta} = B(\alpha \lambda) = \alpha^3 B - \alpha^2 \lambda \left(2 B' + \Sigma \pm \frac{\partial \Theta}{\partial x_1} \frac{\partial \Delta}{\partial x_2} u_3 \right) \\ + \alpha \lambda^2 \left(2 \Sigma \pm \frac{\partial H}{\partial x_1} \frac{\partial \Delta}{\partial x_2} u_3 + B'' \right) - \lambda^3 B'''.$$

Von der hier auftretenden Functionaldeterminante $\Sigma \pm \frac{\partial \Theta}{\partial x_1} \frac{\partial \Delta}{\partial x_2} u_3$ lässt sich leicht zeigen, dass sie mit B' identisch ist. Man hat:

$$B' = \Sigma \pm \frac{\partial H}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2} u_3 = 3 a_x (\alpha b u) (\alpha \alpha u)^2 b_x^2 + 3 \alpha_x b_x^2 (\alpha b u) (\alpha \alpha u)^2.$$

Wendet man auf den Factor $(\alpha b u) a_x$ im ersten Terme der rechten Seite die bekannte Grundidentität für symbolische Rechnung an, so bekommt man, da jedes symbolische Produkt mit einem Factor von der Form $(\alpha \alpha u) (\alpha \alpha v) (\alpha \alpha w)$ identisch verschwindet *):

*) Da $(\alpha \alpha u)^3 = 0$, so folgt durch wiederholte Differentiation, dass für beliebige u , v , und w , auch $(\alpha \alpha u) (\alpha \alpha v) (\alpha \alpha w) = 0$.

$$B' = 6a_x b_x^2 (ab a) (a a u)^2 = 6a_x b_x (ab u) (a a u) \cdot \{ba u\} a_x + \{ab u\} a_x + \{aab\} u_x\}.$$

Das erste Glied auf der rechten Seite dieser Gleichung ändert durch die Vertauschung von a mit b sein Zeichen, verschwindet also; das zweite Glied stimmt mit $\Sigma \pm \frac{\partial \Theta}{\partial x_1} \frac{\partial \Delta}{\partial x_2} u_3$ überein, und das dritte ist wieder Null, da

$$(aub) (a a u) (ab u) b_x a_x = (a a b) (a a u) b_x \{ (ab u) a_x + (a a u) b_x + (ab a) u_x \},$$

d. h. gleich einer Summe, deren sämtliche Terme verschwinden, der erste, weil er bei der Vertauschung von a mit b sein Zeichen ändert, die beiden letzten, weil ein jeder derselben einen Factor von der Form $(a a u)^2 (a a v)$ enthält. Aus der so erwiesenen Gleichung

$$(1) \quad B' = \Sigma \pm \frac{\partial H}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2} u_3 = \Sigma \pm \frac{\partial \Theta}{\partial x_1} \frac{\partial \Delta}{\partial x_2} u_3$$

folgt mittelst des δ -Prozesses:

$$(2) \quad B'' = \Sigma \pm \frac{\partial K}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2} u_3 = \Sigma \pm \frac{\partial H}{\partial x_1} \frac{\partial \Delta}{\partial x_2} u_3,$$

und der Werth von $B(x\lambda)$ nimmt jetzt folgende Gestalt an:

$$(3) \quad B(x\lambda) = x^3 B - 3x^2 \lambda B' + 3x \lambda^2 B'' - \lambda^3 B'''.$$

Die Ausdrücke $B'_{x_f - \lambda A} = B'(x\lambda)$, $B''(x\lambda)$ und $B'''(x\lambda)$ stehen also zu $B(x\lambda)$ in demselben Verhältnisse, wie die Functionen $\varphi'(x\lambda)$, $\varphi''(x\lambda)$ und $\varphi'''(x\lambda)$ zu $\varphi(x\lambda)$ in § 3., (2). Indem man die $B^{(i)}$ auch für die Grundform $x P_f - \lambda R_f$ zu berechnen sucht, gelangt man zu Ausdrücken wie $\Sigma \pm \frac{\partial \Theta}{\partial u_1} \frac{\partial S_f}{\partial u_2} x_3$, $\Sigma \pm \frac{\partial \Theta}{\partial u_1} \frac{\partial T_f}{\partial u_2} x_3$ etc., die also vorher zu untersuchen sind.

Da für beliebige v_i :

$$(4) \quad \Sigma \frac{\partial \Theta}{\partial u_i} v_i = -4 \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & v_1 \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & v_2 \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & () \end{vmatrix},$$

so ist speciell:

$$\Sigma \pm \frac{\partial \Theta}{\partial u_1} \frac{\partial S_f}{\partial u_2} x_3 = -4 \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & \frac{\partial S_f}{\partial u_2} x_3 - \frac{\partial S_f}{\partial u_3} x_2 \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & \frac{\partial S_f}{\partial u_3} x_1 - \frac{\partial S_f}{\partial u_1} x_3 \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & \frac{\partial S_f}{\partial u_1} x_2 - \frac{\partial S_f}{\partial u_2} x_1 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix}$$

Entwickelt man die Determinante rechts nach den Elementen der letzten Horizontalreihe, so zeigt sich u_x multiplicirt in die Produkte aus den einzelnen Determinanten der unvollständigen Systeme:

$$\begin{vmatrix} f_{1, x+1} & f_{2, x+1} & f_{3, x+1} \\ f_{1, x+2} & f_{2, x+2} & f_{3, x+2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial S_f}{\partial u_1} \frac{\partial S_f}{\partial u_2} \frac{\partial S_f}{\partial u_3} \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix},$$

und man hat also:

$$(5) \quad \Sigma \pm \frac{\partial \Theta}{\partial u_i} \frac{\partial S_f}{\partial u_j} x_j = 4 \begin{vmatrix} \Sigma \frac{\partial S_f}{\partial u_i} f_{i1} & \Sigma \frac{\partial S_f}{\partial u_i} f_{i2} & \Sigma \frac{\partial S_f}{\partial u_i} f_{i3} \\ f_1 & f_2 & f_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} \\ = 2B' [\S 4, (4)].$$

In ganz derselben Weise folgt nach (4):

$$(6) \quad \Sigma \pm \frac{\partial \Theta}{\partial u_i} \frac{\partial T_f}{\partial u_j} x_j = 4 \begin{vmatrix} \Sigma \frac{\partial T_f}{\partial u_i} f_{i1} & \Sigma \frac{\partial T_f}{\partial u_i} f_{i2} & \Sigma \frac{\partial T_f}{\partial u_i} f_{i3} \\ f_1 & f_2 & f_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} \\ = SB + B'' [\S 4, (5) \text{ und } (7)].$$

Durch wiederholte Anwendung des δ -Prozesses erhält man aus (5) und (6) mit Leichtigkeit die weiteren Formeln:

$$(7) \quad \begin{aligned} 2\Sigma \pm \frac{\partial H}{\partial u_i} \frac{\partial S_f}{\partial u_j} x_j &= 3SB + B'' \\ \Sigma \pm \frac{\partial K}{\partial u_i} \frac{\partial S_f}{\partial u_j} x_j &= 3SB' - B''' \\ 2\Sigma \pm \frac{\partial H}{\partial u_i} \frac{\partial T_f}{\partial u_j} x_j &= B''' - SB' + 4TB \\ \Sigma \pm \frac{\partial K}{\partial u_i} \frac{\partial T_f}{\partial u_j} x_j &= 4TB' - 2SB''. \end{aligned}$$

Die Bildung von B_P , B'_P etc. lässt sich nunmehr ohne Mühe ausführen. Es ist:

$$(8) \quad \begin{cases} B_P = R \left\{ \Sigma \pm \frac{\partial P_f}{\partial u_i} \frac{\partial K}{\partial u_j} x_j - S \Sigma \pm \frac{\partial P_f}{\partial u_i} \frac{\partial \Theta}{\partial u_j} x_j \right\} \\ \quad = R(TB''' - 3S^2B'' + 3STB' - T^2B) - R^2B, \\ B'_P = \left(\Sigma \pm \frac{\partial \Theta}{\partial x_i} \frac{\partial \Delta}{\partial x_j} u_j \right)_P = -2R^3(B''' - SB'), \\ B''_P = -4R^3B_P - 16R^4S(SB'' - 2TB' + S^2B) \\ B'''_P = 8R^6(B''' - 3SB'). \end{cases}$$

Indem man in diesen Gleichungen $x_f \sim \lambda \Delta$ an Stelle von f treten lässt, gehen dieselben nach den Formeln des § 3. unmittelbar in die folgenden über:

$$(8_a) \quad \begin{cases} B_{xP-\lambda R} = -R \{ [B(x\lambda), T(x\lambda)]^3 + RB(x\lambda) \} \\ B'_{xP-\lambda R} = -2R^3 \{ G(x\lambda) [B(x\lambda), G(x\lambda)]^3 + 2[B(x\lambda), S(x\lambda)] \} \\ B''_{xP-\lambda R} = 4R^4 G(x\lambda) \{ [B(x\lambda), T(x\lambda)]^3 - RB(x\lambda) \} \\ \quad \quad \quad - 16R^4 S(x\lambda) [S(x\lambda), B(x\lambda)]^2 \\ B'''_{xP-\lambda R} = 8R^6 \{ G^2(x\lambda) [B(x\lambda), G(x\lambda)]^3 - 2T(x\lambda) B(x\lambda) \}. \end{cases}$$

§ 7.

Betrachtung der Formen $E^{(i)}$ und $Z^{(i)}$.

Mit Rücksicht auf den bekannten Werth von L_{xj-iA} hat man sofort:

$$E_{xj-iA} = G(x\lambda) \left(x^2 E - x\lambda \left(E' + \Sigma \pm \frac{\partial L}{\partial x_1} \frac{\partial \Delta}{\partial x_2} u_3 \right) + \lambda^2 E'' \right).$$

Da aber vermittelt der Formeln (1) und (2) im vorigen Paragraphen leicht gezeigt wird, dass

$$(1) \quad E' = \Sigma \pm \frac{\partial M}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2} u_3 = \Sigma \pm \frac{\partial L}{\partial x_1} \frac{\partial \Delta}{\partial x_2} u_3,$$

so wird der Ausdruck von E_{xj-iA} folgender:

$$(2) \quad E_{xj-iA} = G(x\lambda) (x^2 E - 2x\lambda E' + \lambda^2 E'') = G(x\lambda) E(x\lambda),$$

woraus dann unmittelbar die weiteren fließen:

$$(3) \quad E'_{xj-iA} = G(x\lambda) \{ E_1(x\lambda) G_2(x\lambda) - E_2(x\lambda) G_1(x\lambda) \} = G(x\lambda) E'(x\lambda).$$

$$(4) \quad E''_{xj-iA} = G(x\lambda) \{ E_{11}(x\lambda) G_2^2(x\lambda) - 2E_{12}(x\lambda) G_2(x\lambda) G_1(x\lambda) + E_{22}(x\lambda) G_1^2(x\lambda) \} \\ = G(x\lambda) E''(x\lambda).$$

Mit diesem Systeme hängen aufs engste die Formeln für Z_{xP-iR} , Z_{xP-iR} etc. zusammen. Dieselben ergeben sich durch genauere Betrachtung der Functional-determinanten, die aus der evidenten Zwischenform u_x , aus S_f (oder T_f) und aus L (oder M) sich bilden lassen. Vermöge der Gleichungen (5)–(7) des vorigen Paragraphen findet man nach einer kleinen Rechnung:

$$(5) \quad \Sigma \pm \frac{\partial L}{\partial u_1} \frac{\partial S_f}{\partial u_2} x_3 = \frac{1}{2} E' + \frac{1}{2} S N u_x,$$

$$\Sigma \pm \frac{\partial L}{\partial u_1} \frac{\partial T_f}{\partial u_2} x_3 = \frac{1}{4} E'' + \frac{1}{4} S E + \frac{1}{2} T N u_x,$$

und indem man auf diese Beziehungen den δ -Prozess anwendet:

$$(6) \quad \Sigma \pm \frac{\partial M}{\partial u_1} \frac{\partial S_f}{\partial u_2} x_3 = -\frac{1}{4} E' + \frac{1}{4} S E + \frac{1}{2} T N u_x$$

$$\Sigma \pm \frac{\partial M}{\partial u_1} \frac{\partial T_f}{\partial u_2} x_3 = -\frac{1}{2} S E' + T E + \frac{1}{2} S^2 N u_x^2.$$

Hiernach sind die Werthe von Z_P , Z_P etc. diese:

$$(7) \quad \begin{aligned} Z_P &= 4R^3 S \left\{ T \Sigma \pm \frac{\partial L}{\partial u_1} \frac{\partial S_f}{\partial u_2} x_3 - S \Sigma \pm \frac{\partial L}{\partial u_1} \frac{\partial T_f}{\partial u_2} x_3 \right\} \\ &= -R^3 S \{ S E'' - 2 T E' + S^2 E \} \\ Z'_P &= -4R^3 S E'^* \\ Z''_P &= 4R^6 S (S E'' - 2 T E' + S^2 E) - 8R^6 S^2 (E'' - S E). \end{aligned}$$

*) Man findet nämlich die beiden Ausdrücke:

$$\left(\Sigma \pm \frac{\partial L}{\partial x_1} \frac{\partial \Delta}{\partial x_2} u_3 \right)_P = -4E' R^2 S - \frac{32}{3} R^3 S' N$$

Lässt man in diesem System $\kappa f - \lambda \Delta$ an Stelle von f treten, so geht dasselbe mit Rücksicht auf (8) in § 3. für

über in: $\varphi(\kappa\lambda) = E(\kappa\lambda)$, $\varphi'(\kappa\lambda) = E'(\kappa\lambda)$ etc.

$$(7_a) \begin{cases} Z_{\kappa f - \lambda R} = -R^3 S(\kappa\lambda) [E(\kappa\lambda), S(\kappa\lambda)]^2, \\ Z'_{\kappa f - \lambda R} = -4R^3 S(\kappa\lambda) [E(\kappa\lambda), G(\kappa\lambda)], \\ Z''_{\kappa f - \lambda R} = -4R^6 S(\kappa\lambda) \{G(\kappa\lambda)[E(\kappa\lambda), S(\kappa\lambda)]^2 - 2S(\kappa\lambda)[E(\kappa\lambda), G(\kappa\lambda)]^2\}; \end{cases}$$

Die Formeln für $E_{\kappa f - \lambda R}$, $E'_{\kappa f - \lambda R}$ etc. erhält man durch den bekannten Uebergang von f zu P_f . Wir schicken zunächst die Werthe von $Z_{\kappa f - \lambda A}$, $Z'_{\kappa f - \lambda A}$ etc. voraus, die sich wegen

$$\Sigma \pm \frac{\partial L'}{\partial x_1} \frac{\partial \Delta}{\partial x_2} u_3 = \Sigma \pm \frac{\partial M'}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2} u_3 - \frac{3}{2} N' u_x \text{ (vgl. Anm. auf dieser Seite)}$$

folgendermassen gestalten:

$$Z_{\kappa f - \lambda A} = G(\kappa\lambda) (\kappa^2 Z - 2\kappa\lambda Z' + \lambda^2 Z'') = G(\kappa\lambda) Z(\kappa\lambda)$$

$$(8) \quad Z'_{\kappa f - \lambda A} = G(\kappa\lambda) (Z_1(\kappa\lambda) G_2(\kappa\lambda) - Z_2(\kappa\lambda) G_1(\kappa\lambda)) = G(\kappa\lambda) Z'(\kappa\lambda)$$

$$Z''_{\kappa f - \lambda A} = G(\kappa\lambda) (Z G_2^2(\kappa\lambda) + 2Z' G_2(\kappa\lambda) G_1(\kappa\lambda) + Z'' G_1^2(\kappa\lambda)) = G(\kappa\lambda) Z''(\kappa\lambda)$$

Lässt man jetzt in den Ausdrücken für

$$\Sigma \pm \frac{\partial L}{\partial u_1} \frac{\partial T_f}{\partial u_2} x_3 \text{ und } \Sigma \pm \frac{\partial M}{\partial u_1} \frac{\partial S_f}{\partial u_2} x_3$$

— vgl. (5) und (6) — P_f an Stelle von f treten, so ergibt sich:

$$\frac{1}{4} E''_f + \frac{1}{4} S_f E_f = -64 R^6 S (TZ' - S^2 Z)$$

$$- \frac{1}{4} E'_f + \frac{1}{4} S_f E_f = 64 R^6 S (SZ'' - TZ).$$

Durch Auflösung dieser Gleichungen nach E_f und E''_f , und indem man überdiess in der zweiten Formel des Systemes (7) f durch P_f ersetzt, folgt endlich:

$$E_f = -16 R^3 S (SZ'' - 2TZ + S^2 Z)$$

$$(8) \quad E'_f = -64 R^6 SZ'$$

$$E''_f = 64 R^6 S (SZ'' - 2TZ + S^2 Z) - 128 R^6 S^2 (Z'' - SZ),$$

oder verallgemeinert:

$$E_{\kappa f - \lambda R} = -16 R^3 S(\kappa\lambda) [Z(\kappa\lambda), S(\kappa\lambda)]^2$$

$$(8_a) \quad E'_{\kappa f - \lambda R} = -64 R^6 S(\kappa\lambda) [Z(\kappa\lambda), G(\kappa\lambda)]$$

$$E''_{\kappa f - \lambda R} = 64 R^6 S(\kappa\lambda) \{G(\kappa\lambda) [Z(\kappa\lambda), S(\kappa\lambda)]^2 - 2S(\kappa\lambda) [Z(\kappa\lambda), G(\kappa\lambda)]^2\}$$

$$\left(\Sigma \pm \frac{\partial M'}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2} u_3 \right)_f = -4ER^3S + \frac{32}{3} R^3 S^2 N$$

und hieraus

$$\left(\Sigma \pm \frac{\partial L'}{\partial x_1} \frac{\partial \Delta}{\partial x_2} u_3 \right)_f = \left(\Sigma \pm \frac{\partial M'}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2} u_3 \right)_f - \frac{64}{3} R^3 S^2 N.$$

Ersetzt man hierin f durch P_f , so folgt

$$\Sigma \pm \frac{\partial L'}{\partial x_1} \frac{\partial \Delta}{\partial x_2} u_3 = \Sigma \pm \frac{\partial M'}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2} u_3 - \frac{3}{2} N' u_x \text{ oder}$$

$$\Sigma \pm \frac{\partial L'}{\partial x_1} \frac{\partial \Delta}{\partial x_2} u_3 + \Sigma \pm \frac{\partial M'}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2} u_3 = 2Z.$$

§ 8.

Ueber das Formensystem der Contravariante $kS_f - lT_f$.

Die in den früheren Paragraphen gefundenen Resultate lassen sich leicht auf den Fall übertragen, wenn an Stelle von $\kappa P_f - \lambda R_f$ die zugehörige Form $kS_f - lT_f$ zu Grunde gelegt wird*).

Da

$$\kappa P_f - \lambda R_f = (\kappa T - \lambda S^2) S_f - (\kappa S - \lambda T) T_f,$$

so braucht man bloss:

$$(1) \quad \kappa T - \lambda S^2 = k \quad \kappa S - \lambda T = l,$$

oder aufgelöst:

$$(1_a) \quad lT - kS = R\lambda \quad lS^2 - kT = R\kappa$$

zu setzen, um sofort aus einer Formel für $\varphi_{\kappa P_f - \lambda R_f}$ eine andere für $\varphi_{kS_f - lT_f}$ zu erhalten. Durch die linearen Substitutionen (1_a) gehen $G(\kappa\lambda)$, $S(\kappa\lambda)$ und $T(\kappa\lambda)$ in die folgenden Ausdrücke über:

$$G(\kappa\lambda) = -\frac{1}{R^3} \{k^4 (T^2 + 3S^3) - 16k^3 l \cdot TS^2 + 6k^2 l^2 (S^3 + 3T^2) S - 8l^3 k \cdot T(S^3 + T^2) + l^4 (5T^2 - S^2) S^3\} = -\frac{1}{R^3} \Gamma(kl),$$

$$S(\kappa\lambda) = -\frac{1}{R^2} \{k^4 \cdot 3S - 4k^3 l T - 6k^2 l^2 S^2 + 12l^3 k \cdot ST - l^4 (S^3 + 3T^2)\} = -\frac{1}{R^2} \Sigma(kl),$$

$$T(\kappa\lambda) = \frac{1}{R^4} \{k^6 T \cdot (T^2 - 9S^3) + 6k^5 l (5T^2 + 3S^3) S^2 - 15k^4 l^2 (3T^2 + 5S^3) TS + 20k^3 l^3 (T^2 + 7S^3) T^2 - 30k^2 l^4 (5T^2 + 2S^3) TS^2 + 6k l^5 (6T^4 + T^2 S^3 + S^6) S + l^6 (5S^3 T^2 - 8T^4 - 5S^6) T\} = \frac{1}{R^4} \Upsilon(kl).$$

Es lässt sich leicht beweisen, dass $\Gamma(kl)$ und $\Upsilon(kl)$ zu $\Sigma(kl)$ in demselben Verhältnisse stehen, als $S(\kappa\lambda)$ und $T(\kappa\lambda)$ zu $G(\kappa\lambda)$. Nach dem Satze, dass durch eine lineare Transformation sich die Hesse'sche Determinante nur um das Quadrat des Substitutionsmodulus ändert, hat man nämlich**)

$$\frac{1}{R^4} \{\Sigma_{11}(kl) \Sigma_{22}(kl) - \Sigma_{12}^2(kl)\} = \frac{1}{R^2} S_{11}(\kappa\lambda) S_{22}(\kappa\lambda) - S_{12}^2(\kappa\lambda) \\ = \frac{1}{R} G(\kappa\lambda) = -\frac{1}{R^4} \Gamma(kl),$$

oder

*) Vgl. Cayley in den Philosoph. Transact. Vol. 146 und 151.

**) Die ursprüngliche Function ist im vorliegenden Falle $S(\kappa\lambda)$, die linear transformirte $-\frac{1}{R^2} \Sigma(kl)$, die Substitutionsdeterminante $\frac{1}{R}$.

$$(3) \quad \Gamma(kl) = - \{ \Sigma_{11}(kl) \Sigma_{22}(kl) - \Sigma_{12}^2(kl) \}.$$

Da ferner die Fundamentaldeterminante irgend zweier Formen von κ und λ sich durch die linearen Transformationen (1_a) — abgesehen von dem Substitutionsmodul — reproducirt, so ist*)

$$\begin{aligned} \frac{1}{R^2} (\Sigma_1(kl) \Gamma_2(kl) - \Sigma_2(kl) \Gamma_1(kl)) &= \frac{1}{R} (S_1(\kappa\lambda) G_2(\kappa\lambda) - S_2(\kappa\lambda) G_1(\kappa\lambda)) \\ &= \frac{1}{R} T(\kappa\lambda) = \frac{1}{R^2} \Gamma(kl), \end{aligned}$$

oder

$$(4) \quad \Gamma(kl) = \Sigma_1(kl) \Gamma_2(kl) - \Sigma_2(kl) \Gamma_1(kl).$$

Vermittelst der Formeln (2) ist die Bildung der Invarianten S , T , R , sowie sämtlicher in § 5. behandelter Combinanten für die Grundform $kS_f - lT_f$ geleistet. Auch für die übrigen Formen in § 2. und die meisten in § 5. ist die Uebertragung äusserst einfach, wofür man nur von der eben erwähnten Eigenschaft der Functionaldeterminanten Gebrauch macht, sich bei einer linearen Transformation bloss um den Modul der Substitution zu ändern.

Beispielsweise haben wir zur Berechnung von $\Delta_{kS_f - lT_f}$ nach § 2., (7_a) den Ausdruck $P_f \frac{\partial S(\kappa\lambda)}{\partial \lambda} + R_f \frac{\partial S(\kappa\lambda)}{\partial \kappa}$ durch die Substitutionen (1_a) zu transformiren. Es ist aber**)

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{R^2} \left\{ \frac{\partial \Sigma(kl)}{\partial l} \frac{\partial (kS_f - lT_f)}{\partial k} - \frac{\partial \Sigma(kl)}{\partial k} \frac{\partial (kS_f - lT_f)}{\partial l} \right\} \\ &= \frac{1}{R} \left\{ \frac{\partial S(\kappa\lambda)}{\partial \lambda} \frac{\partial (\kappa P_f - \lambda R_f)}{\partial \kappa} - \frac{\partial S(\kappa\lambda)}{\partial \kappa} \frac{\partial (\kappa P_f - \lambda R_f)}{\partial \lambda} \right\}, \end{aligned}$$

und somit:

$$(5) \quad \Delta_{kS_f - lT_f} = 2(\Sigma_2(kl) S_f + \Sigma_1(kl) T_f).$$

Bedeutend mehr Rechnung jedoch erfordert diese Methode der Uebertragung bei F , Θ , H etc., überhaupt bei all den Formen φ , deren $\varphi_{\kappa P_f - \lambda R_f}$ noch durch andere simultane Covarianten als durch Fundamentaldeterminanten sich ausdrücken.

Zur Bildung von $F_{kS_f - lT_f}$ wäre z. B. die Transformation von

$$\Delta^2 T_{11}(\kappa\lambda) + 2\Delta f T_{12}(\kappa\lambda) + f^2 T_{22}(\kappa\lambda) = [(\kappa f - \lambda \Delta)^2, T(\kappa\lambda)]^2$$

durch die Substitutionen (1_a) nöthig. Nach der Fundamentealeigenschaft der Covarianten gelangt man hiedurch zu dem Ausdrucke

$$\Gamma_{11}(kl)(T\Delta - S^2 f)^2 + 2\Gamma_{12}(kl)(S\Delta - Tf)(T\Delta - S^2 f) + \Gamma_{22}(kl)(S\Delta - Tf)^2,$$

*) Als die Originalformen sind $S(\kappa\lambda)$ und $G(\kappa\lambda)$, als die linear transformirten $-\frac{1}{R^2} \Sigma(kl)$ und $-\frac{1}{R^2} \Gamma(kl)$ zu betrachten.

**) Die ursprünglichen Formen sind jetzt $\kappa P_f - \lambda R_f$ und $S(\kappa\lambda)$, welche durch die Substitution (1^a) in $kS_f - lT_f$ und $-\frac{1}{R^2} \Sigma(kl)$ übergehen.

aus dem zur endgiltigen Berechnung von $F_{kS_f-lT_f}$ der Factor R auszuscheiden wäre. Noch höhere Potenzen der Discriminante wären bei anderen Formen abzusondern, so dass es besser sein wird, dieselben direkt durch andere Hilfsmittel zu berechnen.

Um wieder ein Beispiel anzuführen, so hat man:

$$\Theta_{kS_f-lT_f} = k^2 (ss_1x)^2 u_s u_{s_1} - 2kl (stx)^2 u_s u_t + l (tt_1x)^2 u_t u_{t_1}.$$

Aus der Formel für K_P ergibt sich mit Rücksicht auf den Werth von Δ_P sofort:

$$(ss_1x)^2 u_s u_{s_1} = K + 3S\Theta,$$

und hieraus durch den δ Prozess:

$$(stx)^2 u_s u_t = 2SH + 2T\Theta$$

$$(tt_1x)^2 u_t u_{t_1} = 4TH - S(K - S\Theta),$$

so dass man hat:

$$(6) \Theta_{kS_f-lT_f} = \Theta(3Sk^2 - 4Tkl - S^2l^2) + 2H(-2Sk l + 2Tl^2) + K(k^2 - S^2l^2).$$

Diese Formel befolgt nicht, wie die entsprechende für Θ_{kP-lR} , eine einfache Regel. Das Gleiche tritt bei der Bildung von höheren Formen für $kS_f - lT_f$ ein; immer scheint mit der Ausscheidung der nöthigen Potenz von R die Gesetzmässigkeit zu verschwinden.

Wir führen daher für diese Functionen die Rechnung, als von geringerem theoretischen Interesse, nicht mehr durch, bemerken übrigens, dass sich die auf die Formen $B^{(4)}$, $Z^{(4)}$ und $E^{(4)}$ bezügliche unmittelbar an die Werthe von B'' , Z'' und E'' anknüpfen lässt, und dass in Folge des Ausdrucks von $\Delta_{kS_f-lT_f}$ auch für die Grundfunction $kS_f - lT_f$ ein Theorem, analog dem in § 2., (8a) enthaltenen, existirt.

§ 9.

Ueber die Bildung von Relationen zwischen den Formen von f .

Bei näherer Betrachtung des in § 1. aufgestellten vollständigen Systems zeigt sich, dass jede alternirende (windschiefe) Form desselben die Functionaldeterminante zweier anderer Formen und der evidenten Zwischenform ist*). Will man also die Quadrate und Produkte dieser alternirenden Formen durch directe darstellen, so hat man bloss die Quadrate und Produkte solcher Functionaldeterminanten zu bilden. Es kann diess dem bekannten Multiplicationstheorem gemäss geschehen, wofür die eine Functionaldeterminante nach den u , und die andere

*) Ω und Π stimmen nach Clebsch und Gordan bis auf Zahlenfactoren mit $\Sigma \pm \frac{\partial L}{\partial u_1} \frac{\partial M}{\partial u_2} x_3$ und $\Sigma \pm \frac{\partial L'}{\partial x_1} \frac{\partial M'}{\partial x_2} u_3$ überein.

nach den x_i gebildet ist. Der letztere Fall wird im allgemeinen wirklich stattfinden, da wir im Verlaufe der früheren Paragraphen die meisten windschiefen Formen zum Behufe ihrer Bildung für $\kappa P_j - \lambda R_j$ auf solch doppelte Weise ausgedrückt haben. In der hier angegebenen Art sind z. B. von Clebsch und Gordan Ω^2 und ΩN durch directe Covarianten ausgedrückt worden. Für Forraen, die diese zweifache Darstellungsweise nicht zulassen, muss die eben dargelegte Methode durch andere ersetzt werden. Wenigstens sehr oft leistet diesen Ersatz eine allgemeine Formel, vermöge deren das Quadrat der Functional-determinante von irgend zwei ternären Formen v, w und der evidenten Zwischenform u_x durch die Producte und Potenzen dieser letzteren selbst ausgedrückt wird. Der Weg, zu derselben zu gelangen, ist im Principe schon von Clebsch in Bd. 63 des Borchardt'schen Journals S. 102 gezeigt worden.

Wenn W eine beliebige homogene Function der drei Variabeln x_i bedeutet, so werden wir im Folgenden nach Vorgang von Clebsch den Coefficienten von w_{ik} in der Determinante $\Sigma \pm w_{11} w_{22} w_{33}$ kurz mit W_{ik} und

$$\begin{vmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} & a_1 & b_1 & c_1 & . \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} & a_2 & b_2 & c_2 & . \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} & a_3 & b_3 & c_3 & . \\ a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 & 0 & . \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & 0 & 0 & 0 & . \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & 0 & 0 & 0 & . \\ . & . & . & . & . & . & . \end{vmatrix} \text{ mit } \begin{pmatrix} a & b & c & . \\ \alpha & \beta & \gamma & . \end{pmatrix}_w$$

bezeichnen.

Nach dieser Definition ist für beliebige Werthe der u_i und a_i :

$$(\Sigma \pm w_1 a_2 u_3)^2 = - \begin{pmatrix} w & a & u \\ w & a & u \end{pmatrix}_w.$$

Indem man in der Determinante rechter Hand die Elemente w_i der vierten Horizontal- und der vierten Verticalreihe zerstört, geht diese Gleichung über in:

$$(1) \quad (\Sigma \pm w_1 a_2 u_3)^2 = w \cdot \begin{pmatrix} a & u \\ a & u \end{pmatrix}_w + a_x^2 \begin{pmatrix} u \\ u \end{pmatrix}_w - 2 a_x u_x \begin{pmatrix} u \\ u \end{pmatrix}_w + u_x^2 \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}_w.$$

Ersetzt man hierin die w_i durch die Differentialquotienten v_i einer andern beliebigen homogenen Function v , während man an Stelle der a_i die w_i treten lässt, so bekommt man

$$(2) \quad (\Sigma \pm v_1 w_2 u_3)^2 = v \cdot \begin{pmatrix} w & u \\ w & u \end{pmatrix}_v + w^2 \begin{pmatrix} u \\ u \end{pmatrix}_v - 2 w \cdot u_x \begin{pmatrix} w \\ w \end{pmatrix}_v + u_x^2 \begin{pmatrix} w \\ w \end{pmatrix}_v.$$

Die Determinante $\begin{pmatrix} w & u \\ w & u \end{pmatrix}_v$ stimmt mit $(\Sigma \pm w_1 a_2 u_3)^2$ überein, wenn man nach der Quadrirung $a_i a_k = v_{ik}$ annimmt. Durch diese Substitution geht aber $a_i a_x$ in v_i , a_x^2 in v und $\begin{pmatrix} a & u \\ a & u \end{pmatrix}_w$ in

$(w_{22}v_{33} + w_{33}v_{22} - 2w_{23}v_{23})u_1^2 + 2(w_{13}v_{12} + w_{12}v_{13} - w_{11}v_{23} - w_{23}v_{11})u_3u_2 + \dots$
d. h. in $-2P_1$ über, wenn wir mit $2P_1$ den Coefficienten von λ in

$\binom{u}{w}_o + \lambda w$ bezeichnen; es wird so aus (1):

$$(3) \quad \binom{u}{w}_o = -v \binom{u}{w}_w - 2P_1 w - 2u_x \binom{v}{u}_w - u_x^2 \Sigma \Sigma W_{ik} v_{ik},$$

und somit aus (2):

$$(4) \quad (\Sigma \pm v_1 w_2 u_3)^2 = v^2 \binom{u}{w}_w - 2v \cdot w P_1 + w^2 \binom{u}{u}_o - 2u_x \{v \binom{v}{u}_w + w \binom{w}{u}_o\} \\ - u_x^2 \{v \cdot \Sigma \Sigma W_{ik} v_{ik} + \Sigma \Sigma V_{ik} w_i w_k\}.$$

Da die linke Seite dieser Gleichung sich bei der Vertauschung von v mit w nicht ändert, so muss das gleiche auch auf der rechten stattfinden, und es kann also in derselben

$$(5) \quad v \Sigma \Sigma W_{ik} v_{ik} + \Sigma \Sigma V_{ik} w_i w_k = w \Sigma \Sigma V_{ik} w_{ik} + \Sigma \Sigma W_{ik} v_i v_k^*)$$

gesetzt werden.

Nimmt man beispielsweise in (4) für v die ternäre cubische Grundform f und für w ihre Determinante Δ , so folgt sofort

$$(6) \quad N^2 = -18(Kf^2 - 2Hf\Delta + \Theta\Delta^2) + 6u_x(2(\Delta L - fM) + \psi u_x)$$

und durch Uebergang von f zu P_f :

$$(7) \quad N^2 = 18 \{KSS_f^2 - 4HP_fS_f + \Theta(S^2S_f^2 - 4TS_fT_f + ST_f^2)\} \\ + 24u_x(2(LR_f - MP_f) + \Phi u_x).$$

Die Gleichung (4) wird zwar das gesuchte Resultat nicht stets so direkt liefern, wie in dem eben behandelten Beispiele für N ; immerhin aber liefert sie die nöthige Grundlage, von der aus die Entwicklung der aufzustellenden Relation keine principiellen Schwierigkeiten mehr darbietet.

Ueberdiess kann man durch Anwendung des δ -Processes die Anzahl der bereits bekannten Formeln bedeutend vermehren und vermittelst der in dieser Arbeit gegebene Resultate zu jeder Formel sofort die ihr dualistisch entsprechende auffinden.

*) Siehe Hesse in Crelles Journal Bd. 52. S. 100. Auch die Formeln (3) und (4) können als Verallgemeinerungen der Resultate betrachtet werden, die Hesse im 41. Bde. des citirten Journals S. 292 gegeben hat.

nach den x_i gebildet ist. Der letztere Fall wird im allgemeinen wirklich stattfinden, da wir im Verlaufe der früheren Paragraphen die meisten windschiefen Formen zum Behufe ihrer Bildung für $xP_f - \lambda R_f$ auf solch doppelte Weise ausgedrückt haben. In der hier angegebenen Art sind z. B. von Clebsch und Gordan Ω^2 und ΩN durch directe Covarianten ausgedrückt worden. Für Formen, die diese zweifache Darstellungsweise nicht zulassen, muss die eben dargelegte Methode durch andere ersetzt werden. Wenigstens sehr oft leistet diesen Ersatz eine allgemeine Formel, vermöge deren das Quadrat der Functional-determinante von irgend zwei ternären Formen v, w und der evidenten Zwischenform u_x durch die Producte und Potenzen dieser letzteren selbst ausgedrückt wird. Der Weg, zu derselben zu gelangen, ist im Principe schon von Clebsch in Bd. 63 des Borchardt'schen Journals S. 102 gezeigt worden.

Wenn W eine beliebige homogene Function der drei Variablen x_i bedeutet, so werden wir im Folgenden nach Vorgang von Clebsch den Coefficienten von w_{ik} in der Determinante $\Sigma \pm w_{11} w_{22} w_{33}$ kurz mit W_{ik} und

$$\begin{vmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} & a_1 & b_1 & c_1 & . \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} & a_2 & b_2 & c_2 & . \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} & a_3 & b_3 & c_3 & . \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 0 & 0 & 0 & . \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & 0 & 0 & 0 & . \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & 0 & 0 & 0 & . \end{vmatrix} \quad \text{mit} \begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}_w$$

bezeichnen.

Nach dieser Definition ist für beliebige Werthe der u_i und a_i :

$$(\Sigma \pm w_1 a_2 u_3)^2 = - \begin{pmatrix} w & a & u \\ w & a & u \end{pmatrix}_w.$$

Indem man in der Determinante rechter Hand die Elemente w_i der vierten Horizontal- und der vierten Verticalreihe zerstört, geht diese Gleichung über in:

$$(1) \quad (\Sigma \pm w_1 a_2 u_3)^2 = w \cdot \begin{pmatrix} a & u \\ a & u \end{pmatrix}_w + a_x^2 \begin{pmatrix} u \\ u \end{pmatrix}_w - 2 a_x u_x \begin{pmatrix} u \\ u \end{pmatrix}_w + u_x^2 \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}_w.$$

Ersetzt man hierin die w_i durch die Differentialquotienten v_i einer andern beliebigen homogenen Function v , während man an Stelle der a_i die u_i treten lässt, so bekommt man

$$(2) \quad (\Sigma \pm v_1 u_2 u_3)^2 = v \cdot \begin{pmatrix} w & u \\ w & u \end{pmatrix}_v + u_x^2 \begin{pmatrix} u \\ u \end{pmatrix}_v - 2 v \cdot u_x \begin{pmatrix} u \\ u \end{pmatrix}_v + u_x^2 \begin{pmatrix} w \\ w \end{pmatrix}_v.$$

Die Determinante $\begin{pmatrix} w & u \\ w & u \end{pmatrix}_v$ stimmt mit $(\Sigma \pm w_1 a_2 u_3)^2$ überein, wenn man nach der Quadrirung $a_i a_k = v_{ik}$ annimmt. Durch diese Substitution geht aber $a_i a_x$ in v_i , a_x^2 in v und $\begin{pmatrix} a & u \\ a & u \end{pmatrix}_w$ in

$(w_{22}v_{33} + w_{33}v_{22} - 2w_{23}v_{23})u_1^2 + 2(w_{13}v_{12} + w_{12}v_{13} - w_{11}v_{23} - w_{23}v_{11})u_3u_2 + \dots$
d. h. in $-2P_1$ über, wenn wir mit $2P_1$ den Coefficienten von λ in

$\binom{u}{w \circ + \lambda w}$ bezeichnen; es wird so aus (1):

$$(3) \quad \binom{w \ u}{w \ u}_o = -v \binom{u}{u}_w - 2P_1 w - 2u_x \binom{v}{u}_w - u_x^2 \Sigma \Sigma W_{ik} v_{ik},$$

und somit aus (2):

$$(4) \quad (\Sigma \pm v_1 w_2 u_3)^2 = v^2 \binom{u}{u}_w - 2v.w P_1 + w^2 \binom{u}{u}_o - 2u_x \{v \binom{v}{u}_w + w \binom{w}{u}_o\} \\ - u_x^2 \{v . \Sigma \Sigma W_{ik} v_{ik} + \Sigma \Sigma V_{ik} w_i w_k\}.$$

Da die linke Seite dieser Gleichung sich bei der Vertauschung von v mit w nicht ändert, so muss das gleiche auch auf der rechten stattfinden, und es kann also in derselben

$$(5) \quad v \Sigma \Sigma W_{ik} v_{ik} + \Sigma \Sigma V_{ik} w_i w_k = w \Sigma \Sigma V_{ik} w_{ik} + \Sigma \Sigma W_{ik} v_i v_k^*)$$

gesetzt werden.

Nimmt man beispielsweise in (4) für v die ternäre cubische Grundform f und für w ihre Determinante Δ , so folgt sofort

$$(6) \quad N^2 = -18(Kf^2 - 2H/\Delta + \Theta\Delta^2) + 6u_x(2(\Delta L - fM) + \psi u_x$$

und durch Uebergang von f zu P_f :

$$(7) \quad N^2 = 18 \{KSS_f^2 - 4HP_fS_f + \Theta(S^2S_f^2 - 4TS_fT_f + ST_f^2)\} \\ + 24u_x(2(LR_f - MP_f) + \Phi u_x).$$

Die Gleichung (4) wird zwar das gesuchte Resultat nicht stets so direkt liefern, wie in dem eben behandelten Beispiele für N ; immerhin aber liefert sie die nöthige Grundlage, von der aus die Entwicklung der aufzustellenden Relation keine principiellen Schwierigkeiten mehr darbietet.

Ueberdiess kann man durch Anwendung des δ -Processes die Anzahl der bereits bekannten Formeln bedeutend vermehren und vermittelst der in dieser Arbeit gegebene Resultate zu jeder Formel sofort die ihr dualistisch entsprechende auffinden.

*) Siehe Hesse in Crelles Journal Bd. 52. S. 100. Auch die Formeln (3) und (4) können als Verallgemeinerungen der Resultate betrachtet werden, die Hesse im 41. Bde. des citirten Journals S. 292 gegeben hat.