Sur les équations différentielles ordinaires du premier ordre.

Par

A. KORKINE à St. Pétersbourg.

De toutes les parties du calcul intégrale, qui ont été l'objet des travaux systématiques des géomètres, la plus imparfaite est certainement celle, qui s'occupe des équations différentielles.

La grande généralité des questions, qui s'y présentent, les innombrables particularités relatives aux différents cas et principalement le manque des méthodes de calcul ne permettent pas encore de faire une théorie générale de quelque classe que ce soit de telles équations.

Les anciens géomètres et surtout l'immortel Euler, en vue de multiplier des matériaux, se sont occupés de rechercher des équations intégrables au moyen des signes mathématiques usités et des signes des quadratures. Ils nous ont laissé des exemples admirables, où l'ingéniosité de l'analyse témoigne assez de la sagacité des auteurs.

Dans ces derniers temps on a essayé d'appliquer aux équations différentielles la théorie des fonctions d'une variable complexe, résultant elle même de l'étude des fonctions algébriques et de leurs intégrales. Mais, avec la grande généralité de ses théorèmes, elle a aussi une imperfection essentielle; à savoir, le défaut des méthodes pour le calcul des fonctions inconnues. Or, ce calcul est la véritable intégration d'une équation, et le but définitif de son analyse.

Pour avancer dans l'intégration des équations différentielles la seule théorie des fonctions ne suffira donc pas; à cet effet il faut y associer des considérations, qui lui sont complètement étrangères.

Je pense donc, qu'ayant pour but le calcul des inconnus, nous n'avons jusqu'à présent d'autre moyen que de suivre la marche des anciens géomètres, c'est à dire, en nous bornant à l'étude attentive des équations particulières, rechercher de nouvelles équations intégrables; et cela d'autant plus, que des cas particuliers très simples, traités convenablement, peuvent conduire à des conclusions très générales.

Pour faire un essai dans cette voie, je prends une des plus simples équations différentielles dont Euler s'est occupé; c'est l'équation

$$y \, dy + (P + Qy) \, dx = 0.$$

En étudiant les formes sous lesquelles se présente son intégrale générale, on en trouve une, qui est très remarquable.

En effet dans bien des cas, comme cela résulte des recherches, d'Euler, elle est donnée par l'équation

$$(2) \quad (y - v_1)^{m_1} (y - v_2)^{m_2} \dots (y - v_n)^{m_n} = C,$$

où $m_1, m_2, \dots, m_n$ sont des constantes données dont aucune n'est égale à zéro, C une constante arbitraire et $v_1, v_2, \dots, v_n$ des fonctions de x , différentes entre elles.

Je me propose d'abord, en supposant le nombre n de facteurs donné, d'ailleurs quelconque, de trouver toutes les équations différentielles

$$y \, dy + (P + Qy) \, dx = 0,$$

qui admettent une intégrale générale de cette forme et en même temps de déterminer $v_1, v_2, \dots, v_n$ comme fonctions de x .

Parmi les travaux des autres géomètres relatifs à l'équation d'Euler et lui semblables je citerai celui d'Abel *). Ce géomètre a trouvé plusieurs formes des multiplicateurs et réduit à cette équation une autre

$$(y + s) \, dy + (p + qy + ry^2) \, dx = 0$$

plus générale.

En prenant la fonction

$$- \int Q \, dx$$

pour une nouvelle variable indépendante, que nous continuerons de désigner par x , on réduit l'équation d'Euler à une autre

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = 1 + \frac{R(x)}{y}$$

plus simple et qui est lui équivalente.

Minding **) dans un mémoire remarquable donne des théorèmes généraux très importants concernant les multiplicateurs de certaines équations, dont celle d'Euler est un cas particulier, et il ajoute plusieurs exemples nouveaux à ceux d'Euler.

L'équation (1) a fait dernièrement le sujet d'une dissertation de M. Kořalovicz ***) en langue russe. Il se propose cette question: étant

*) Abel. Oeuvres complètes. Nouvelle édition. Tome II. page 26.

**) Minding. Beiträge zur Integration der Differentialgleichungen erster Ordnung. Mémoires de l'Académie des sciences de St. Pétersbourg. VII^e série. Tome V. n^o 1. 1862.

***) Kořalovicz. Recherches sur l'équation différentielle $y \, dy - y \, dx = R \, dx$. 1894.

donnée la fonction $R(x)$, reconnaître, si l'équation (1) est intégrable sous la forme (2). Il considère principalement le cas, où $R(x)$ est la somme d'un nombre fini de termes de la forme ax^{λ} . Quoique M. Kořalovicz ne soit pas parvenu à la solution complète de la question, il a trouvé, en se servant des séries, plusieurs résultats intéressants concernant la fonction $R(x)$, le nombre n de facteurs de l'intégrale générale et les constantes λ .

Après avoir résolu le problème que je me suis proposé pour l'équation d'Euler, je passe à l'équation

$$M(y) dx + N(y) dy = 0,$$

$M(y)$ et $N(y)$ étant des fonctions entières de y dont les coefficients sont des fonctions quelconques de x .

Pour conserver l'analogie avec l'équation d'Euler, je fais les restrictions suivantes: je suppose que le degré du polynôme $M(y)$ ne soit pas supérieur à celui de $N(y)$ et que l'équation $N(y) = 0$, en y regardant y comme inconnu, n'ait pas de racines multiples.

Je me propose, relativement à l'équation

$$M(y) dx + N(y) dy = 0,$$

de résoudre le même problème, à savoir, de trouver tous les cas, où elle est intégrable sous la forme (2).

On pourrait par la même méthode traiter cette équation en n'y faisant point les restrictions mentionnées, mais je me bornerai pour le présent au cas particulier précédent, qui est lui même assez général, en me proposant de revenir sur ce sujet dans une autre occasion.

Les résultats trouvés pour l'équation d'Euler reparaissent avec quelques modifications dans la recherche sur l'équation

$$M(y) dx + N(y) dy = 0.$$

La résolution du problème se réduit à l'intégration des systèmes d'équations différentielles simultanées, dont le nombre dépend de n et par conséquent reste indéterminé, quand n est arbitraire.

Je me contente de réduire le calcul des inconnus à la résolution des équations finies et aux éliminations, dont l'analyse appartient à l'algèbre.

§ 1.

Soit x la variable indépendante et R une fonction de x ; proposons nous de trouver toutes les valeurs de R telles que l'équation

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = 1 + \frac{R}{y}$$

ait une intégrale générale de la forme

$$(2) \quad P(y - v_1)^{m_1} (y - v_2)^{m_2} \dots (y - v_n)^{m_n} = C,$$

où P est une fonction de x , la signification des autres lettres ayant été expliquée ci-dessus.

La condition nécessaire et suffisante pour que cela ait lieu consiste dans l'égalité de la valeur de $\frac{dy}{dx}$, qui se déduit de l'équation (2) par la différentiation, à celle, qui est donnée par l'équation (1).

Faisons pour abrégé

$$\frac{dP}{dx} = P', \quad \frac{dv_i}{dx} = v'_i, \quad \frac{dy}{dx} = y';$$

alors, en prenant les logarithmes des deux termes de l'équation (2), et en différenciant on aura

$$\frac{P'}{P} - \sum \frac{m_i v'_i}{y - v_i} + y' \sum \frac{m_i}{y - v_i} = 0,$$

où les sommes se rapportent à l'indice i , qui parcourt les valeurs 1, 2, 3, . . . , i .

En comparant la valeur de y' tirée de cette équation à $1 + \frac{R}{y}$ que donne l'équation (1), on aura la condition mentionnée dans l'égalité

$$(3) \quad -\frac{P'}{P} + \sum \frac{m_i v'_i}{y - v_i} = \left(1 + \frac{R}{y}\right) \sum \frac{m_i}{y - v_i},$$

qui doit être identique.

Or en la débarrassant des dénominateurs, on voit que le coefficient de y^{n+1} est $-\frac{P'}{P}$ dans le premier terme et zéro dans le second. Donc il faut qu'il soit $P' = 0$ et P une constante.

On peut faire $P = 1$ et les équations (2) et (3) deviennent

$$(2) \quad (y - v_1)^{m_1} (y - v_2)^{m_2} \dots (y - v_n)^{m_n} = C,$$

$$(3) \quad \sum \frac{m_i v'_i}{y - v_i} = \left(1 + \frac{R}{y}\right) \sum \frac{m_i}{y - v_i}.$$

Faisons pour abrégé

$$F(y) = (y - v_1)(y - v_2) \dots (y - v_n) \\ = y^n + a_1 y^{n-1} + a_2 y^{n-2} + \dots + a_{n-1} y + a_n,$$

de sorte que

$$(4) \quad a_1 = -(v_1 + v_2 + \dots + v_n),$$

$$a_2 = v_1 v_2 + v_1 v_3 + v_2 v_3 + \dots, \quad \dots a_n = (-1)^n v_1 v_2 \dots v_n$$

et posons encore

$$(5) \quad \sum \frac{m_i}{y - v_i} = \frac{F_1(y)}{F(y)}.$$

Le numérateur $F_1(y)$ est une fonction entière de y , n'ayant aucun facteur commun, entier en y , avec le dénominateur $F(y)$.

En multipliant l'équation (3) par $F(y)$ et en ayant égard à l'équation (5), dans le premier terme on aura une fonction entière de y et le second se présentera sous la forme

$$(y + R) \frac{F_1(y)}{y}.$$

Or R étant supposé différent de zéro, il faut que $F_1(y)$ soit divisible par y . Pour qu'elle satisfasse à cette condition il faut et il suffit que l'on ait $F_1(0) = 0$. Cela se réduit en vertu de l'égalité (5) à l'équation

$$(6) \quad \sum \frac{m_i}{v_i} = 0.$$

Cette équation se trouve dans la dissertation de M. Kořalovicz.

Faisons abstraction du cas, où R est une constante, car alors l'équation proposée (1) est intégrable par la séparation des variables et l'intégrale générale ne se présente pas sous la forme (2).

Cela posé, il est évident, que les valeurs de $v_1', v_2', \dots, v_n'$ sont différentes de zéro. En effet en supposant $v_i' = 0$, il suit de l'équation (3) que $v_i = -R$ et R est une constante, ce qui n'a pas lieu.

Multiplions maintenant l'équation (3) par $y - v_i$ et faisons ensuite $y = v_i$; il viendra

$$(7) \quad v_i' = 1 + \frac{R}{v_i} \dots (i = 1, 2, 3, \dots, n).$$

Ainsi les fonctions $v_1, v_2, \dots, v_n$ sont des solutions de l'équation différentielle (1), ce qui suit encore de l'intégrale générale (2). Ce résultat est un cas particulier de celui qu'a démontré Minding pour les multiplicateurs des équations du premier ordre*).

Les $n + 1$ équations (6) et (7) peuvent remplacer la condition (3) et sont par conséquent non seulement nécessaires, mais encore suffisantes.

En effet supposons qu'elles soient satisfaites par les valeurs de $v_1, v_2, \dots, v_n$; alors en faisant

$$F_1(y) = y\varphi(y),$$

on voit, qu'en vertu de l'équation (6), $\varphi(y)$ sera une fonction entière de y . Or comme on a

$$\sum \frac{m_i}{y - v_i} = \frac{F_1(y)}{F(y)} = \frac{y\varphi(y)}{F(y)},$$

*) Beiträge zur Integration der Differentialgleichungen erster Ordnung. Mémoires de l'Académie des sciences de St. Pétersbourg VII^e série. Tome V. n^o 1. 1862.

on en déduit

$$(8) \quad m_i = \frac{F_1(v_i)}{F'(v_i)} = \frac{v_i \varphi(v_i)}{F'(v_i)},$$

$F'(v_i)$ étant la valeur de $\frac{\partial F(y)}{\partial y}$ pour $y = v_i$. Ensuite en vertu de cette équation on a

$$\sum \frac{m_i}{v_i(y - v_i)} = \sum \frac{\varphi(v_i)}{F'(v_i)(y - v_i)} = \frac{\varphi(y)}{F'(y)} = \frac{1}{y} \sum \frac{m_i}{y - v_i}.$$

Or $v_1, v_2, \dots, v_n$ satisfaisant aux équations (7), cette égalité donne

$$\begin{aligned} \sum \frac{m_i v_i'}{y - v_i} &= \sum \frac{m_i \left(1 + \frac{R}{v_i}\right)}{y - v_i} = \sum \frac{m_i}{y - v_i} + R \sum \frac{m_i}{v_i(y - v_i)} \\ &= \left(1 + \frac{R}{y}\right) \sum \frac{m_i}{y - v_i}, \end{aligned}$$

ce qui est l'équation (3).

Il est évident d'ailleurs que la fraction

$$\frac{\varphi(y)}{F'(y)} = \frac{1}{y} \sum \frac{m_i}{y - v_i} = \frac{1}{y + R} \sum \frac{m_i v_i'}{y - v_i}$$

est un multiplicateur de l'équation (1), car en présentant cette dernière sous la forme

$$y dy - (y + R) dx = 0$$

et en multipliant par $\frac{\varphi(y)}{F'(y)}$, on aura

$$\frac{d}{dx} \sum m_i \log(y - v_i) = 0.$$

De là on obtient l'équation (2).

On peut donc énoncer ce résultat:

Pour que l'équation (1) ait une intégrale générale (2), il faut et il suffit que la fonction

$$F_1(y) = (y - v_1)(y - v_2) \cdots (y - v_n) \sum \frac{m_i}{y - v_i}$$

soit divisible par y et que $v_1, v_2, \dots, v_n$ soient des solutions de l'équation (1).

§ 2.

Il suit de la condition

$$(6) \quad \frac{m_1}{v_1} + \frac{m_2}{v_2} + \cdots + \frac{m_{n-1}}{v_{n-1}} + \frac{m_n}{v_n} = 0,$$

que l'une des quantités $v_1, v_2, \dots, v_n$ est une fonction des autres.

Nous regarderons v_n comme fonction de $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$; sa valeur sera donc

$$(9) \quad v_n = - \frac{m_n}{\frac{m_1}{v_1} + \frac{m_2}{v_2} + \dots + \frac{m_{n-1}}{v_{n-1}}}.$$

Or cela impose à R une forme déterminée comme fonction de $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$.

En effet la valeur (9) de v_n doit satisfaire à l'équation (1).

En différenciant l'équation (6) on aura

$$v_n' = - \frac{v_n^2}{m_n} \left(m_1 \frac{v_1'}{v_1^2} + m_2 \frac{v_2'}{v_2^2} + \dots + m_{n-1} \frac{v_{n-1}'}{v_{n-1}^2} \right).$$

Désignons par k un des nombres $1, 2, 3, \dots, n-1$; alors des équations (7) on déduit

$$m_k \cdot \frac{v_k'}{v_k^2} = \frac{m_k}{v_k^2} + R \frac{m_k}{v_k^3}.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation précédente on aura

$$v_n' = - \frac{v_n^2}{m_n} \left[\frac{m_1}{v_1^2} + \frac{m_2}{v_2^2} + \dots + \frac{m_{n-1}}{v_{n-1}^2} + R \left(\frac{m_1}{v_1^3} + \frac{m_2}{v_2^3} + \dots + \frac{m_{n-1}}{v_{n-1}^3} \right) \right],$$

ou bien,

$$v_n' = - \frac{v_n^2}{m_n} \left(\sum \frac{m_i}{v_i^2} + R \sum \frac{m_i}{v_i^3} \right) + 1 + \frac{R}{v_n}.$$

Pour que v_n satisfasse à l'équation

$$v_n' = 1 + \frac{R}{v_n},$$

$v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ étant des solutions de l'équation (1), il faut et il suffit qu'il soit

$$\sum \frac{m_i}{v_i^2} + R \sum \frac{m_i}{v_i^3} = 0.$$

On déduit de là

$$(10) \quad R = - \frac{\sum \frac{m_i}{v_i^2}}{\sum \frac{m_i}{v_i^3}},$$

la quantité v_n ayant dans cette formule la valeur (9)*.

*) Je remarque en passant, que si l'on donne la fonction R et le nombre n , l'équation (9) suffira en général pour trouver $v_1, v_2, \dots, v_n$ comme fonction de x et aussi les rapports constants

$$\frac{m_1}{m_n}, \frac{m_2}{m_n}, \dots, \frac{m_{n-1}}{m_n}.$$

La question que nous nous sommes proposée consiste donc maintenant dans la recherche des valeurs de $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$. Or $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ étant des solutions de l'équation (1), qu'on peut présenter sous la forme

$$yy' - y = R$$

et R ayant la valeur (10), tout se réduit à l'intégration de ce système d'équations simultanées

$$(11) \quad v_1 v_1' - v_1 = v_2 v_2' - v_2 = \dots = v_{n-1} v_{n-1}' - v_{n-1} = - \frac{\sum \frac{m_i}{v_i^2}}{\sum \frac{m_i}{v_i^3}}.$$

Nous allons supposer que le nombre entier n soit donnée, mais d'ailleurs quelconque. Il ne doit seulement pas être inférieur à deux.

Les constantes $m_1, m_2, \dots, m_n$ sont arbitraires; nous les regarderons comme des quantités données.

Cela posé, les équations (11) ont une infinité de solutions, car $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ dépendent non seulement de x , mais aussi de $n - 1$ constantes arbitraires indépendantes.

Pour avoir ces valeurs de $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$, il suffit de trouver un système complet de $n - 1$ intégrales indépendantes des équations (11).

Pour une valeur donnée de x on peut assigner arbitrairement les valeurs de $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$. Il s'en suit que toute équation entre elles et x ne contenant pas de constantes arbitraires doit être identique,

En effet alors les dérivées $R', R'', \dots$ sont des fonctions connues. En différentiant donc l'équation (9) un nombre suffisant de fois et en se servant de la formule (8) du § 4 pour éliminer après chaque différentiation les dérivées des sommes $\sum \frac{m_i}{v_i^3}$ on aura les équations

$$(7) \quad \sum \frac{m_i}{v_i^2} + R \sum \frac{m_i}{v_i^3} = 0, \\ \sum \frac{m_i}{v_i^3} + 5R \sum \frac{m_i}{v_i^4} + 3R^2 \sum \frac{m_i}{v_i^5} - R' \sum \frac{m_i}{v_i^3} = 0 \text{ etc.}$$

En y associant l'équation (6) on définira $v_1, v_2, \dots, v_n$ et les rapports mentionnées comme fonctions de x . Or ces rapports doivent être des constantes. Si quelqu'un d'entre eux ne l'est donc pas, c'est le signe que l'équation (2) n'est point une intégrale générale de l'équation différentielle (1). Si c'est le contraire, qui arrive, on s'assurera si les valeurs trouvées de $v_1, v_2, \dots, v_n$ sont des solutions de l'équation (1), et lorsqu'elles le sont cette intégrale générale est exprimée par l'équation

$$(y - v_1)^{\frac{m_1}{m_n}} (y - v_2)^{\frac{m_2}{m_n}} \dots (y - v_{n-1})^{\frac{m_{n-1}}{m_n}} (y - v_n) = C.$$

Enfin si parmi les équations (7) il y en a, qui sont des conséquences des autres et qu'elles ne donnent pas les valeurs de $v_1, v_2, \dots, v_n$ et des rapports mentionnés. leur comparaison avec les résultats énoncés au § 11 résout toujours la question.

ou, ce qui revient au même, une telle équation entre $x, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n$ devient identique en vertu de l'équation (6).

S'il arrive cependant pour des valeurs particulières de cas constantes, que quelques unes des quantités $v_1, v_2, \dots, v_n$ deviennent égales, le nombre des facteurs dans l'équation (2) sera inférieur à n ; par conséquent nous faisons abstraction de ce cas, ayant pour but de trouver $v_1, v_2, \dots, v_n$, qui se rapportent précisément au nombre n .

§ 3.

Passons maintenant à la recherche des intégrales du système (11).

Il y en a une qui est évidente. En effet, si nous présentons l'équation (5) sous la forme

$$y F(y) \sum \frac{m_i v_i'}{y - v_i} = (y + R) F(y) \sum \frac{m_i}{y - v_i} = (y + R) F_1(y)$$

et que nous comparons les coefficients de y^n dans les deux termes, nous aurons

$$\sum m_i v_i' = \sum m_i$$

et de là il vient

$$\sum m v_i = x \sum m_i + C',$$

C' étant une constante arbitraire.

Il existe encore une autre intégrale qu'on déduira directement des équations (7)

En effet, i et k étant deux indices différents, on a

$$v_i' = 1 + \frac{R}{v_i}, \quad v_k' = 1 + \frac{R}{v_k}$$

et par conséquent

$$v_i' - v_k' = -\frac{R}{v_i v_k} (v_i - v_k).$$

On obtient de là

$$\frac{d}{dx} \log [(v_i - v_k)^{m_k}] = -R \frac{m_k}{v_i v_k}.$$

Laissons i invariable et faisons parcourir à k toutes les valeurs 1, 2, 3, ... n à l'exception de i . Nous aurons $n - 1$ équations, qui, étant ajoutées ensemble, donnent

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \log [(v_i - v_1)^{m_1} (v_i - v_2)^{m_2} \dots (v_i - v_{i-1})^{m_{i-1}} (v_i - v_{i+1})^{m_{i+1}} \dots (v_i - v_n)^{m_n}] \\ = -R \frac{1}{v_i} \left(\frac{m_1}{v_1} + \frac{m_2}{v_2} + \dots + \frac{m_{i-1}}{v_{i-1}} + \frac{m_{i+1}}{v_{i+1}} + \dots + \frac{m_n}{v_n} \right). \end{aligned}$$

Or en vertu de la condition (6) on a

$$\frac{m_1}{v_1} + \frac{m_2}{v_2} + \dots + \frac{m_{i-1}}{v_{i-1}} + \frac{m_{i+1}}{v_{i+1}} + \dots + \frac{m_n}{v_n} = -\frac{m_i}{v_i}$$

Il est maintenant évident que $F_1(y)$ est divisible par y , car nous avons

$$\begin{aligned} b_{n-1} &= \sum m_i [v_i^{n-1} + a_1 v_i^{n-2} + a_2 v_i^{n-3} + \dots + a_{n-2} v_i + a_{n-1}] \\ &= \sum m_i \frac{F(v_i) - a_n}{v_i} = \sum m_i \frac{F(v_i)}{v_i} - a_n \sum \frac{m_i}{v_i}. \end{aligned}$$

Or $F(v_i) = 0$ et en vertu de l'équation (6) on a $\sum \frac{m_i}{v_i} = 0$, donc $b_{n-1} = 0$.

La fonction $\varphi(y)$ aura ainsi la valeur

$$\varphi(y) = b_0 y^{n-2} + b_1 y^{n-3} + b_2 y^{n-4} + \dots + b_{n-3} y + b_{n-2}.$$

Il est facile de voir, que $\varphi(y)$ n'est pas divisible par y , ou, ce qui revient au même, que b_{n-2} est différent de zéro.

En effet, en ayant égard à l'équation (6), on peut donner une autre forme aux coefficients $b_0, b_1, b_2, \dots, b_{n-3}, b_{n-2}$.

Nous avons

$$\begin{aligned} b_{n-2} &= \sum m_i [v_i^{n-2} + a_1 v_i^{n-3} + \dots + a_{n-3} v_i + a_{n-2}] \\ &= \sum m_i \cdot \frac{F(v_i) - a_{n-1} v_i - a_n}{v_i^2} \\ &= \sum m_i \frac{F(v_i)}{v_i^2} - a_{n-1} \sum \frac{m_i}{v_i} - a_n \sum \frac{m_i}{v_i} \\ &= -a_n \sum \frac{m_i}{v_i^2}, \end{aligned}$$

et ainsi de suite.

On aura donc

$$(15) \left\{ \begin{aligned} b_{n-2} &= -a_n \sum \frac{m_i}{v_i^2}, \\ b_{n-3} &= -a_{n-1} \sum \frac{m_i}{v_i^2} - a_n \sum \frac{m_i}{v_i^3}, \\ &\dots \dots \dots \\ b_1 &= -a_3 \sum \frac{m_i}{v_i^2} - a_4 \sum \frac{m_i}{v_i^3} - \dots - a_n \sum \frac{m_i}{v_i^{n-1}}, \\ b_0 &= \sum m_i = -a_2 \sum \frac{m_i}{v_i^2} - a_3 \sum \frac{m_i}{v_i^3} - \dots - a_{n-1} \sum \frac{m_i}{v_i^{n-1}} \\ &\quad - a_n \sum \frac{m_i}{v_i^n}. \end{aligned} \right.$$

Si maintenant on suppose $b_{n-2} = 0$, on aura

$$\sum \frac{m_i}{v_i^2} = 0,$$

car $a_n = (-1)^n v_1 v_2 \dots v_n$ est différent de zéro, les quantités $v_1, v_2, \dots, v_n$ étant des solutions de l'équation (1).

De l'équation

$$\sum \frac{m_i}{v_i^2} + R \sum \frac{m_i}{v_i^3} = 0,$$

où R diffère de zéro, on obtient encore

$$\sum \frac{m_i}{v_i^2} = 0.$$

Or en multipliant par $m_i v_i^{\alpha-1}$ l'équation

$$(7) \quad v_i' = 1 + \frac{R}{v_i},$$

faisant ensuite $i = 1, 2, 3, \dots, n$ et ajoutant, on aura

$$\sum m_i v_i^{\alpha-1} v_i' = \sum m_i v_i^{\alpha-1} + R \sum m_i v_i^{\alpha-2},$$

ou bien, en supposant que la constante α diffère de -1 ,

$$(\delta) \quad \frac{1}{\alpha} \frac{d}{dx} \sum m_i v_i^\alpha = \sum m_i v_i^{\alpha-1} + R \sum m_i v_i^{\alpha-2}.$$

Faisons ici

$$\alpha = -2, -3, -4, \dots;$$

alors en vertu des équations

$$\sum \frac{m_i}{v_i^2} = 0, \quad \sum \frac{m_i}{v_i^3} = 0,$$

on obtiendra

$$\sum \frac{m_i}{v_i^3} = 0,$$

s étant un entier positif quelconque.

Il s'en suit que tous les coefficients

$$b_0, b_1, b_2, \dots, b_{n-3}, b_{n-2}$$

s'évanouissent et que $\varphi(y)$ se réduit à zéro quelque soit y .

Or cela est impossible, car on aurait pour toute valeur de y

$$\frac{y \varphi(y)}{F(y)} = \sum \frac{m_i}{y - v_i} = 0$$

et par conséquent l'intégrale générale

$$\sum m_i \log(y - v_i) = \log C$$

de l'équation (1), dont la dérivée par rapport à y est identiquement zéro, ne dépendrait point de y . Donc la fonction $\varphi(y)$ n'est pas divisible par y .

§ 5.

Les racines de l'équation $\varphi(y) = 0$ sont des fonctions complètement déterminées de $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ la fonction v_n dans les coefficients $b_1, b_2, \dots, b_{n-2}$ ayant la valeur

$$(9) \quad v_n = - \frac{m_n}{\frac{m_1}{v_1} + \frac{m_2}{v_2} + \dots + \frac{m_{n-1}}{v_{n-1}}}.$$

On peut démontrer qu'elles sont inégales, si les constantes arbitraires qu'elles contiennent, restent indéterminées. En effet supposons le contraire.

La fonction $\varphi(y)$ étant du degré $n - 2$ au plus, il faut que n soit supérieur à trois, pour que l'équation $\varphi(y) = 0$ puisse avoir des racines multiples. Soit donc y une telle racine. Elle satisfait à deux équations

$$(16) \quad \frac{y \varphi(y)}{F(y)} = \sum \frac{m_i}{y - v_i} = 0,$$

$$(17) \quad \frac{\partial}{\partial y} \sum \frac{m_i}{y - v_i} = - \sum \frac{m_i}{(y - v_i)^2} = 0.$$

Différentions l'équation (16) par rapport à v_k , l'indice k ayant une des valeurs 1, 2, 3, ..., $n - 1$. Nous aurons

$$\frac{m_k}{(y - v_k)^2} + \frac{m_n}{(y - v_n)^2} \frac{\partial v_n}{\partial v_k} - \frac{\partial y}{\partial v_k} \sum \frac{m_i}{(y - v_i)^2} = 0.$$

Or de l'équation (9) on déduit

$$\frac{\partial v_n}{\partial v_k} = - \frac{m_k v_n^2}{m_n v_k^2},$$

donc, en vertu de l'équation (17), il viendra

$$\frac{m_k}{(y - v_k)^2} - \frac{m_k v_n^2}{v_k^2 (y - v_n)^2} = 0,$$

ou bien

$$\frac{v_k^2}{(y - v_k)^2} = \frac{v_n^2}{(y - v_n)^2}.$$

En attribuant à k les valeurs 1, 2, 3, ..., $n - 1$, nous aurons

$$\frac{v_n}{y - v_n} = \pm \frac{v_1}{y - v_1} = \pm \frac{v_2}{y - v_2} = \dots = \pm \frac{v_{n-1}}{y - v_{n-1}}.$$

Or il est évident, qu'on ne peut pas faire

$$\frac{v_1}{y - v_1} = \frac{v_2}{y - v_2},$$

cette équation se réduisant à

$$y(v_1 - v_2) = 0,$$

où y et $v_1 - v_2$ différent de zéro. Il faut donc qu'il soit

$$\frac{v_1}{y - v_1} = - \frac{v_2}{y - v_2}$$

et par la même raison

$$\frac{v_1}{y - v_1} = - \frac{v_3}{y - v_3}.$$

Or de là il résulte l'équation impossible

$$\frac{v_2}{y - v_2} = \frac{v_3}{y - v_3}.$$

Donc l'équation $\varphi(y) = 0$ n'a pas de racines multiples. Pour des valeurs particulières des constantes arbitraires elles sont au contraire possibles.

§ 6.

Toutes les racines de l'équation $\varphi(y) = 0$ sont des solutions de l'équation différentielle

$$(1) \quad y' = 1 + \frac{R}{y}.$$

En effet soit y une d'entre elles. On aura

$$(18) \quad \frac{y \varphi(y)}{F(y)} = \sum \frac{m_i}{y - v_i} = 0.$$

Or y n'étant pas égal à zéro, en vertu de l'équation

$$(3) \quad \sum \frac{m_i v_i'}{y - v_i} = \left(1 + \frac{R}{y}\right) \sum \frac{m_i}{y - v_i},$$

on obtient

$$\sum \frac{m_i v_i'}{y - v_i} = 0.$$

En ayant égard à cette équation, on déduit de l'équation (18)

$$\begin{aligned} y' \sum \frac{m_i}{y - v_i} &= \sum \frac{m_i(y' - v_i') + m_i v_i'}{y - v_i} \\ &= \sum \frac{m_i(y' - v_i')}{y - v_i} + \sum \frac{m_i v_i'}{y - v_i} = \sum \frac{m_i(y' - v_i')}{y - v_i} = 0. \end{aligned}$$

On obtient de là, en intégrant

$$(19) \quad \sum m_i \log(y - v_i) = \text{Const.}$$

ou bien

$$(20) \quad (y - v_1)^{m_1} (y - v_2)^{m_2} \dots (y - v_n)^{m_n} = \text{Const.}$$

La racine y est donc une solution particulière de l'équation différentielle (1).

Il est évident que la constante dans le second terme de l'équation (19) est arbitraire. On le voit de ce que le premier terme contient les $n - 1$ constantes arbitraires, qui figurent dans $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n$ et par conséquent dans y . D'ailleurs on s'en assure facilement de cette manière :

Supposons que la constante mentionnée soit un nombre déterminé ou une fonction de $m_1, m_2, \dots, m_n$ qui ne contient aucune constante arbitraire. L'équation (19) devient alors identique en vertu de la valeur (9) de v_n et de l'équation (18).

En regardant v_n et y comme fonctions de $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$, différencions l'équation (19) par rapport à v_k ; nous aurons

$$-\frac{m_k}{y-v_k} - \frac{m_n}{y-v_n} \frac{\partial v_n}{\partial v_k} + \frac{\partial y}{\partial v_k} \sum \frac{m_i}{y-v_i} = 0.$$

Mais

$$\frac{\partial v_n}{\partial v_k} = -\frac{m_k v_n^2}{m_n v_k^2}, \quad \sum \frac{m_i}{y-v_i} = 0,$$

donc

$$-\frac{m_k}{y-v_k} + \frac{m_k v_n^2}{v_k^2 (y-v_n)} = 0.$$

Il s'en suit

$$y = \frac{v_k v_n}{v_k + v_n}.$$

En donnant à l'indice k deux valeurs, par exemple 1 et 2, on en conclut

$$v_1 = v_2,$$

ce qui est inadmissible.

Ainsi chaque racine de l'équation $\varphi(y) = 0$, étant substituée dans la formule (20) à la place de y donne une intégrale du système (11). Nous en aurons de cette manière autant que l'équation $\varphi(y) = 0$ a des racines.

Dans le cas général, où la constante Σm_i diffère de zéro, le degré de la fonction $\varphi(y)$ est $n - 2$. Il sera $n - 3$ lorsque Σm_i est égale à zéro.

Dans la recherche des valeurs générales de $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ on n'a que ces deux cas pour s'en occuper. Cependant pour des valeurs particulières des constantes arbitraires contenues dans $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ le degré de $\varphi(y)$ peut s'abaisser encore, même jusqu'à zéro. Quoique tous ces cas soient compris dans le cas général, il est plus simple de traiter séparément les modifications des résultats qu'ils exigent. Il faut encore avoir égard aux racines multiples de l'équation $\varphi(y) = 0$.

§ 7.

En considérant le cas général, supposons donc que Σm_i n'est pas égale à zéro et soient

$$w_1, w_2, \dots, w_{n-2}$$

les $n - 2$ racines de l'équation $\varphi(y) = 0$.

De l'équation (20) on obtient $n - 2$ intégrales

$$(21) (w_k - v_1)^{m_1} (w_k - v_2)^{m_2} \dots (w_k - v_n)^{m_n} = C_k, \quad (k = 1, 2, 3, \dots, n-2).$$

En y associant les équations (6) et (12) on aura n équations pour déterminer n inconnues $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ et v_n comme fonctions de x et de $n - 1$ constantes arbitraires $C', C_1, C_2, \dots, C_{n-2}$.

Quant à l'intégrale (13) elle est dans tous les cas une fonction des intégrales (21) quelqu'en soit le nombre. Nous en parlerons donc après avoir exposé les résultats, qui se rapportent aux cas particuliers mentionnés ci-dessus. Faisons voir maintenant que les $n - 1$ intégrales

$$(21) (w_k - v_1)^{m_1} (w_k - v_2)^{m_2} \dots (w_k - v_n)^{m_n}, \quad (k = 1, 2, 3, \dots, n-2),$$

$$(12) m_1 v_1 + m_2 v_2 + \dots + m_n v_n - x \sum m_i$$

sont indépendentes.

En y regardant $w_1, w_2, \dots, w_{n-2}$ et v_n comme fonctions de $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ déterminées par les équations $\varphi(y) = 0$ et

$$(9) v_n = - \frac{m_n}{\frac{m_1}{v_1} + \frac{m_2}{v_2} + \dots + \frac{m_{n-1}}{v_{n-1}}},$$

on voit que la seule intégrale (12) contient la lettre x et par conséquent ne peut point être une fonction des intégrales (21).

Il nous faut donc démontrer que parmi ces dernières il n'y en a aucune qui soit une fonction des autres.

En ayant égard à ce qu'elles dépendent de $n - 1$ variables $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$, leur nombre étant $n - 2$, il nous reste à prouver, que leurs déterminants fonctionnels, pris par rapport à $n - 2$ de ces variables ne sont pas tous ensemble égaux à zéro. Nous allons voir que tous en sont différents.

Il est plus commode de prendre au lieu des intégrales (21) leurs logarithmes. Faisons donc pour abréger

$$\psi_\lambda = \sum m_i \log(w_\lambda - v_i),$$

l'indice λ ayant les valeurs $1, 2, 3, \dots, n - 2$ et la somme se rapportant à l'indice i .

Soit encore l un indice ayant les mêmes valeurs que λ . Alors la dérivée partielle de ψ_λ par rapport à v_l sera

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \psi_\lambda}{\partial v_l} + \frac{\partial \psi_\lambda}{\partial v_n} \cdot \frac{\partial v_n}{\partial v_l} + \frac{\partial \psi_\lambda}{\partial w_\lambda} \cdot \frac{\partial w_\lambda}{\partial v_l} \\ &= -\frac{m_l}{w_\lambda - v_l} - \frac{m_n}{w_\lambda - v_n} \frac{\partial v_n}{\partial v_l} + \frac{\partial w_\lambda}{\partial v_l} \cdot \sum \frac{m_i}{w_\lambda - v_i}. \end{aligned}$$

Or on a

$$\frac{\partial v_n}{\partial v_l} = -\frac{m_l v_n^2}{m_n v_l^2}, \quad \sum \frac{m_i}{w_\lambda - v_i} = 0;$$

done cette dérivée devient

$$m_l \left(-\frac{1}{w_\lambda - v_l} + \frac{v_n^2}{v_l^2 (w_\lambda - v_n)} \right) = \frac{m_l}{v_l^2} \left(\frac{v_l^2}{v_l - w_\lambda} - \frac{v_n^2}{v_n - w_\lambda} \right).$$

Soit D le déterminant fonctionnel

$$\sum \pm \frac{\partial \psi_1}{\partial v_1} \cdot \frac{\partial \psi_2}{\partial v_2} \dots \frac{\partial \psi_{n-2}}{\partial v_{n-2}}$$

des fonctions $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-2}$ par rapport aux variables $v_1, v_2, \dots, v_{n-2}$.

Il se décompose en déterminants partiels dont les éléments sont des fractions $-\frac{1}{w_\lambda - v_l}$ et $-\frac{1}{w_\lambda - v_n}$.

En effet soit

$$a_{\lambda l} = -\frac{1}{w_\lambda - v_l} = \frac{1}{v_l - w_\lambda},$$

λ désignant l'ordre de la ligne et l celui de la colonne, où se trouve l'élément $a_{\lambda l}$. Faisons

$$D_0 = \sum \pm a_{11} a_{22} \dots a_{n-2, n-2}$$

et désignons par D_l le déterminant, qu'on obtient de D_0 en remplaçant la lettre v_l par v_n , les autres lettres

$$v_1, v_2, \dots, v_{l-1}, v_{l+1}, \dots, v_n, w_1, w_2, \dots, w_{n-2}$$

restant sur leurs places. On aura

$$(22) \quad D = m_1 m_2 \dots m_{n-2} v_n^2 \left(\frac{1}{v_n^2} D_0 - \frac{1}{v_1^2} D_1 - \frac{1}{v_2^2} D_2 - \dots - \frac{1}{v_{n-2}^2} D_{n-2} \right).$$

Trouvons d'abord l'expression de D_0 , celles des autres déterminants s'en déduiront facilement.

Retranchons dans D_0 les éléments de la première colonne de leurs correspondants dans les autres et dans le déterminant ainsi obtenu ceux de la première lignes de leurs correspondants dans les autres; nous aurons cette formule de réduction

$$D_0 = (-1)^{n-2} \frac{(v_1 - v_2)(v_1 - v_3) \dots (v_1 - v_{n-2})}{(v_1 - w_1)(v_1 - w_2) \dots (v_1 - w_{n-2})} \cdot \frac{(w_1 - w_2)(w_1 - w_3) \dots (w_1 - w_{n-2})}{(v_2 - w_1)(v_3 - w_1) \dots (v_{n-2} - w_1)} \cdot D_0^{(1)},$$

où

$$D_0^{(1)} = \sum \pm a_{22} a_{33} \dots a_{n-2, n-2}$$

est le déterminant qu'on obtient de D_0 en y supprimant la première ligne et la première colonne.

En appliquant la même réduction à $D_0^{(1)}$ on l'exprimera en un autre déterminant

$$D_0^{(2)} = \sum \pm a_{33} a_{44} \dots a_{n-2, n-2},$$

qui se déduit de D_0 en y supprimant les deux premières lignes et les deux premières colonnes.

En continuant les réductions on parviendra à la valeur de D_0 , qu'on peut représenter de cette manière

$$(23) \quad D_0 = (-1)^{\frac{(n-2)(n-3)}{2}} \left(\sum m_i \right)^{n-2} \cdot \frac{\prod (v_k - v_{k'}) \cdot \prod (w_k - w_{k'})}{\varphi(v_1) \varphi(v_2) \dots \varphi(v_n)} \cdot \varphi(v_{n-1}) \varphi(v_n);$$

où $\prod (v_k - v_{k'})$ et $\prod (w_k - w_{k'})$ sont les produits de toutes les différences $v_k - v_{k'}$ et $w_k - w_{k'}$ dans lesquelles k et k' sont deux indices différents, qui parcourent les valeurs 1, 2, 3, ..., $n-2$ de telle manière qu'on a constamment $k < k'$. La fonction $\varphi(y)$ est comme précédemment

$$\varphi(y) = \sum m_i \cdot (y - w_1)(y - w_2) \dots (y - w_n).$$

Nous allons transformer l'expression (23) de D_0 , en nous servant de l'équation (8)

$$(8) \quad m_i = \frac{v_i \varphi(v_i)}{F'(v_i)}.$$

On en obtient

$$(24) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi(v_i) &= \frac{m_i}{v_i} F'(v_i) = \frac{m_i}{v_i} (v_i - v_1)(v_i - v_2) \dots \\ &\quad \dots (v_i - v_{i-1})(v_i - v_{i+1}) \dots (v_i - v_n) \\ &= (-1)^{i-1} \frac{m_i}{v_i} (v_1 - v_i)(v_2 - v_i) \dots \\ &\quad \dots (v_{i-1} - v_i)(v_i - v_{i+1})(v_i - v_{i+2}) \dots (v_i - v_n) \end{aligned} \right.$$

Par conséquent il vient

$$(25) \quad \varphi(v_1) \varphi(v_2) \dots \varphi(v_n) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \frac{m_1 m_2 \dots m_n}{v_1 v_2 \dots v_n} \prod (v_i - v_j)^2,$$

$\Pi(v_i - v_j)$ étant le produit de toutes les différences $v_i - v_j$, qu'on obtient quand les indices i et j différents entre eux parcourent les valeurs 1, 2, 3, . . . , n de telle manière que i reste constamment inférieur à j .

De même on a

$$\varphi(v_{n-1}) \varphi(v_n) = - \frac{m_{n-1} m_n}{v_{n-1} v_n} (v_1 - v_{n-1}) (v_2 - v_{n-1}) \dots (v_{n-2} - v_{n-1}) (v_{n-1} - v_n) \times \\ \times (v_1 - v_n) (v_2 - v_n) \dots (v_{n-2} - v_n) (v_{n-1} - v_n)$$

et encore

$$\varphi(v_{n-1}) \varphi(v_n) \Pi(v_k - v_k) = - \frac{m_{n-1} m_n}{v_{n-1} v_n} (v_{n-1} - v_n) \Pi(v_i - v_j).$$

En substituant cette valeur avec (25) dans l'expression (23) on aura

$$(26) \quad D_0 = \left(\sum m_i \right)^{n-2} \cdot \frac{v_1 v_2 \dots v_n}{m_1 m_2 \dots m_n} \cdot \frac{m_{n-1} m_n}{v_{n-1} v_n} \cdot \frac{\Pi(w_k - w_k)}{\Pi(v_i - v_j)} (v_{n-1} - v_n).$$

Pour avoir maintenant D_i il faut remplacer v_i par v_n dans la formule (23). Soit P_i ce que devient $\Pi(v_k - v_k)$ après cette substitution. Alors on aura

$$(27) \quad D_i = (-1)^{\frac{(n-2)(n-3)}{2}} \left(\sum m_i \right)^{n-2} \frac{\Pi(w_k - w_k)}{\varphi(v_1) \varphi(v_2) \dots \varphi(v_n)} P_i \varphi(v_{n-1}) \varphi(v_i).$$

Pour obtenir P_i il faut supprimer dans $\Pi(v_k - v_k)$ les facteurs

$$(v_1 - v_i) (v_2 - v_i) \dots (v_{i-1} - v_i) (v_i - v_{i+1}) (v_i - v_{i+2}) \dots (v_i - v_{n-2}),$$

qui contiennent v_i et les remplacer par les autres

$$(v_1 - v_n) (v_2 - v_n) \dots (v_{i-1} - v_n) (v_n - v_{i+1}) (v_n - v_{i+2}) \dots (v_n - v_{n-2}) = \\ = (-1)^{n-i-2} (v_1 - v_n) (v_2 - v_n) \dots (v_{i-1} - v_n) (v_{i+1} - v_n) \dots (v_{n-2} - v_n).$$

De cette manière il vient

$$P_i = \frac{(-1)^{n-i-2} \Pi(v_k - v_k) (v_1 - v_n) (v_2 - v_n) \dots (v_{i-1} - v_n) (v_{i+1} - v_n) \dots (v_{n-2} - v_n)}{(v_1 - v_i) (v_2 - v_i) \dots (v_{i-1} - v_i) (v_i - v_{i+1}) (v_i - v_{i+2}) \dots (v_i - v_{n-2})}.$$

De l'équation (24) on obtient encore

$$\varphi(v_{n-1}) \varphi(v_i) = (-1)^{n+i-3} (v_1 - v_{n-1}) (v_2 - v_{n-1}) \dots (v_i - v_{n-1}) \dots \\ \dots (v_{n-2} - v_{n-1}) (v_{n-1} - v_n) (v_1 - v_i) (v_2 - v_i) \dots (v_{i-1} - v_i) (v_i - v_{i+1}) \dots \\ \dots (v_i - v_{n-2}) (v_i - v_{n-1}) (v_i - v_n).$$

Donc, après de faciles réductions, il viendra

$$P_i \varphi(v_{n-1}) \varphi(v_i) = \frac{m_i m_{n-1}}{v_i v_{n-1}} (v_{n-1} - v_i) \Pi(v_i - v_j).$$

Cette valeur avec (25), étant substituées dans l'expression (27) de D_l , donnent

$$D_l = - \frac{v_1 v_2 \dots v_n}{m_1 m_2 \dots m_n} \cdot \frac{m_l m_{n-1}}{v_l v_{n-1}} \left(\sum m_i \right)^{n-2} \cdot \frac{\Pi(w_k - w_{k'})}{\Pi(v_i - v_j)} (v_{n-1} - v_l).$$

En faisant ici $l = 1, 2, 3, \dots, n-2$ nous aurons les valeurs de $D_1, D_2, \dots, D_{n-2}$. Substituons les avec la valeur (26) de D_0 dans l'équation (22); il viendra

$$\begin{aligned} D &= \frac{(\sum m_i)^{n-2}}{m_n} v_1 v_2 \dots v_{n-2} v_n^3 \frac{\Pi(w_k - w_{k'})}{\Pi(v_i - v_j)} \\ &\cdot \left[\frac{m_n}{v_n^3} (v_{n-1} - v_n) + \frac{m_1}{v_1^3} (v_{n-1} - v_1) + \frac{m_2}{v_2^3} (v_{n-1} - v_2) + \dots + \frac{m_{n-2}}{v_{n-2}^3} (v_{n-1} - v_{n-2}) \right] \\ &= \frac{(\sum m_i)^{n-2}}{m_n} v_1 v_2 \dots v_{n-2} v_n^3 \frac{\Pi(w_k - w_{k'})}{\Pi(v_i - v_j)} \\ &\cdot \left[v_{n-1} \left(\sum \frac{m_i}{v_i^3} - \frac{m_{n-1}}{v_{n-1}^3} \right) - \left(\sum \frac{m_i}{v_i^2} - \frac{m_{n-1}}{v_{n-1}^2} \right) \right] \\ &= \frac{(\sum m_i)^{n-2}}{m_n} v_1 v_2 \dots v_{n-2} v_n^3 \frac{\Pi(w_k - w_{k'})}{\Pi(v_i - v_j)} \left[v_{n-1} \sum \frac{m_i}{v_i^3} - \sum \frac{m_i}{v_i^2} \right]. \end{aligned}$$

En vertu de l'équation

$$(10) \quad R = - \frac{\sum \frac{m_i}{v_i^3}}{\sum \frac{m_i}{v_i^2}},$$

nous aurons donc

$$D = \frac{(\sum m_i)^{n-2}}{m_n} v_1 v_2 \dots v_{n-2} v_n^3 \frac{\Pi(w_k - w_{k'})}{\Pi(v_i - v_j)} \cdot \sum \frac{m_i}{v_i^3} (v_{n-1} + R).$$

Maintenant si nous supposons $D = 0$, nous devons faire

$$v_{n-1} + R = 0,$$

les autres facteurs étant différents de zéro. Or cela est impossible, car $-R$ n'est point une solution de l'équation (1) et il devrait l'être, étant égal à v_{n-1} .

Ainsi les $n-1$ fonctions (12) et (21) forment un système complet d'intégrales indépendantes des équations (11).

§ 8.

Maintenant occupons nous des cas, où le degré de $\varphi(y)$ devient inférieur à $n-2$. Il nous sera utile d'introduire la fonction entière de y

et encore

$$\sum m_i v_i^2 = 2C'x + C'',$$

C'' étant une nouvelle constante arbitraire.

Ainsi dans le cas, où $\sum m_i = 0$ et par conséquent où le degré de $\varphi(y)$ est $n - 3$, l'intégrale (12) sera remplacée par

$$\sum m_i v_i = C'$$

et au lieu de celle qui manque dans le groupe (21) on aura

$$\sum m_i v_i^2 = 2C'x + C''.$$

Dans la recherche des valeurs générales de $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$, où les constantes d'intégration restent arbitraires, il n'y a que ce seul cas particulier à considérer.

Cependant si non seulement on a $\sum m_i = 0$, mais encore si la constante C' prend la valeur zéro, les équations (14), (28), (29) montrent qu'on doit avoir

$$b_0 = 0, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = C'', \quad c_0 = 0, \quad c_1 = 0, \\ c_2 = \sum m_i v_i^2 v_i' = b_2 = C'',$$

donc on aura ces équations

$$\sum m_i v_i = 0, \quad \sum m_i v_i^2 = C'', \quad \sum m_i v_i^3 = 3C''x + C''''.$$

En général, si le degré de $\varphi(y)$ est $p < n - 2$, on a d'abord p intégrales

$$(21) \quad (w_k - v_1)^{m_1} (w_k - v_2)^{m_2} \dots (w_k - v_n)^{m_n} = C_k, \\ (k = 1, 2, 3, \dots, p)$$

et encore, comme le font voir les mêmes équations (14), (28), (29), les $n - p - 1$ équations

$$(30) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum m_i v_i = 0, \quad \sum m_i v_i^2 = 0, \dots, \sum m_i v_i^{n-p-3} = 0, \\ \sum m_i v_i^{n-p-2} = C^{(n-p-2)}, \\ \sum m_i v_i^{n-p-1} = (n - p - 1) C^{(n-p-2)} x + C^{(n-p-1)}, \end{array} \right.$$

où $C^{(n-p-2)}$ et $C^{(n-p-1)}$ sont des constantes arbitraires.

On a donc toujours $n - 1$ équations pour déterminer $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ comme fonctions de x .

Si le degré p de la fonction $\varphi(y)$ se réduit à zéro, le groupe (21) ne contient plus aucune intégrale et il reste seulement le groupe (30). Dans ce cas au lieu de la dernière des équations (30), qui devient

$$\sum m_i v_i^{n-1} = (n-1) C^{(n-2)} x + C^{(n-1)},$$

il est plus simple de prendre une autre équation.

En effet on a maintenant $\varphi(y) = b_{n-2}$ et par conséquent $b_{n-3} = 0$. Or d'après les équations (15) nous avons

$$\frac{b_{n-3}}{b_{n-2}} = \frac{\sum \frac{m_i}{v_i^3}}{\sum \frac{m_i}{v_i^2}} + \frac{a_{n-1}}{a_n} = -\frac{1}{R} - \left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \dots + \frac{1}{v_n} \right);$$

donc il vient

$$\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \dots + \frac{1}{v_n} = -\frac{1}{R}.$$

Mais des équations (7) on déduit

$$\frac{1}{v_i} = \frac{v_i' - 1}{R} \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n).$$

En substituant ces valeurs dans l'équation précédente on aura

$$v_1' + v_2' + \dots + v_n' = n - 1$$

et par conséquent

$$(31) \quad v_1 + v_2 + \dots + v_n = (n-1)x + C^{(n-1)}.$$

C'est cette équation qu'il est préférable de prendre au lieu de celle, que nous avons mentionnée.

Maintenant pour prendre en considération les racines multiples de l'équation $\varphi(y) = 0$ supposons d'abord que w_1 soit une racine de l'ordre r de multiplicité et que l'on ait

$$w_1 = w_2 = \dots = w_r;$$

il viendra

$$\varphi'(w_1) = 0, \quad \varphi''(w_1) = 0, \quad \dots, \quad \varphi^{(r-1)}(w_1) = 0,$$

les quantités $\varphi'(w_1)$, $\varphi''(w_1)$... étant les valeurs des dérivées

$$\frac{\partial \varphi(y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 \varphi(y)}{\partial y^2}, \quad \dots$$

pour $y = w_1$. La valeur de $\varphi^{(r)}(w_1)$ reste différente de zéro.

Dans le groupe (21) les r intégrales relatives aux valeurs $1, 2, 3, \dots, r$ de l'indice k se réduisent à une seule

$$(w_1 - v_1)^{m_1} (w_1 - v_2)^{m_2} \dots (w_1 - v_n)^{m_n} = C_1,$$

mais en compensation on y placera encore les $r - 1$ équations

$$\varphi'(w_1) = 0, \quad \varphi''(w_1) = 0, \quad \dots, \quad \varphi^{(r-1)}(w_1) = 0,$$

de sorte que le groupe (21) conserve encore r équations pour la racine

$$w_1 = w_2 = \dots = w_r.$$

Soit p le degré de $\varphi(y)$. Représentons p de toutes les manières possibles sous la forme d'une somme des nombres entiers positifs. Pour chaque représentation le groupe (21) a ses équations particulières.

Par exemple, g et h étant deux entiers supérieurs à l'unité, mais dont la somme $g + h$ ne surpasse pas p , nous pouvons faire p égal à $g + h$ plus une somme de $p - g - h$ unités.

Conformément à cette représentation de p , supposons que l'équation $\varphi(y) = 0$ ait une racine

$$w_1 = w_2 = \dots = w_g$$

de l'ordre g de multiplicité, une autre

$$w_{g+1} = w_{g+2} = \dots = w_{g+h}$$

de l'ordre h et $p - g - h$ racines simples

$$w_{g+h+1}, w_{g+h+2}, \dots, w_p.$$

D'après ce que nous avons dit, dans le groupe (21) il y aura p équations, distribuées de cette manière: pour la racine w_1 g équations

$$(w_1 - v_1)^{m_1} (w_1 - v_2)^{m_2} \dots (w_1 - v_n)^{m_n} = C_1, \\ \varphi'(w_1) = 0, \quad \varphi''(w_1) = 0, \dots, \varphi^{(g-1)}(w_1) = 0;$$

pour la racine w_{g+1} les autres en nombre h

$$(w_{g+1} - v_1)^{m_1} (w_{g+1} - v_2)^{m_2} \dots (w_{g+1} - v_n)^{m_n} = C_{g+1}, \\ \varphi'(w_{g+1}) = 0, \quad \varphi''(w_{g+1}) = 0, \dots, \varphi^{(h-1)}(w_{g+1}) = 0;$$

et enfin pour les racines simples encore $p - g - h$ équations

$$(w_k - v_1)^{m_1} (w_k - v_2)^{m_2} \dots (w_k - v_n)^{m_n} = C_k, \\ (k = g + h + 1, g + h + 2, \dots, p).$$

Pour chaque représentation de p on aura donc un groupe particulier des équations (21). En les prenant toutes, on épuiera tous les cas, où l'équation $\varphi(y) = 0$ puisse avoir des racines multiples.

Ainsi pour le degré p de la fonction $\varphi(y)$ il y aura autant de différents cas, qu'il y a de représentations mentionnées du nombre p .

§ 9.

Faisons voir maintenant que l'intégrale (13) est une fonction des intégrales (21).

Supposons donc que p soit le degré de l'équation $\varphi(y) = 0$ et que $w_1, w_2, \dots, w_p$ en soient les racines. Nous aurons

$$\varphi(y) = b_{n-p-2}(y - w_1)(y - w_2) \dots (y - w_p),$$

b_{n-p-2} étant maintenant une constante $C^{(n-p-2)}$. Faisons, dans l'équation

$$(w_k - v_1)^{m_1} (w_k - v_2)^{m_2} \dots (w_k - v_n)^{m_n} = C_k,$$

$k = 1, 2, 3, \dots, p$ et multiplions les résultats. Alors en ayant égard à la valeurs précédente de $\varphi(y)$ on obtient

$$[\varphi(v_1)]^{m_1} [\varphi(v_2)]^{m_2} \dots [\varphi(v_n)]^{m_n} = \text{Const.}$$

En y substituant les valeurs de $\varphi(v_1), \varphi(v_2), \dots, \varphi(v_n)$ que donne l'équation (24), on aura

$$\frac{\Pi (v_i - v_j)^{m_i + m_j}}{v_1^{m_1} v_2^{m_2} \dots v_n^{m_n}} = \text{Const.},$$

ce qui est l'intégrale (13).

§ 10.

Si les constantes $m_1, m_2, \dots, m_n$ étaient des nombres réels et rationnels on pourrait les remplacer par des nombres entiers. Il suffit pour cela d'élever les deux membres de l'équation (2) à la puissance égale au plus petit dénominateur commun de $m_1, m_2, \dots, m_n$.

En supposant donc que $m_1, m_2, \dots, m_n$ soient des entiers, faisons pour abréger

$$\omega_k = (w_k - v_1)^{m_1} (w_k - v_2)^{m_2} \dots (w_k - v_n)^{m_n}, \quad (k = 1, 2, 3, \dots, p).$$

On éliminera $w_1, w_2, \dots, w_p$ dans le groupe (21) en prenant au lieu des intégrales de ce groupe leurs fonctions symétriques, par exemple,

$$\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_p = A_1,$$

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 + \dots + \omega_p^2 = A_2, \dots, \omega_1^p + \omega_2^p + \dots + \omega_p^p = A_p,$$

$A_1, A_2, \dots, A_p$ étant des constantes arbitraires.

Les premiers termes de ces équations, étant des fonctions symétriques rationnelles de $w_1, w_2, \dots, w_p$, s'exprimeront rationnellement en $b_0, b_1, b_2, \dots, b_{n-2}$ et par conséquent se présenteront comme fonctions rationnelles de $v_1, v_2, \dots, v_n$.

En associant à ces équations celles du groupe (30) on détermine $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ comme fonctions algébriques de x .

Or il est facile de s'assurer, qu'il n'existe point de valeurs de $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$, qui ne soient pas comprises dans les formules (21) et (30). Cela revient à ce que les équations différentielles (11) n'ont pas de solutions singulières.

Donc dans le cas où $m_1, m_2, \dots, m_n$ sont des nombres rationnels les inconnues $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ sont des fonctions algébriques de x . Les fonctions v_n et R , qui en dépendent sont également algébriques. La supposition de l'existence des racines multiples de l'équation $\varphi(y) = 0$ n'infirme en rien cette conclusion.

§ 11.

En récapitulant les résultats trouvés nous pouvons les énoncer de cette manière:

Soit proposé le système d'équations simultanées

$$(11) \quad v_1 \frac{dv_1}{dx} - v_1 = v_2 \frac{dv_2}{dx} - v_2 = \dots = v_{n-1} \frac{dv_{n-1}}{dx} - v_{n-1} \\ = - \frac{\frac{m_1}{v_1^3} + \frac{m_2}{v_2^3} + \dots + \frac{m_{n-1}}{v_{n-1}^3} + \frac{m_n}{v_n^3}}{\frac{m_1}{v_1^3} + \frac{m_2}{v_2^3} + \dots + \frac{m_{n-1}}{v_{n-1}^3} + \frac{m_n}{v_n^3}},$$

où $m_1, m_2, \dots, m_n$ sont des constantes données et v_n a la valeur

$$(9) \quad v_n = - \frac{m_n}{\frac{m_1}{v_1} + \frac{m_2}{v_2} + \dots + \frac{m_{n-1}}{v_{n-1}}}.$$

Pour les intégrer considérons l'équation algébrique

$$\varphi(y) = \frac{1}{y} (y - v_1) (y - v_2) \dots (y - v_n) \sum \frac{m_i}{y - v_i} = 0.$$

Soit p son degré et $w_1, w_2, \dots, w_p$ ses racines. On aura d'abord p intégrales

$$(21) \quad (w_k - v_1)^{m_1} (w_k - v_2)^{m_2} \dots (w_k - v_n)^{m_n} = C_k, \\ (k = 1, 2, 3, \dots, p)$$

et ensuite $n - p - 1$ équations

$$(30) \quad \sum m_i v_i = 0, \quad \sum m_i v_i^2 = 0, \quad \dots, \quad \sum m_i v_i^{n-p-2} = C^{(n-p-2)}, \\ \sum m_i v_i^{n-p-1} = (n - p - 1) C^{(n-p-2)} x + C^{(n-p-1)}.$$

Les valeurs générales de $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ correspondent aux cas $p = n - 2$ et $p = n - 3$.

Dans le premier, le groupe (30) a une seule équation

$$(12) \quad \sum m_i v_i = x \sum m_i + C'$$

et dans le second, deux

$$\sum m_i v_i = C', \quad \sum m_i v_i^2 = 2C'x + C''.$$

Pour avoir toutes les valeurs possibles de $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ il faut faire successivement

$$p = n - 2, n - 3, \dots, 2, 1, 0,$$

et pour chaque nombre p avoir égard aux racines multiples de l'équation $\varphi(y) = 0$, comme cela est expliqué au § 8.

En substituant ces valeurs dans l'expression

$$(10) \quad R = - \frac{\sum \frac{m_i}{v_i^2}}{\sum \frac{m_i}{v_i^3}}$$

on aura toutes les valeurs de R telles que l'intégrale générale de l'équation différentielle

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = 1 + \frac{R}{y}$$

se présente sous la forme

$$(2) \quad (y - v_1)^{m_1} (y - v_2)^{m_2} \dots (y - v_n)^{m_n} = C,$$

à n facteurs et avec les valeurs données des rapports

$$\frac{m_1}{m_n}, \frac{m_2}{m_n}, \dots, \frac{m_{n-1}}{m_n}.$$

§ 12.

Considérons les cas les plus simples, en commençant par celui, où $n = 2$.

Pour $n = 2$ la fonction $\varphi(y)$ ne dépend pas de y et se réduit à la constante Σm_i .

Les intégrales (21) n'existent pas et pour déterminer v_1 et v_2 on a deux équations

$$(6) \quad \frac{m_1}{v_1} + \frac{m_2}{v_2} = 0,$$

$$(12) \quad m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) (x - x_0),$$

x_0 étant une constante arbitraire, qu'on a introduite au lieu de C' , en faisant

$$C' = - (m_1 + m_2) x_0,$$

Des équations (6) et (12) on obtient

$$v_1 = \frac{m_1}{m_1 - m_2} (x - x_0), \quad v_2 = - \frac{m_2}{m_1 - m_2} (x - x_0),$$

$$R = - \frac{\frac{m_1}{v_1^2} + \frac{m_2}{v_2^2}}{\frac{m_1}{v_1^3} + \frac{m_2}{v_2^3}} = \frac{m_1 m_2}{(m_1 - m_2)^2} (x - x_0).$$

Ainsi l'équation

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{m_1 m_2}{(m_1 - m_2)^2} \cdot \frac{x - x_0}{y}$$

est la seule de forme (1) dont l'intégrale générale

$$\left[y - \frac{m_1}{m_1 - m_2} (x - x_0) \right]^{m_1} \left[y + \frac{m_2}{m_1 - m_2} (x - x_0) \right]^{m_2} = C$$

est composée de deux facteurs.

Remarquons que l'équation (13) subsiste encore, quoiqu'il n'y ait plus d'intégrales (21). En effet pour $n = 2$ elle est

$$\frac{(v_1 - v_2)^{m_1 + m_2}}{v_1^{m_1} v_2^{m_2}} = \left(1 - \frac{v_2}{v_1}\right)^{m_1} \left(\frac{v_1}{v_2} - 1\right)^{m_2} = A.$$

Or d'après les valeurs de v_1 et v_2 cela revient à l'égalité

$$\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)^{m_1} \left(-\frac{m_1}{m_2} - 1\right)^{m_2} = A.$$

Seulement A n'est plus une constante arbitraire.

§ 13.

Le cas $n = 3$ ne demande pas non plus qu'on ait recours aux équations (21). Pour déterminer v_1, v_2, v_3 il suffit de prendre les équations (6), (12) et (13).

En considérant d'abord le cas général où la somme $m_1 + m_2 + m_3$ diffère de zéro, faisons

$$C' = -(m_1 + m_2 + m_3) x_0.$$

Nous aurons

$$(6) \quad \frac{m_1}{v_1} + \frac{m_2}{v_2} + \frac{m_3}{v_3} = 0,$$

$$(12) \quad m_1 v_1 + m_2 v_2 + m_3 v_3 = (m_1 + m_2 + m_3) (x - x_0),$$

$$(13) \quad (v_2 - v_3)^{m_2 + m_3} (v_3 - v_1)^{m_3 + m_1} (v_1 - v_2)^{m_1 + m_2} = A v_1^{m_1} v_2^{m_2} v_3^{m_3}.$$

L'équation (13) peut être remplacée par une autre plus simple, qui lui est équivalente.

En effet maintenant nous avons

$$\begin{aligned} \varphi(y) &= (m_1 + m_2 + m_3) y \\ &+ [m_1 v_1 + m_2 v_2 + m_3 v_3 - (m_1 + m_2 + m_3) (v_1 + v_2 + v_3)]; \end{aligned}$$

donc en vertu de l'équation (12) on obtient

$$\varphi(y) = (m_1 + m_2 + m_3) [y - (v_1 + v_2 + v_3 - x + x_0)].$$

L'équation $\varphi(y) = 0$ a donc une seule racine

$$y = w_1 = v_1 + v_2 + v_3 - (x - x_0)$$

et nous avons dans le groupe (21) une seule intégrale

$$(w_1 - v_1)^{m_1} (w_1 - v_2)^{m_2} (w_1 - v_3)^{m_3} = C_1$$

ou bien

$$(21) \quad [v_2 + v_3 - (x - x_0)]^{m_1} [v_3 + v_1 - (x - x_0)]^{m_2} [v_1 + v_2 - (x - x_0)]^{m_3} = C_1.$$

Cette équation peut remplacer (13).

Supposons maintenant

$$m_1 + m_2 + m_3 = 0,$$

ou bien

$$m_3 = -m_1 - m_2.$$

La fonction $\varphi(y)$ se réduira à

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 + m_3 v_3 = C'$$

et son degré sera zéro. Pour déterminer v_1, v_2, v_3 on peut prendre les équations

$$(6) \quad m_1 \left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_3} \right) + m_2 \left(\frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_3} \right) = 0,$$

$$(12) \quad m_1(v_1 - v_3) + m_2(v_2 - v_3) = C',$$

$$(31) \quad v_1 + v_2 + v_3 = 2x + C''.$$

Après avoir trouvé v_1, v_2, v_3 comme fonctions de x , on déterminera R par son expression (10), ou bien par l'une des équations

$$R = v_1 \frac{dv_1}{dx} - v_1 = v_2 \frac{dv_2}{dx} - v_2 = v_3 \frac{dv_3}{dx} - v_3.$$

§ 14.

Considérons maintenant le cas $n = 4$. En faisant pour abréger

$$m = m_1 + m_2 + m_3 + m_4, \quad C' = -mx_0,$$

nous aurons

$$\varphi(y) = my^2 + \left(\sum m_i v_i + m a_1 \right) y + \sum m_i v_i^2 + a_1 \sum m_i v_i + m a_2,$$

l'indice i ayant les valeurs 1, 2, 3, 4. Comme on a

$$a_1 = -(v_1 + v_2 + v_3 + v_4) = -\sum v_i,$$

$$a_2 = v_1 v_2 + v_1 v_3 + v_1 v_4 + v_2 v_3 + v_2 v_4 + v_3 v_4 = \sum v_i v_j$$

il viendra aussi

$$\varphi(y) = my^2 - y \sum (m - m_i) v_i + \sum (m - m_i - m_j) v_i v_j,$$

dans la dernière somme la paire i, j désignant les six combinaisons 12, 13, 14, 23, 24, 34.

Faisons pour abréger

$$s = \sqrt{\left[\sum (m - m_i) v_i \right]^2 - 4m \sum (m - m_i - m_j) v_i v_j};$$

alors les deux racines w_1 et w_2 de l'équation $\varphi(y) = 0$ s'exprimeront de cette manière

$$w_1 = \frac{1}{2m} \left(\sum (m - m_i) v_i - s \right), \quad w_2 = \frac{1}{2m} \left(\sum (m - m_i) v_i + s \right).$$

La constante m dans le cas général étant différente de zéro, on aura pour déterminer v_1, v_2, v_3, v_4 les équations (6), (12) et les deux intégrales (21). Au lieu de celles-ci on peut prendre une d'entre elles avec l'intégrale (13).

Ces quatre équations seront donc

$$(6) \quad \frac{m_1}{v_1} + \frac{m_2}{v_2} + \frac{m_3}{v_3} + \frac{m_4}{v_4} = 0,$$

$$(12) \quad m_1 v_1 + m_2 v_2 + m_3 v_3 + m_4 v_4 = m(x - x_0),$$

$$(13) \quad (v_1 - v_2)^{m_1+m_2} (v_1 - v_3)^{m_1+m_3} (v_1 - v_4)^{m_1+m_4} (v_2 - v_3)^{m_2+m_3} (v_2 - v_4)^{m_2+m_4} (v_3 - v_4)^{m_3+m_4} \\ = A v_1^{m_1} v_2^{m_2} v_3^{m_3} v_4^{m_4},$$

$$(21) \quad (w_1 - v_1)^{m_1} (w_1 - v_2)^{m_2} (w_1 - v_3)^{m_3} (w_1 - v_4)^{m_4} = C_1.$$

On substituera dans la dernière équation la valeur précédente de w_1 .

Si nous avons $m = 0$, ou bien $m_4 = -m_1 - m_2 - m_3$, mais $\Sigma m_i v_i$, qui maintenant se réduit à C' est différente de zéro, la fonction

$$\varphi(y) = y \sum m_i v_i - \sum (m_i + m_j) v_i v_j$$

est du premier degré et nous avons une seule racine de l'équation $\varphi(y) = 0$, savoir,

$$w_1 = \frac{\Sigma (m_i + m_j) v_i v_j}{\Sigma m_i v_i} = \frac{1}{C'} \sum (m_i + m_j) v_i v_j.$$

On en déduit

$$(32) \quad C' (w_1 - v_k) = \sum (m_i + m_j) v_i v_j - v_k \sum m_i v_i \\ (k = 1, 2, 3, 4).$$

Les quatre équations qui déterminent v_1, v_2, v_3, v_4 sont

$$(6) \quad m_1 \left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_4} \right) + m_2 \left(\frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_4} \right) + m_3 \left(\frac{1}{v_3} - \frac{1}{v_4} \right) = 0,$$

$$(12) \quad m_1 (v_1 - v_4) + m_2 (v_2 - v_4) + m_3 (v_3 - v_4) = C',$$

$$(30) \quad m_1 (v_1^2 - v_4^2) + m_2 (v_2^2 - v_4^2) + m_3 (v_3^2 - v_4^2) = 2C'x + C'',$$

$$(21) \quad (w_1 - v_1)^{m_1} (w_1 - v_2)^{m_2} (w_1 - v_3)^{m_3} (w_1 - v_4)^{m_4} = C_1.$$

Dans l'équation (21) il faut remplacer les différences $w_1 - v_k$ par leurs valeurs données par l'équation (32).

Ensuite, si nous avons simultanément $m = 0$ et $C' = 0$ il y aura ces équations

$$(6) \quad m_1 \left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_4} \right) + m_2 \left(\frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_4} \right) + m_3 \left(\frac{1}{v_3} - \frac{1}{v_4} \right) = 0,$$

$$(30) \quad \begin{cases} m_1 (v_1 - v_4) + m_2 (v_2 - v_4) + m_3 (v_3 - v_4) = 0, \\ m_1 (v_1^2 - v_4^2) + m_2 (v_2^2 - v_4^2) + m_3 (v_3^2 - v_4^2) = C'', \end{cases}$$

$$(31) \quad v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 3x + C''.$$

Enfin, si les deux racines de l'équation $\varphi(y) = 0$ sont égales, on a $s = 0$ et $w_1 = w_2$.

Donc pour déterminer les valeurs de v_1, v_2, v_3, v_4 on aura les équations

$$(6) \quad \frac{m_1}{v_1} + \frac{m_2}{v_2} + \frac{m_3}{v_3} + \frac{m_4}{v_4} = 0,$$

$$(12) \quad m_1 v_1 + m_2 v_2 + m_3 v_3 + m_4 v_4 = m(x - x_0),$$

$$(21) \quad \begin{cases} \left[\sum (m - m_i) v_i \right]^2 - 4m \sum (m - m_i - m_j) v_i v_j = 0, \\ (w_1 - v_1)^{m_1} (w_1 - v_2)^{m_2} (w_1 - v_3)^{m_3} (w_1 - v_4)^{m_4} = C_1. \end{cases}$$

Dans la dernière w_1 doit être remplacé par sa valeur actuelle

$$w_1 = \frac{1}{2m} [(m - m_1)v_1 + (m - m_2)v_2 + (m - m_3)v_3 + (m - m_4)v_4].$$

§ 15.

Appliquons maintenant à une équation plus générale les principes, que nous avons employés pour intégrer l'équation d'Euler sous la forme

$$P(y - v_1)^{m_1} (y - v_2)^{m_2} \dots (y - v_n)^{m_n} = C.$$

Soit donc proposé l'équation

$$(33) \quad M(y) dx + N(y) dy = 0,$$

$M(y)$ et $N(y)$ étant des fonctions entières de y , dont les coefficients sont des fonctions quelconques de x .

Pour avoir un cas déterminé nous allons faire quelques restrictions.

D'abord il est permis de supposer, que $M(y)$ et $N(y)$ n'ont point de facteurs communs, qui soient des fonctions entières de y .

Ensuite nous allons supposer que le degré de $M(y)$ n'est pas supérieur à celui de $N(y)$ et que l'équation $N(y) = 0$ n'a pas de racines multiples, en y regardant y comme inconnu.

En désignant par q le degré de $N(y)$ nous pouvons donc faire

$$M(y) = p_0 y^q + p_1 y^{q-1} + p_2 y^{q-2} + \dots + p_{q-1} y + p_q,$$

$$N(y) = y^q + q_1 y^{q-1} + q_2 y^{q-2} + \dots + q_{q-1} y + q_q.$$

Soient encore $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q$ les racines de l'équation $N(y) = 0$.

On aura alors

$$N(y) = (y - \alpha_1)(y - \alpha_2) \dots (y - \alpha_q),$$

$$q_1 = -(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_q), \quad q_2 = \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_3 + \dots,$$

$$q_q = (-1)^q \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_q.$$

Comme pour l'équation d'Euler cherchons $M(y)$ et $N(y)$ sous la condition que l'équation (33) admet pour intégrale générale l'équation

$$P(y - v_1)^{m_1} (y - v_2)^{m_2} \dots (y - v_n)^{m_n} = C,$$

où comme précédemment $P, v_1, v_2, \dots, v_n$ sont des fonctions de x , $m_1, m_2, \dots, m_n$ des constantes données dont aucune n'est pas égale à zéro et C une constante arbitraire.

Nous supposons aussi que le nombre n de facteurs différents soit donné. Il s'en suit que parmi les fonctions $v_1, v_2, \dots, v_n$ il n'y a pas d'égaux entre elles, car dans le cas contraire ce nombre serait inférieur à n .

De l'équation précédente on obtient

$$\log P + m_1 \log(y - v_1) + m_2 \log(y - v_2) + \dots + m_n \log(y - v_n) = \log C.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (33) ait cette intégrale générale consiste dans l'égalité identique à $-\frac{M(y)}{N(y)}$ de la valeur de y' qu'on en déduit par la différentiation.

Donc cette condition se réduit à l'équation

$$\frac{1}{M(y)} \left(\frac{P'}{P} - \sum \frac{m_i v_i'}{y - v_i} \right) = \frac{1}{N(y)} \sum \frac{m_i}{y - v_i},$$

l'indice i parcourant les valeurs $1, 2, 3, \dots, n$.

En la débarrassant de dénominateurs, on voit que dans le premier terme le coefficient de y^{n+e} est $\frac{P'}{P}$ et dans le second zéro. Ainsi il faut qu'on ait $P' = 0$ et par conséquent que P , soit une constante.

On peut faire $P = 1$ et on aura

$$(34) \quad (y - v_1)^{m_1} (y - v_2)^{m_2} \dots (y - v_n)^{m_n} = C,$$

$$(35) \quad -\frac{1}{M(y)} \sum \frac{m_i v_i'}{y - v_i} = \frac{1}{N(y)} \sum \frac{m_i}{y - v_i}.$$

Nous rencontrons ici précisément les mêmes fonctions $F(y)$, $F_1(y)$, $F_2(y)$ qui s'étaient présentées dans la recherche sur l'équation d'Euler. Faisons donc comme auparavant

$$F(y) = (y - v_1)(y - v_2) \dots (y - v_n) = y^n + a_1 y^{n-1} + a_2 y^{n-2} + \dots + a_{n-1} y + a_n,$$

$$F_1(y) = F(y) \sum \frac{m_i}{y - v_i} = b_0 y^{n-1} + b_1 y^{n-2} + b_2 y^{n-3} + \dots + b_{n-2} y + b_{n-1},$$

$$F_2(y) = F(y) \sum \frac{m_i v_i'}{y - v_i} = c_0 y^{n-1} + c_1 y^{n-2} + c_2 y^{n-3} + \dots + c_{n-2} y + c_{n-1}.$$

Les coefficients

$a_1, a_2, \dots, a_n, b_0, b_1, b_2, \dots, b_{n-2}, b_{n-1}, c_0, c_1, c_2, \dots, c_{n-2}, c_{n-1}$ sont donnés comme fonctions de $v_1, v_2, \dots, v_n$ par les équations (4), (14) et (28).

Il est évident d'abord, que $F_1(y)$ n'a point de facteurs

$$y - v_1, y - v_2, \dots, y - v_n.$$

Ensuite, si nous supposons que v_i soit une constante et par conséquent $v_i' = 0$, la fonction $F_2(y)$ a le facteur $y - v_i$.

De l'équation (35), qu'on peut présenter sous la forme

$$-N(y) F_2(y) = M(y) F_1(y)$$

on voit encore que $F_1(y)$ est divisible par $N(y)$ les fonctions $M(y)$ et $N(y)$ n'ayant point de facteurs communs. Nous pouvons donc faire

$$F_1(y) = N(y) \cdot \varphi(y),$$

où $\varphi(y)$ est une fonction entière de y .

Il suit de là que les quantités $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\varrho$ sont différentes de $v_1, v_2, \dots, v_n$, car $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\varrho$, étant les racines de l'équation $N(y) = 0$, sont aussi celles de $F_1(y) = 0$ et aucune des quantités $v_1, v_2, \dots, v_n$ ne peut y satisfaire.

Il est évident aussi, que si v_i est égale à une constante, le facteur $y - v_i$ appartient à $M(y)$ comme à $F_2(y)$.

La divisibilité du polynôme $F_1(y)$ par $N(y)$ établit ϱ équations entre $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\varrho$ et $v_1, v_2, \dots, v_n$. En effet on a

$$\frac{F_1(\alpha_k)}{F'(\alpha_k)} = 0,$$

pour toute racine α_k de l'équation $N(y) = 0$, ou bien

$$(36) \quad \sum \frac{m_i}{\alpha_k - v_i} = 0, \quad (k = 1, 2, 3, \dots, \varrho).$$

Quant aux quantités $v_1, v_2, \dots, v_n$ elles sont évidemment des solutions de l'équation (33). En supposant, que v_i ne soit pas une constante, de l'équation (35) on obtient

$$(37) \quad v_i' = -\frac{M(v_i)}{N(v_i)} \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n).$$

Si v_i est une constante, comme on a $M(v_i) = 0$, elle satisfait aussi à l'équation (37).

Les $n + \varrho$ équations (36) et (37) sont donc nécessaires.

Il est facile de démontrer qu'elles sont aussi suffisantes.

En effet supposons qu'elles soient satisfaites. Nous aurons en vertu des équations (37)

$$(a) \quad -\frac{1}{M(y)} \sum \frac{m_i v_i'}{y - v_i} = \frac{1}{M(y)} \sum \frac{m_i M(v_i)}{N(v_i) (y - v_i)}.$$

Or en vertu des équations (36) la fonction $F_1(y)$ est divisible par $N(y)$. On aura donc

$$F_1(y) = N(y) \varphi(y),$$

$\varphi(y)$ étant une fonction entière de y . Par conséquent l'équation

$$\frac{F_1(y)}{F(y)} = \sum \frac{m_i}{y - v_i}$$

devient

$$\frac{N(y) \varphi(y)}{F(y)} = \sum \frac{m_i}{y - v_i}.$$

On en déduit

$$(38) \quad m_i = \frac{N(v_i) \varphi(v_i)}{F'(v_i)}.$$

En substituant cette valeur de m_i dans l'équation (a), il viendra

$$\begin{aligned} -\frac{1}{M(y)} \sum \frac{m_i v_i'}{y - v_i} &= \frac{1}{M(y)} \sum \frac{\varphi(v_i) M(v_i)}{F'(v_i)(y - v_i)} = \frac{1}{M(y)} \cdot \frac{\varphi(y) M(y)}{F(y)} \\ &= \frac{\varphi(y)}{F(y)} = \frac{1}{N(y)} \cdot \frac{F_1(y)}{F(y)} = \frac{1}{N(y)} \sum \frac{m_i}{y - v_i}. \end{aligned}$$

C'est l'équation (35) et les conditions (36) et (37) sont suffisantes.

Il est évident, que la fonction

$$\frac{\varphi(y)}{F(y)} = -\frac{1}{M(y)} \sum \frac{m_i v_i'}{y - v_i} = \frac{1}{N(y)} \sum \frac{m_i}{y - v_i}$$

est un multiplicateur de l'équation (33). En effet en faisant la multiplication on aura

$$-dx \sum \frac{m_i v_i'}{y - v_i} + dy \sum \frac{m_i}{y - v_i} = 0,$$

ou bien

$$d \sum m_i \log(y - v_i) = 0.$$

De là on obtient l'équation (34).

On peut donc énoncer ce résultat:

Pour que l'équation

$$M(y) dx + N(y) dy = 0$$

ait une intégrale générale

$$(y - v_1)^{m_1} (y - v_2)^{m_2} \dots (y - v_n)^{m_n} = C$$

il faut et il suffit que $v_1, v_2, \dots, v_n$ soient ses solutions et que la fonction

$$(y - v_1)(y - v_2) \dots (y - v_n) \sum \frac{m_i}{y - v_i}$$

soit divisible par $N(y)$, les fonctions $M(y)$ et $N(y)$ étant définies ci-dessus.

§ 16.

Pour satisfaire aux $n + \rho$ équations (36) et (37) nous avons les n fonctions $v_1, v_2, \dots, v_n$ et les $2\rho + 1$ coefficients des polynômes $M(y)$ et $N(y)$, en tout $n + 2\rho + 1$ quantités.

Il en reste donc $\varrho + 1$ arbitraires. Suivant leur choix on peut arranger les calculs de plusieurs manières.

Le premier procédé, qui se présente, est celui qui suit.

La fonction $F_1(y)$ étant divisible par $N(y)$, il est évident que son degré n'est pas inférieur à ϱ . Prenons pour $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\varrho$ ϱ racines quelconques de l'équation $F_1(y) = 0$, ou bien de celle-ci

$$\sum \frac{m_i}{y - v_i} = 0,$$

qui sont des fonctions déterminées de $v_1, v_2, \dots, v_n$, et les équations (36) seront satisfaites identiquement.

Il nous reste maintenant de satisfaire aux équations

$$(37) \quad v_1' = -\frac{M(v_1)}{N(v_1)}, \quad v_2' = -\frac{M(v_2)}{N(v_2)}, \dots, v_n' = -\frac{M(v_n)}{N(v_n)}.$$

D'abord on déterminera $p_0, p_1, p_2, \dots, p_\varrho$, en résolvant $\varrho + 1$ d'entre elles, par exemple, les équations

$$(39) \quad v_{n-\varrho}' = -\frac{M(v_{n-\varrho})}{N(v_{n-\varrho})}, \quad v_{n-\varrho+1}' = -\frac{M(v_{n-\varrho+1})}{N(v_{n-\varrho+1})}, \dots, v_n' = -\frac{M(v_n)}{N(v_n)}$$

par rapport à ces coefficients. On en obtiendra les valeurs de $p_0, p_1, p_2, \dots, p_\varrho$ comme fonctions déterminées de

$$v_1, v_2, \dots, v_n, v_{n-\varrho}', v_{n-\varrho+1}', \dots, v_n'.$$

En les substituant dans les équations

$$(40) \quad v_1' = -\frac{M(v_1)}{N(v_1)}, \quad v_2' = -\frac{M(v_2)}{N(v_2)}, \dots, v_{n-\varrho-1}' = -\frac{M(v_{n-\varrho-1})}{N(v_{n-\varrho-1})}$$

on aura dans les seconds membres de celles-ci les fonctions déterminées de

$$v_1, v_2, \dots, v_n, v_{n-\varrho}', v_{n-\varrho+1}', \dots, v_n'.$$

On peut regarder les $\varrho + 1$ quantités $v_{n-\varrho}, v_{n-\varrho+1}, \dots, v_n$ comme fonctions arbitraires de x est alors il restera de trouver les $n - \varrho - 1$ intégrales indépendantes du système (40) pour satisfaire à toutes les conditions (36) et (37) et pour déterminer $v_1, v_2, \dots, v_{n-\varrho-1}$ et les polynômes $M(y), N(y)$. Les valeurs de $v_1, v_2, \dots, v_{n-\varrho-1}$ et celles des coefficients de $M(y)$ et $N(y)$ s'exprimeront en fonctions de x et de $n - \varrho - 1$ constantes arbitraires, supposant que $v_{n-\varrho}, v_{n-\varrho+1}, \dots, v_n$ soient donnés comme fonctions de x . Il faut bien entendu les donner conformément aux conditions du problème et par conséquent inégales.

Le second procédé est plus analogue à celui que nous avons employé pour l'équation d'Euler.

Supposons que les racines $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\varrho$ de l'équation $N(y) = 0$, inégales entre elles, soient données a priori comme fonctions de x . Alors des ϱ équations

$$(36) \quad \sum \frac{m_i}{\alpha_k - v_i} = 0, \quad (k = 1, 2, 3, \dots, \varrho)$$

on obtiendra ϱ des quantités $v_1, v_2, \dots, v_n$, par exemple, $v_{n-\varrho+1}, v_{n-\varrho+2}, \dots, v_n$ en fonctions de $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\varrho$ et de $v_1, v_2, \dots, v_{n-\varrho}$, ou bien, comme fonctions de x et de $v_1, v_2, \dots, v_{n-\varrho}$.

Les équations (36) donnent des conditions pour les coefficients $p_0, p_1, p_2, \dots, p_\varrho$. En effet pour que les valeurs de $v_{n-\varrho+1}, v_{n-\varrho+2}, \dots, v_n$, qu'on en a tirées, soient des solutions des équations (37) il faut et il suffit que les ϱ équations

$$-\alpha'_k \sum \frac{m_i}{(\alpha_k - v_i)^2} + \sum \frac{m_i v'_i}{(\alpha_k - v_i)^2} = 0, \quad (k=1, 2, 3, \dots, \varrho)$$

qu'on en obtient par la différentiation, fussent satisfaites par les valeurs de $v'_1, v'_2, \dots, v'_n$ données par les équations (37). Or en y substituant ces valeurs, il vient

$$\alpha'_k \sum \frac{m_i}{(\alpha_k - v_i)^2} + \sum \frac{m_i M(v_i)}{N(v_i) (\alpha_k - v_i)^2} = 0, \\ (k=1, 2, 3, \dots, \varrho)$$

ou bien, en vertu de la valeur de $M(y)$,

$$(41) \quad \alpha'_k \sum \frac{m_i}{(\alpha_k - v_i)^2} + p_0 \sum \frac{m v_i^{\varrho-1}}{N(v_i) (\alpha_k - v_i)^2} + p_1 \sum \frac{m_i v_i^{\varrho-1}}{N(v_i) (\alpha_k - v_i)^2} \\ + \dots + p_\varrho \sum \frac{m_i}{N(v_i) (\alpha_k - v_i)^2} = 0. \\ (k=1, 2, 3, \dots, \varrho).$$

De ces ϱ équations on aura ϱ des coefficients, par exemple, $p_1, p_2, \dots, p_\varrho$ en fonctions de x et de $p_0, v_1, v_2, \dots, v_n$.

Le coefficient p_0 reste arbitraire. On peut le donner arbitrairement en fonction de x .

Substituons maintenant les valeurs mentionnées de

$$v_{n-\varrho+1}, v_{n-\varrho+2}, \dots, v_n$$

avec celles de $p_1, p_2, \dots, p_\varrho$ dans les équations

$$(42) \quad v'_1 = -\frac{M(v_1)}{N(v_1)}, \quad v'_2 = -\frac{M(v_2)}{N(v_2)}, \quad \dots, \quad v'_{n-\varrho} = -\frac{M(v_{n-\varrho})}{N(v_{n-\varrho})}.$$

Les seconds membres seront des fonctions déterminées de x et de $v_1, v_2, \dots, v_{n-\varrho}$. Il restera de trouver les $n-\varrho$ intégrales indépendantes de ce système d'équations pour déterminer $v_1, v_2, \dots, v_{n-\varrho}$ en fonctions de x et de $n-\varrho$ constantes arbitraires. Avec $v_1, v_2, \dots, v_{n-\varrho}$ on trouvera aussi $v_{n-\varrho+1}, v_{n-\varrho+2}, \dots, v_n, p_1, p_2, \dots, p_\varrho$ et l'équation différentielle (33) sera déterminée.

Il est évident, que ce second procédé diffère du premier seulement par le choix de $\varrho+1$ quantités arbitraires dont nous avons fait mention

au commencement de ce §. Il suffit donc d'intégrer le système (40) pour en déduire les intégrales des équations (42), ou réciproquement.

Remarquons, que si n est égal à $\varrho + 1$, il n'y aura point d'équation (40). Le degré de $F_1(y)$ sera $n - 1 = \varrho$ et par conséquent $\sum m_i$ sera différente de zéro. Le polynôme $N(y)$ aura la valeur

$$N(y) = \frac{1}{\sum m_i} F_1(y) = \frac{1}{\sum m_i} F(y) \sum \frac{m_i}{y - v_i}$$

et on obtiendra les valeurs de $p_0, p_1, p_2, \dots, p_\varrho$ de $\varrho + 1 = n$ équations

$$(37) \quad v_i' = -\frac{M(v_i)}{N(v_i)}, \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n)$$

Les conditions (36) et (37) étant satisfaites nous voyons que l'équation différentielle

$$M(y) dx + \frac{dy}{\sum m_i} F(y) \sum \frac{m_i}{y - v_i} = 0$$

où les coefficients du polynôme $M(y)$ sont déduits des équations (37) a pour intégrale générale

$$(y - v_1)^{m_1} (y - v_2)^{m_2} \dots (y - v_n)^{m_n} = C$$

quelles que soient les fonctions $v_1, v_2, \dots, v_n$ et les constantes $m_1, m_2, \dots, m_n$.

Cela d'ailleurs est évident, quand on a égard à la valeur de $M(y)$

$$M(y) = -\frac{N(y) F_2(y)}{F_1(y)} = -\frac{1}{\sum m_i} F(y) \sum \frac{m_i v_i'}{y - v_i}.$$

§ 17.

Comme pour l'équation d'Euler il y a deux intégrales des équations (37), qui s'en déduisent directement.

D'abord en comparant les coefficients de $y^{n+\varrho-1}$ dans les deux membres de l'identité

$$-N(y) F_2(y) = M(y) F_1(y)$$

on aura

$$c_0 = -b_0 p_0,$$

ou bien

$$\sum m_i v_i' = -p_0 \sum m_i.$$

On en obtient

$$(43) \quad \sum m_i v_i = -\sum m_i \cdot \int p_0 dx + C',$$

où C' est une constante arbitraire.

Dans le second procédé, où p_0 est donné comme fonction de x , cette équation donne une intégrale du système (42).

Ensuite faisons

$$\frac{M(y)}{N(y)} = p_0 + \frac{\beta_1}{y - \alpha_1} + \frac{\beta_2}{y - \alpha_2} + \dots + \frac{\beta_\varrho}{y - \alpha_\varrho},$$

où $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\varrho$ sont des fonctions de x , qui résultent de la formule

$$\beta_k = \frac{M(\alpha_k)}{N'(\alpha_k)}, \quad (k = 1, 2, 3, \dots, \varrho)$$

$N'(\alpha_k)$ étant la valeur de la dérivée $\frac{\partial N(y)}{\partial y}$ pour $y = \alpha_k$.

Cela posé, les équations (37) se représenteront sous la forme

$$(37) \quad v'_i = -p_0 - \frac{\beta_1}{v_i - \alpha_1} - \frac{\beta_2}{v_i - \alpha_2} - \dots - \frac{\beta_\varrho}{v_i - \alpha_\varrho}. \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n)$$

Soit v_j une des quantités $v_1, v_2, \dots, v_n$ différente de v_i ; on aura

$$(44) \quad v'_j = -p_0 - \frac{\beta_1}{v_j - \alpha_1} - \frac{\beta_2}{v_j - \alpha_2} - \dots - \frac{\beta_\varrho}{v_j - \alpha_\varrho},$$

et par conséquent

$$v'_i - v'_j = (v_i - v_j) \left[\frac{\beta_1}{(v_i - \alpha_1)(v_j - \alpha_1)} + \frac{\beta_2}{(v_i - \alpha_2)(v_j - \alpha_2)} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{\beta_\varrho}{(v_i - \alpha_\varrho)(v_j - \alpha_\varrho)} \right].$$

On en déduit

$$\frac{d}{dx} \log [(v_i - v_j)^{m_i}] = \frac{\beta_1}{v_j - \alpha_1} \cdot \frac{m_i}{v_i - \alpha_1} + \frac{\beta_2}{v_j - \alpha_2} \cdot \frac{m_i}{v_i - \alpha_2} + \dots \\ \dots + \frac{\beta_\varrho}{v_j - \alpha_\varrho} \cdot \frac{m_i}{v_i - \alpha_\varrho}.$$

Attribuons à l'indice i toutes les valeurs $1, 2, 3, \dots, n$ à l'exception de j et faisons la somme des résultats obtenus. Alors en remarquant que les équations (36) donnent

$$\frac{m_1}{v_1 - \alpha_k} + \frac{m_2}{v_2 - \alpha_k} + \dots + \frac{m_{j-1}}{v_{j-1} - \alpha_k} + \frac{m_{j+1}}{v_{j+1} - \alpha_k} + \dots + \frac{m_n}{v_n - \alpha_k} \\ = - \frac{m_j}{v_j - \alpha_k}, \quad (k = 1, 2, 3, \dots, \varrho)$$

nous aurons

$$(45) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{d}{dx} \log [(v_1 - v_j)^{m_1} (v_2 - v_j)^{m_2} \dots (v_{j-1} - v_j)^{m_{j-1}} (v_{j+1} - v_j)^{m_{j+1}} \dots \\ & \dots (v_n - v_j)^{m_n}] \\ & = - \beta_1 \frac{m_j}{(v_j - \alpha_1)^2} - \beta_2 \frac{m_j}{(v_j - \alpha_2)^2} - \dots - \beta_\varrho \frac{m_j}{(v_j - \alpha_\varrho)^2}. \end{aligned} \right.$$

Or de l'équation (44) on obtient

$$\frac{d}{dx} \log (v_j - \alpha_k) = -\frac{p_0 + \alpha'_k}{v_j - \alpha_k} - \frac{\beta_1}{(v_j - \alpha_1)(v_j - \alpha_k)} - \frac{\beta_2}{(v_j - \alpha_2)(v_j - \alpha_k)} - \dots$$

$$- \dots - \frac{\beta_k}{(v_j - \alpha_k)^2} - \dots - \frac{\beta_\rho}{(v_j - \alpha_\rho)(v_j - \alpha_k)},$$

ou bien,

$$\frac{d}{dx} \log [(v_j - \alpha_k)^{m_j}] = - (p_0 + \alpha'_k) \frac{m_j}{v_j - \alpha_k}$$

$$+ \frac{\beta_1}{\alpha_k - \alpha_1} \left(\frac{m_j}{v_j - \alpha_1} - \frac{m_j}{v_j - \alpha_k} \right)$$

$$+ \frac{\beta_2}{\alpha_k - \alpha_2} \left(\frac{m_j}{v_j - \alpha_2} - \frac{m_j}{v_j - \alpha_k} \right) + \dots$$

$$\dots - \beta_k \cdot \frac{m_j}{(v_j - \alpha_k)^2} + \dots + \frac{\beta_\rho}{\alpha_k - \alpha_\rho} \left(\frac{m_j}{v_j - \alpha_\rho} - \frac{m_j}{v_j - \alpha_k} \right).$$

Attribuons ici à j les valeurs $1, 2, 3, \dots, n$ et faisons la somme des résultats obtenus. Alors en vertu des équations (36) nous aurons

$$(46) \quad \frac{d}{dx} \log [(v_1 - \alpha_k)^{m_1} (v_2 - \alpha_k)^{m_2} \dots (v_n - \alpha_k)^{m_n}]$$

$$= - \beta_k \sum \frac{m_j}{(v_j - \alpha_k)^2}, \quad (k = 1, 2, 3, \dots, \rho)$$

Faisons maintenant $j = 1, 2, 3, \dots, n$ dans l'équation (45) et ajoutons les résultats; alors nous aurons en vertu des équations (46) et de la valeur

$$N(y) = (y - \alpha_1)(y - \alpha_2) \dots (y - \alpha_\rho)$$

cette équation

$$\frac{d}{dx} \log \prod (v_i - v_j)^{m_i + m_j} = \frac{d}{dx} \log \{ [N(v_1)]^{m_1} [N(v_2)]^{m_2} \dots [N(v_n)]^{m_n} \}.$$

Il en résulte

$$(47) \quad \prod (v_i - v_j)^{m_i + m_j} = A [N(v_1)]^{m_1} [N(v_2)]^{m_2} \dots [N(v_n)]^{m_n},$$

A étant une constante arbitraire.

On doit prendre dans le produit au premier membre toutes les $\frac{n(n-1)}{2}$ combinaisons différentes des indices i et j .

L'équation (47) représente une intégrale du système (42).

Il est évident, que la démonstration précédente se rapporte tout aussi bien au premier comme au second procédé, et par conséquent l'équation (47) donne aussi une intégrale du système (40).

§ 18.

Les autres intégrales des équations (40) et (42) dépendent des racines de l'équation $\varphi(y) = 0$.

La fonction $\varphi(y) = \frac{F_1(y)}{N(y)}$ sera obtenue sous la forme d'un polynôme entier par la division de

$$F_1(y) = b_0 y^{n-1} + b_1 y^{n-2} + \dots + b_{n-2} y + b_{n-1}$$

par

$$N(y) = y^e + q_1 y^{e-1} + q_2 y^{e-2} + \dots + q_{e-1} y + q_e.$$

Le quotient est $\varphi(y)$ et le reste du degré $\varrho - 1$ est identiquement égal à zéro en vertu des équations (36).

Remarquons d'abord que les quantités $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\varrho$ diffèrent des racines de l'équation $\varphi(y) = 0$.

En effet si nous supposons que le facteur $y - \alpha_k$, appartenant à la fonction $N(y)$, divise aussi $\varphi(y)$, α_k sera une racine multiple de l'équation $F_1(y) = N(y) \varphi(y) = 0$, ou bien, de l'équation

$$\sum \frac{m_i}{y - v_i} = 0.$$

On doit donc avoir identiquement

$$\sum \frac{m_i}{(\alpha_k - v_i)^2} = 0.$$

Or l'équation (46) montre, qu'alors le produit

$$(\alpha_k - v_1)^{m_1} (\alpha_k - v_2)^{m_2} \dots (\alpha_k - v_n)^{m_n}$$

se réduit à une constante et que α_k est une solution de l'équation (33). Mais évidemment cela n'a pas lieu, quand α_k est une fonction de x . Si au contraire la valeur de α_k est une constante, pour qu'elle en soit la solution, il faudrait que le facteur $y - \alpha_k$ divisât $M(y)$, ce qui ne peut pas avoir lieu non plus, $M(y)$ et $N(y)$ étant des polynômes, qui n'ont pas de facteurs communs.

Ensuite on démontrera facilement, que l'équation $\varphi(y) = 0$ n'a pas de racines multiples, tant que les constantes d'intégration, contenues dans $v_1, v_2, v_3, \dots$ restent arbitraires.

En effet supposons que y soit une telle racine et que les calculs soient disposés conformément au premier procédé.

Elle satisfait aux équations

$$(48) \quad \sum \frac{m_i}{y - v_i} = 0,$$

$$(49) \quad \sum \frac{m_i}{(y - v_i)^2} = 0.$$

Or y étant une fonction de $v_1, v_2, \dots, v_n$ contient implicitement les $n - \rho - 1$ constantes arbitraires indépendantes qui figurent dans $v_1, v_2, \dots, v_{n-\rho-1}$. Les valeurs de $v_1, v_2, \dots, v_{n-\rho-1}$ sont indépendantes entre elles, à savoir, toute équation entre elles et la variable x , qui ne contient aucune constante d'intégration en dehors d'elles, doit être identique. En différentiant donc l'équation (48) par rapport à v_h , v_h étant une des quantités $v_1, v_2, \dots, v_{n-\rho-1}$, on aura

$$\frac{m_h}{(y - v_h)^2} + \frac{\partial y}{\partial v_h} \sum \frac{m_i}{(y - v_i)^2} = 0,$$

ce qui se réduit en vertu de l'égalité (49) à l'équation impossible

$$\frac{m_h}{(y - v_h)^2} = 0.$$

Pour des valeurs particulières des constantes arbitraires les racines multiples de l'équation $\varphi(y) = 0$ sont possibles et il faut y avoir égard.

§ 19.

Maintenant nous allons démontrer, que les racines de l'équation $\varphi(y) = 0$ sont des solutions de l'équation différentielle (33).

Elles satisfont à l'équation

$$(50) \quad \sum \frac{m_i}{y - v_i} = 0,$$

qui peut être représentée de cette manière

$$y' \sum \frac{m_i}{y - v_i} = \sum \frac{m_i (y' - v'_i)}{y - v_i} + \sum \frac{m_i v'_i}{y - v_i} = 0.$$

Or l'équation (50) avec l'identité

$$(35) \quad -\frac{1}{M(y)} \sum \frac{m_i v'_i}{y - v_i} = \frac{1}{N(y)} \sum \frac{m_i}{y - v_i},$$

dans laquelle $N(y)$ diffère de zéro, donne

$$\sum \frac{m_i v'_i}{y - v_i} = 0.$$

Donc on aura

$$\sum \frac{m_i (y' - v'_i)}{y - v_i} = 0.$$

Il s'ensuit

$$\sum m_i \lg (y - v_i) = \text{Const.},$$

ou bien,

$$(y - v_1)^{m_1} (y - v_2)^{m_2} \dots (y - v_n)^{m_n} = \text{Const.}$$

La racine y est donc une solution particulière de l'équation (33).

La constante dans le second membre est arbitraire.

Nous avons de cette manière autant d'intégrales des systèmes (40) et (42), qu'il y a des racines différentes de l'équation $\varphi(y) = 0$.

Considérons d'abord le cas général où la somme Σm_i ne s'évanouit point et où les constantes d'intégration restent complètement arbitraires. Dans ce cas la fonction $\varphi(y)$ est du degré $n - \varrho - 1$. Désignons donc les $n - \varrho - 1$ racines de l'équation $\varphi(y) = 0$ par $w_1, w_2, \dots, w_{n-\varrho-1}$ et soit w_k l'une d'elles.

Nous aurons $n - \varrho - 1$ intégrales des systèmes (40) et (42) dans ces équations

$$(51) \quad (w_k - v_1)^{m_1} (w_k - v_2)^{m_2} \dots (w_k - v_n)^{m_n} = C_k \\ (k = 1, 2, 3, \dots, n - \varrho - 1).$$

Pour les équations (40) c'est un système complet, c'est à dire, ces intégrales sont indépendantes.

Considérons en effet le premier procédé et faisons pour abrégier $\psi_k = m_1 \log(w_k - v_1) + m_2 \log(w_k - v_2) + \dots + m_n \log(w_k - v_n)$.

Le déterminant fonctionnel

$$\sum \pm \frac{\partial \psi_1}{\partial v_1} \cdot \frac{\partial \psi_2}{\partial v_2} \dots \frac{\partial \psi_{n-\varrho-1}}{\partial v_{n-\varrho-1}}$$

se transforme en produit au moyen de la formule de réduction donnée au § 7. Comme aucun des facteurs ne peut s'annuler, ce déterminant n'est point égal à zéro et les intégrales (51) sont indépendantes.

Dans le cas où la constante donnée Σm_i est zéro, l'équation (43) donne

$$\sum m_i v_i = C'.$$

Cette équation avec les intégrales (51), dont le nombre est maintenant $n - \varrho - 2$, font encore un système complet pour les équations (40).

Quant au système (42) d'équations simultanées, dans le cas général, où la somme Σm_i est différent de zéro et où on n'attribue point aux constantes d'intégration des valeurs particulières, on obtient un système complet d'intégrales, en associant l'équation (43) aux équations (51).

Le cas où on a $\Sigma m_i = 0$ sera considéré dans le § suivant.

§ 20.

Occupons nous maintenant des cas particuliers, qui demandent quelques modifications des résultats obtenus pour le cas général.

Comparons les coefficients des mêmes puissances de y dans l'égalité

$$-N(y) F_2(y) = M(y) F_1(y)$$

en commençant par $y^{n+\varrho-1}$ et en finissant à y^e ; alors nous aurons cette suite d'équations:

$$\begin{aligned}
& -c_0 = b_0 p_0, \\
& -(c_1 + q_1 c_0) = b_1 p_0 + b_0 p_1, \\
& -(c_2 + q_1 c_1 + q_2 c_0) = b_2 p_0 + b_1 p_1 + b_0 p_2, \\
& \dots \\
& -(c_q + q_1 c_{q-1} + q_2 c_{q-2} + \dots + q_q c_0) = b_q p_0 + b_{q-1} p_1 + b_{q-2} p_2 + \dots + b_0 p_q, \\
& -(c_{q+1} + q_1 c_q + q_2 c_{q-1} + \dots + q_q c_1) = b_{q+1} p_0 + b_q p_1 + b_{q-1} p_2 + \dots + b_1 p_q, \\
& \dots \\
& -(c_{n-1} + q_1 c_{n-2} + q_2 c_{n-3} + \dots + q_q c_{n-q-1}) = b_{n-1} p_0 + b_{n-2} p_1 + b_{n-3} p_2 + \dots \\
& \dots + b_{n-q-1} p_q.
\end{aligned}$$

Dans le cas où le degré de $F_1(y)$ se réduit à $p < n-1$, on aura

$$b_0 = 0, b_1 = 0, b_2 = 0, \dots, b_{n-p-2} = 0.$$

D'après les valeurs (14) des coefficients $b_0, b_1, b_2, \dots$ cela revient aux équations

$$(53) \quad \sum m_i = 0, \quad \sum m_i v_i = 0, \quad \sum m_i v_i^2 = 0, \dots, \sum m_i v_i^{n-p-2} = 0$$

Les équations (52) montrent qu'on aura alors

$$c_0 = 0, c_1 = 0, c_2 = 0, \dots, c_{n-p-2} = 0, c_{n-p-1} = -b_{n-p-1} p_0,$$

ce qui en vertu des valeurs (28) des coefficients $c_0, c_1, c_2, \dots$ se réduit aux équations

$$\begin{aligned}
(54) \quad \sum m_i v'_i = 0, \quad \sum m_i v_i v'_i = 0, \quad \sum m_i v_i^2 v'_i = 0, \dots \\
\dots, \quad \sum m_i v_i^{n-p-2} v'_i = 0,
\end{aligned}$$

$$(55) \quad \sum m_i v_i^{n-p-1} v'_i = -b_{n-p-1} p_0.$$

En intégrant les équations (54) on obtient

$$\begin{aligned}
(56) \quad \sum m_i v_i = C', \quad \sum m_i v_i^2 = C'', \dots, \quad \sum m_i v_i^{n-p-2} = C^{(n-p-2)}, \\
\sum m_i v_i^{n-p-1} = C^{(n-p-1)},
\end{aligned}$$

$C', C'', \dots, C^{(n-p-2)}, C^{(n-p-1)}$ étant des constantes arbitraires.

En vertu des équations (53) on aura

$$C' = 0, C'' = 0, \dots, C^{(n-p-2)} = 0$$

et d'après les équations (14) b_{n-p-1} se réduit maintenant à

$$\sum m_i v_i^{n-p-1},$$

qui est une constante $C^{(n-p-1)}$ en vertu des équations (56); donc l'équation (55) devient

$$\sum m_i v_i^{n-p-1} v'_i = -C^{(n-p-1)} p_0.$$

Dans le second procédé p_0 est une fonction donnée de x ; par conséquent l'intégration donne

$$(57) \quad \sum m_i v_i^{n-p} = - (n-p) C^{(n-p-1)} \int p_0 dx + C^{(n-p)},$$

Donc dans le cas où le degré de la fonction $F_1(y)$ est $p < n-1$, on aura $p-q$ équations

$$(51) \quad (w_k - v_1)^{m_1} (w_k - v_2)^{m_2} \dots (w_k - v_n)^{m_n} = C_k \\ (k = 1, 2, 3, \dots, p-q)$$

et encore $n-p-1$ équations

$$(58) \quad \sum m_i v_i = 0, \quad \sum m_i v_i^2 = 0, \dots, \sum m_i v_i^{n-p-2} = 0, \\ \sum m_i v_i^{n-p-1} = C^{(n-p-1)}.$$

Les $n-q-1$ équations (51), (58) détermineront les inconnus $v_1, v_2, \dots, v_{n-q-1}$ des équations différentielles (40).

La fonction $\varphi(y)$ est maintenant du degré $p-q$ et $w_1, w_2, \dots, w_{p-q}$ sont les racines de l'équation $\varphi(y) = 0$.

Pour le système (42) d'équations simultanées il faut prendre les équations (51), (58) et (57) qui déterminent les $n-q$ inconnus $v_1, v_2, \dots, v_{n-q}$ de ce système.

Ainsi dans le cas mentionné à la fin du § 19, où $\sum m_i = 0$, mais les constantes d'intégration restent complètement arbitraires il faut faire $p = n-2$. On aura donc alors les $p-q = n-q-2$ équations (51), l'équation (58), qui reste seule dans le groupe, à savoir,

$$\sum m_i v_i = C',$$

et l'équation (57)

$$\sum m_i v_i^2 = -2C' \int p_0 dx + C''.$$

Les valeurs de $v_1, v_2, \dots, v_{n-q}$ contiendront les $n-q$ constantes arbitraires $C_1, C_2, \dots, C_{n-q-2}, C', C''$, comme cela doit être effectivement.

La plus petite valeur de p est évidemment q , car $F_1(y)$ étant divisible par $N(y)$, son degré p ne peut pas être inférieur au degré q de $N(y)$.

Quand on a $p = q$ le groupe (51) ne contient aucune équation. Toutes les équations intégrales pour le système (40) sont contenues dans le groupe (58) et pour le système (42) dans ce groupe et dans l'équation (57)

$$\sum m_i v_i^{n-q} = - (n-q) C^{(n-q-1)} \int p_0 dx + C^{(n-q)}$$

On aura égard aux racines multiples de l'équation $\varphi(y) = 0$ pour chaque valeur de p précisément de la même manière qu'au § 8.

Il faut représenter le degré $p - \varrho$ de la fonction $\varphi(y)$ de toutes les manières possibles sous la forme d'une somme de nombres entiers positifs. Pour chaque représentation le groupe (51) a ses équations particulières. Prenons une de ces représentations et soit r un des termes de la somme correspondante. On supposera l'existence d'une racine de l'ordre r de multiplicité. Soit w_1 cette racine. Alors dans le groupe (51) on aura pour w_1 une seule équation

$$(w_1 - v_1)^{m_1} (w_1 - v_2)^{m_2} \dots (w_1 - v_n)^{m_n} = C_1,$$

mais on y mettra encore les $r - 1$ suivantes

$$\varphi'(w_1) = 0, \varphi''(w_1) = 0, \dots, \varphi^{(r-1)}(w_1) = 0,$$

de sorte que pour la racine w_1 il y aura r équations, comme pour r racines différentes.

En prenant toutes les représentations on épuiera tous les cas, où l'on puisse avoir des racines multiples.

Il est évident, que pour les valeurs $p = \varrho$ et $p = \varrho + 1$ elles n'existent point.

Enfin dans le second procédé p_0 étant une fonction arbitraire de x , on peut supposer $p_0 = 0$. Cela donne un cas particulier, où l'intégrale (57) devient

$$\sum m_i v_i^{n-p} = C^{(n-p)},$$

sans que la constante $C^{(n-p-1)}$ soit égale à zéro.

Toutes les solutions des systèmes (40) et (42) sont contenues dans les formules établies pour le cas général au § 19 et pour les cas particuliers au § présent. En prenant toutes les valeurs de $v_1, v_2, \dots, v_n$ qui résultent de ces formules et en ayant égard aux équations (36) et (41) pour le système (42) et aux équations (39) pour le système (40), on aura toutes les équations différentielles

$$(33) \quad M(y) dx + N(y) dy = 0,$$

dont l'intégrale générale se présente sous la forme

$$(33) \quad (y - v_1)^{m_1} (y - v_2)^{m_2} \dots (y - v_n)^{m_n} = C$$

à n facteurs et avec les rapports donnés

$$\frac{m_1}{m_n}, \frac{m_2}{m_n}, \dots, \frac{m_{n-1}}{m_n}$$

des exposants.

§ 21.

Remarquons maintenant qu'on peut toujours, au moyen des transformations des variables, réduire le coefficient p_0 à l'unité.

Nous supposons qu'il s'agit du second procédé.

Si p_0 est différent de zéro, on fera

$$\int p_0 dx = \xi$$

et on prendra ξ pour une nouvelle variable indépendante. L'équation (33) deviendra

$$\left(y^e + \frac{p_1}{p_0} y^{e-1} + \frac{p_2}{p_0} y^{e-2} + \dots + \frac{p_e}{p_0}\right) d\xi + N(y) dy = 0.$$

On supposera que les coefficients $\frac{p_1}{p_0}, \frac{p_2}{p_0}, \dots, \frac{p_e}{p_0}$ et ceux de $N(y)$ soient des fonctions de ξ et on aura une nouvelle équation différentielle, où les coefficients de y^e dans les deux polynômes sont égaux à l'unité.

Lorsqu'on a $p_0 = 0$, on fera $z = x + \omega$, ω étant une fonction arbitraire de x et z une nouvelle fonction inconnue, qui doit remplacer y .

Cette transformation réduit l'équation (33) à la suivante

$$M_1(z) dx + N_1(z) dz = 0,$$

où

$$M_1(z) = M(z + \omega) + \omega' N(z + \omega), \quad N_1(z) = N(z + \omega).$$

En prenant ω pour une variable indépendante, on réduira à l'unité le coefficient de z^e dans $M_1(z)$.

Faisons donc $p_0 = 1$ et supposons que les racines $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_e$ de l'équation $N(y) = 0$ et par conséquent aussi les coefficients $q_1, q_2, \dots, q_e$ soient des fonctions algébriques de x .

Si les exposants $m_1, m_2, \dots, m_n$ sont des nombres réels et rationnels, on démontrera comme au § 10, que les valeurs des quantités

$$v_1, v_2, \dots, v_n, p_1, p_2, \dots, p_e$$

seront des fonctions algébriques de x . Telle sera aussi la valeur de y dans l'équation (34).

Nous allons démontrer enfin que l'équation (47) est une conséquence des intégrales (51).

Leur produit donne l'équation

$$[\varphi(v_1)]^{m_1} [\varphi(v_2)]^{m_2} \dots [\varphi(v_n)]^{m_n} = \text{Const.}$$

Or de l'équation (38) on déduit

$$\begin{aligned} \varphi(v_i) &= \frac{m_i}{N(v_i)} F'(v_i) = \frac{m_i}{N(v_i)} (v_i - v_1) (v_i - v_2) \dots \\ &\dots (v_i - v_{i-1}) (v_i - v_{i+1}) \dots (v_i - v_n). \end{aligned}$$

En faisant ici $i = 1, 2, 3, \dots, n$ et en substituant dans l'équation précédente les valeurs de $\varphi(v_1), \varphi(v_2), \dots, \varphi(v_n)$, ainsi obtenues, on aura

$$\prod (v_i - v_j)^{m_i + m_j} = A [N(v_1)]^{m_1} [N(v_2)]^{m_2} \dots [N(v_n)]^{m_n}$$

ce qui est bien l'équation (47), où A est une constante arbitraire.

Ainsi le problème, concernant l'équation différentielle (33), que nous nous sommes proposé, est complètement résolu.

§ 22.

Les résultats que nous venons de trouver peuvent être énoncés de la manière suivante:

Considérons une équation différentielle

$$(1) \quad M(y) dx + N(y) dy = 0$$

dans laquelle $M(y)$ et $N(y)$ sont des fonctions entières de y , dont les coefficients sont des fonctions quelconques de x .

On suppose que $M(y)$ et $N(y)$ n'aient pas de facteurs communs qui soient des fonctions entières de y , que le degré de $M(y)$ ne surpasse pas celui de $N(y)$ et que l'équation $N(y) = 0$, en y regardant y comme inconnue, n'ait pas de racines multiples.

Proposons nous de trouver toutes les équations (1) dont l'intégrale générale se présente sous la forme

$$(2) \quad (y - v_1)^{m_1} (y - v_2)^{m_2} \dots (y - v_n)^{m_n} = C,$$

où $m_1, m_2, \dots, m_n$ sont des constantes données dont aucune n'est égale à zéro; $v_1, v_2, \dots, v_n$ des fonctions de x différentes entre elles; n un entier donné et C une constante arbitraire.

On demande aussi qu'on trouve toutes les valeurs de $v_1, v_2, \dots, v_n$ en fonction de x .

Les polynomes $M(y)$ et $N(y)$ peuvent être représentés ainsi

$$M(y) = p_0 y^q + p_1 y^{q-1} + \dots + p_q,$$

$$N(y) = (y - \alpha_1) (y - \alpha_2) \dots (y - \alpha_q).$$

Prenons arbitrairement $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q$ et p_0 comme fonctions de x , pourvu que parmi les quantités $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q$ il n'y ait point d'égalités entre elles, et considérons la fonction entière de y ,

$$F_1(y) = (y - v_1) (y - v_2) \dots (y - v_n) \sum \frac{m_i}{y - v_i},$$

l'indice i ayant les valeurs $1, 2, 3, \dots, n$. On posera d'abord les q équations

$$(3) \quad F_1(\alpha_1) = 0, \quad F_1(\alpha_2) = 0, \quad \dots, \quad F_1(\alpha_q) = 0.$$

Soit, pour abréger, $\frac{F_1(y)}{N(y)} = \varphi(y)$ et désignons par $\varphi'(y), \varphi''(y), \dots$ les dérivées partielles de $\varphi(y)$ prises par rapport à y . Soit aussi $w_1, w_2, \dots, w_{n-q-1}$ les racines de l'équation $\varphi(y) = 0$, lorsqu'on y regardent y comme inconnu. Ce sont autant de fonctions implicites de $v_1, v_2, \dots, v_n, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q$. Désignons encore par $C_1, C_2, \dots$,

$C', C'', \dots$ des constantes arbitraires. Cela posé on aura $n - \varrho$ équations

$$(4) (w_k - v_1)^{m_1} (w_k - v_2)^{m_2} \dots (w_k - v_n)^{m_n} = C_k, \quad (k=1, 2, 3, \dots, n-\varrho-1),$$

$$(5) \sum m_i v_i = - \sum m_i \int p_0 dx + C'.$$

Dans le cas général, où $\sum m_i$ diffère de zéro, les n équations (3), (4) et (5) déterminent $v_1, v_2, \dots, v_n$ comme fonctions de x , $C_1, C_2, \dots, C_{n-\varrho-1}, C'$.

Les coefficients $p_1, p_2, \dots, p_\varrho$ de $M(y)$ seront déterminés par ces ϱ équations

$$\alpha_k' \sum \frac{m_i}{(\alpha_k - v_i)^2} + p_0 \sum \frac{m_i v_i^{\varrho}}{N(v_i) (\alpha_k - v_i)^2} + p_1 \sum \frac{m_i v_i^{\varrho-1}}{N(v_i) (\alpha_k - v_i)^2} + \dots + p_\varrho \sum \frac{m_i}{N(v_i) (\alpha_k - v_i)^2} = 0, \\ (k = 1, 2, 3, \dots, \varrho).$$

Lorsqu'on a $\sum m_i = 0$, le degré de $F_1(y)$ est inférieur à $n - 1$. Supposons, en général, qu'il soit p . Alors celui de $\varphi(y)$ sera $p - \varrho$ et, dans le groupe (4), il n'y aura que $p - \varrho$ équations. En revanche, on aura d'abord $n - p - 1$ équations

$$\sum m_i v_i = 0, \quad \sum m_i v_i^2 = 0, \quad \dots, \quad \sum v_i^{n-p-1} = C^{(n-p-1)},$$

et, au lieu de l'équation (5), cette autre

$$\sum m_i v_i^{n-p} = - (n - p) C^{(n-p-1)} : \int p_0 dx + C^{(n-p)}.$$

Pour chaque valeur de p plus grande que $\varrho + 1$, il faut encore avoir égard aux cas où l'équation $\varphi(y) = 0$ a des racines multiples. A cet effet on représentera $p - \varrho$ de toutes les manières possibles sous la forme d'une somme de nombres entiers positifs. Pour chaque représentation le groupe (4) aura ces équations particulières. Prenons une de ces représentations et soit r un des termes d'une somme correspondante. On supposera l'existence d'une racine, par exemple, w_1 , de l'ordre r de multiplicité. Alors, dans le groupe (4), on aura pour w_1 , une seule équation, mais on y mettra encore les $r - 1$ suivantes:

$$\varphi'(w_1) = 0, \quad \varphi''(w_1) = 0, \quad \dots, \quad \varphi^{(r-1)}(w_1) = 0,$$

et ce groupe contiendra toujours $p - \varrho$ équations. En donnant à p les valeurs $\varrho, \varrho + 1, \varrho + 2, \dots, n - 1$ et en ayant égard aux racines multiples pour chaque valeur de $p > \varrho + 1$, on aura toutes les équations (1), qui ont une intégrale générale (2).