Zur Theorie der Elimination und der algebraischen Curven.

Von A. BRILL in DARMSTADT.

Der vorliegende Aufsatz bildet die Einleitung zu dem nachfolgenden „Ueber zwei Berührungsprobleme“. Man wird dort auf die Aufgabe geführt, die Bedingung dafür anzugeben, dass 3 Curven, welche eine gewisse Anzahl von gegebenen Punkten gemeinsam haben, sich in einem weiteren Punkte schneiden. Je nachdem die Gleichungen der Curven alle oder nur theilweise durch die Coordinaten der gemeinsamen Punkte *identisch* erfüllt werden, ist diese Aufgabe eine durchaus verschiedene. Im Nachfolgenden werden nur 2 von den möglichen Fällen betrachtet.

Zunächst werden alle 3 Curvengleichungen als identisch erfüllbar vorausgesetzt. Im Anschluss an eine Bezeichnung, deren sich Herr Cayley für einen ähnlichen Begriff bedient hat*), will ich die „reducirte Resultante“ von 3 Gleichungen mit 2 Unbekannten, welche durch ein oder mehrere Werthsysteme der Unbekannten identisch erfüllt werden, diejenige ganze Function der Coefficienten nennen, deren Verschwinden die Existenz einer weiteren gemeinsamen (von den gegebenen verschiedenen) Lösung anzeigt. An einzelnen Beispielen (§§ 1. 3.) soll gezeigt werden, wie man einen solchen Ausdruck bildet, sodann wird der Grad desselben in den Coefficienten der 3 Gleichungen**) allgemein bestimmt (§§ 2. 4.).

Uebergehend zu dem wichtigeren Falle (der eigentlich diese Betrachtungen veranlasst hat), dass die Coordinaten eines der gemeinsamen Punkte eine der drei Gleichungen nicht identisch befriedigen, wird (§§ 5. 6.) ein Satz bewiesen, welcher die Zahl derjenigen Punktepaare x, α auf einer algebraischen Curve von beliebigem Geschlecht bestimmen lehrt, welche zugleich 2 Bedingungsgleichungen, die man zwischen den Coordinaten der Punkte x und α angenommen hat, genügen***). Diese Bedingungsgleichungen (welche übrigens auch beide durch noch andere Werthepaare identisch befriedigt werden können) lassen sich

---

*) „Recherches sur l'élimination etc.“ Crelle-Borchardt, Bd. 34.

**) Wir sehen in der Folge die Coefficienten an lediglich als Functionen der Coordinaten α, β eines allen Curven gemeinsamen Punktes, den wir kurzweg mit α bezeichnen (ebenso wie x einen Punkt mit den Coordinaten x, y bedeutet).

***). Einen geometrischen Beweis dieses Satzes und damit in Verbindung den eines verwandten, welcher die Ausdehnung des Correspondenzprinzips von Chasles auf Curven von allgemeinem Geschlecht enthält, hat der Verf. in den Gött. Nachrichten vom Oct. 1871 gegeben.

bekanntlich für Curven vom Geschlecht Null in algebraische Gleichungen zwischen den den Punkten x und α zugehörigen Parametern überführen, deren Resultante sich, auch wenn gleiche Wurzeln auftreten, nach bekannten Regeln bestimmen lässt.

Die entsprechende Aufgabe für Curven von allgemeinem Geschlecht zu lösen, ist die in § 6. gegebene Formel bestimmt. Die Beschränkungen, welchen der Gebrauch derselben unterliegt, lassen sich am besten aus der in jenem nachfolgenden Aufsätze gegebenen Anwendung erkennen; sowie auch aus den Anwendungen auf die Theorie der Raumcurven, welche in § 7. beispielsweise aufgeführt sind, sich manches Ergänzende ergibt. Noch sei erwähnt, dass die dort erhaltenen Formeln mit den von Hrn. Zeuthen in seiner erschöpfenden Abhandlung „sur les singularités des courbes gauches“ (Annali di mat., ser. 2. t. III.) gegebenen übereinstimmen.

§ 1.

Gegeben seien die Gleichungen von 3 Curven:

$$(1) \quad f(xy) = 0, \quad \varphi(xy) = 0, \quad \psi(xy) = 0,$$

die in der Folge öfters mit $f=0$, $\varphi=0$, $\psi=0$ oder auch kurzweg mit f , φ , ψ bezeichnet werden mögen. Dieselben seien von den resp. Ordnungen n , p , q und sollen durch die Coordinaten α , β eines Punktes α alle 3 identisch befriedigt werden. Es ist die Bedingung zu finden, welche nothwendig erfüllt sein muss und hinreicht, um die Existenz eines weiteren gemeinsamen Punktes x (Coordinaten x , y) anzuzeigen. Geometrisch aufgefasst würde diese Bedingung den geometrischen Ort eines Punktes α geben, in welchem sich die 3 Curven f , φ , ψ schneiden müssen, damit sie noch einen weiteren gemeinschaftlichen Punkt besitzen.

Die Resultante R der 3 Gleichungen (1) verschwindet unter obiger Voraussetzung identisch. Man bilde statt dessen die Resultante der 3 nachfolgenden*):

$$(2) \quad f(xy) = 0, \quad \varphi(xy) = 0, \quad \psi(xy) + \varepsilon \cdot \Psi(xy) = 0,$$

wo ε eine gegen Null convergirende Grösse ist und Ψ eine beliebig gewählte Function, welche in den Coordinaten x , y und α , β von derselben Ordnung wie ψ ist.

Diese Resultante hat alsdann die Form:

$$P = R + \varepsilon \cdot \delta R + \varepsilon^2 \cdot \delta^2 R + \dots$$

Da R verschwindet und ε gegen Null convergirt, so ist derjenige Theil, welcher im vorliegenden Falle die Stelle der Resultante vertritt,

*) Dieses Verfahren wurde in den „Abel'schen Functionen“ von Clebsch und Gordan auf einen ähnlichen Fall angewendet. Vergl. auch Serret's Höhere Algebra, I. Bd.

der Coefficient δR der ersten Potenz von ε . Haben die 3 Curven einen zweiten gemeinsamen Punkt, so muss auch δR verschwinden. Umgekehrt jedoch ist das Verschwinden von δR nicht die nothwendige Bedingung für die Existenz eines zweiten, allen dreien gemeinsamen Schnittpunktes. Man kann nämlich zeigen, dass δR zwei Factoren besitzt, deren Verschwinden diese Bedingung nicht ausdrückt und welche demnach unwesentlich sind.

Zu dem Zwecke stellen wir nach Poisson die Resultanten P in Form eines Productes von irrationalen Functionen der Coefficienten dar.

Seien $1, 2, 3, \dots, np - 1, np$ die Schnittpunkte der beiden Curven f und φ , von welchen der Punkt (1) der allen gemeinsame α sein möge. Setzt man diese der Reihe nach in $\psi + \varepsilon \cdot \Psi$ ein und bildet das Produkt, so erhält man die Resultante P in der Form:

$$P = (\psi + \varepsilon \cdot \Psi)_\alpha \cdot (\psi + \varepsilon \cdot \Psi)_2 \cdot (\psi + \varepsilon \cdot \Psi)_3 \cdot \dots \cdot (\psi + \varepsilon \cdot \Psi)_{np}.$$

Vergleicht man nun die Coefficienten von ε in diesem und dem vorigen Ausdrücke für P , so kommt, indem man $(\psi)_\alpha = 0$ berücksichtigt:

$$\delta R = (\Psi)_\alpha \cdot (\psi)_2 \cdot (\psi)_3 \cdot \dots \cdot (\psi)_{np}.$$

Man bemerkt zunächst, dass der Factor $(\Psi)_\alpha$ nur dann als ganze Function auftritt, wenn die Coordinaten α explicite gegeben sind, also bei der Darstellung als bekannt adjungirt werden können.

Der übrig bleibende Theil von δR ist in den Coefficienten von ψ vom Grade $np - 1$, in denen von f und φ resp. vom $p^{q^{\text{ten}}}$ und $n^{q^{\text{ten}}}$ Grade. (Hier wie in der Folge betrachten wir die Coefficienten der 3 Gleichungen als Functionen der Coordinaten α, β des beweglichen Punktes α .) Da nun aber die reducirte Resultante, welche wir suchen, gegen die 3 Functionen f, φ, ψ das gleiche Verhalten zeigen muss, so liegt es nahe, auf die Existenz von einem weiteren „speciellen Factor“ zu schliessen, durch welchen sich die reducirte Resultante von δR unterscheidet und welcher hier in den Coefficienten von φ und ψ je vom ersten Grade sein wird. Dies wird durch folgende Betrachtung bestätigt. Der Punkt α , dessen Coordinaten in den 3 Curvengleichungen vorkommen, kann im Allgemeinen auf der Ebene noch jede beliebige Lage haben. So oft nun für irgend eine solche Lage der Ausdruck:

$$(\varphi f)_\alpha = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} \right)_{\substack{x=\alpha \\ y=\beta}}$$

(wo der eine Index links die beiden angehängten Gleichungen rechts ersetzen soll) verschwindet*), stimmen in diesem Punkte entweder die Werthe $\left(\frac{dy}{dx}\right)_\alpha$, gebildet für die beiden Curven f und φ , überein, oder

*) Im Allgemeinen geschieht dies nur in der ersten Ordnung.

eine der beiden besitzt in diesem Punkte einen Doppelpunkt. In beiden Fällen verschwindet aber einer der $np - 1$ letzten Factoren von δR , somit auch δR selbst. In Bezug auf die Coordinaten α, β repräsentirt also $\delta R = 0$ eine Curve, welche alle Punkte enthält, für die der obige Ausdruck verschwindet. $(\varphi f)_\alpha$ ist demnach Factor von δR .

Die beiden oben gefundenen Factoren von δR können nun aber nicht zugleich solche der reducirten Resultante sein, weil ihr Verschwinden im Allgemeinen nicht die Existenz eines weiteren gemeinsamen Schnittpunktes der 3 Curven ausserhalb α anzeigt. Sie sind somit „specielle“ Factoren von δR und erst auszuschneiden, ehe man die reducirte Resultante erhält.

Man kann jene beiden Factoren noch zu einem einzigen Ausdrucke zusammenziehen, welcher in Bezug auf die Coefficienten der Gleichungen (2) symmetrisch ist.

Die Functionaldeterminante $(f \varphi \Psi)$ nämlich der Functionen f, φ, Ψ , genommen in Bezug auf homogene Coordinaten $(\frac{x_1}{x_3} = x, \frac{x_2}{x_3} = y)$, lässt sich, wenn man in dieselbe die Coordinaten α, β des gemeinsamen Punktes statt x, y einsetzt, mit Rücksicht auf die Gleichungen $f(\alpha\beta) \equiv 0, \varphi(\alpha\beta) \equiv 0$ so umgestalten, dass dieselbe in die beiden speciellen Factoren von δR zerfällt. Man hat also die Gleichung:

$$\delta R = \varrho \cdot (f \varphi \Psi)_\alpha,$$

wo ϱ , wie gleich gezeigt werden soll, die *reducirte Resultante* ist.

§ 2.

Es ist noch zu beweisen, dass jener Ausdruck ϱ , welcher in den Coefficienten der 3 Gleichungen f, φ, ψ bezw. vom Grade $pq - 1, qn - 1, np - 1$ ist, in der That die reducirte Resultante der 3 Gleichungen ist.

Wir führen statt dessen allgemein den Beweis, dass 3 Curven f, φ, ψ von der Ordnung bezw. m, p, q , welche in einem Punkte α beliebig vielfache Punkte besitzen, deren Zweige sich auch gegenseitig berühren können*), eine reducirte Resultante haben, welche in den Coefficienten der 3 Gleichungen bezw. vom Grade $pq - \nu, qn - \pi, np - \kappa$ ist, wo ν, π, κ die Anzahl der in α fallenden Schnittpunkte von bezw. φ und ψ, ψ und f, f und φ ist.

---

*) Der Verlauf der je zweien Curven gemeinsamen Bogenelemente in einem allen gemeinsamen Punkte α möge in der Folge als gegeben betrachtet werden, und zwar so, dass für irgend zwei in α sich r fach berührende Zweige die r ersten Differentialquotienten *identisch* übereinstimmen.

Variirt man nämlich, wie dies in dem obigen besonderen Falle geschehen, die Coefficienten von einer der Curvengleichungen $\psi = 0$, indem man statt dessen $\psi + \varepsilon \cdot \Psi = 0$ schreibt, und entwickelt die Resultante von dieser Function und f und φ nach Potenzen von ε , so verschwindet identisch $R, \delta R, \dots \delta^{x-1} R$; die Stelle der Resultante vertritt der Coefficient von ε^x :

$$\delta^x R = (\Psi)_\alpha^x \cdot (\psi)_{x+1} \cdot (\psi)_{x+2} \dots (\psi)_{np},$$

indem man durch Indices die Schnittpunkte von f und φ bezeichnet, welche der Reihe nach in $\psi + \varepsilon \Psi$ eingesetzt werden. Zunächst ist der Factor Ψ_α^x dem Begriff der reducirten Resultante fremd. Man kann aber auch noch andere Punkte (α, β) finden, für welche $\delta^x R$ verschwindet, ohne dass deshalb φ, f, ψ ausserhalb α einen weiteren Schnittpunkt gemeinsam haben. Dies erfolgt nämlich immer dann, wenn ein weiterer Schnittpunkt von φ und f nach α rückt, weil immer dann einer der $np - x$ irrationalen Factoren von $\delta^x R$ verschwindet. Man denke sich nun alle möglichen Ausdrücke aufgestellt, deren Verschwinden aussagt, dass in den Punkt α , in welchem sich bereits x Schnittpunkte von f und φ befinden, ein $(x+1)^{\text{ter}}$ solcher fällt. Dieselben sind Functionen nur noch von den Coefficienten von φ und f , und endlich an Zahl.

Wir betrachten einen solchen nicht zerfallenden Ausdruck. Da eine unendliche Zahl von Werthen (α, β) zugleich diesen und den Ausdruck $\delta^x R$ zum Verschwinden bringt, so muss derselbe Factor von $\delta^x R$ sein. Alle Ausdrücke der geschilderten Art, welche nicht zerfallen, sind demnach Factoren von $\delta^x R$. Es ist indess nicht immer leicht zu ermitteln, wie oft ein solcher Factor in $\delta^x R$ auftritt. Weil von den $np - x$ irrationalen Factoren von $\delta^x R$ nur dann einer verschwindet, wenn entweder der entsprechende Schnittpunkt ausserhalb α sich befindet, in welchem Falle ψ ausser f und φ für diesen Punkt verschwindet, oder wenn der entsprechende Punkt nach α fällt, so müssen, da die Punkte der letzteren Art sich zu Factoren von $\delta^x R$ vereinigen, welche man ausscheiden kann, die Punkte der ersten Art den übrig bleibenden Factor zum Verschwinden bringen; es muss also eine reducirte Resultante existiren.

Dieser Ausdruck muss von seiner Entstehungsweise unabhängig sein. Ebenso, wie sich nun der Grad desselben in Bezug auf die Coefficienten von ψ durch Variation dieser letzteren als $mp - x$ ergeben hat, so erhält man durch Variation von φ bzw. f für den Grad der Coefficienten in diesen Functionen $qr - x, pq - v$.

Diese Bemerkung gewährt, wie wir sehen werden, bei der Aufstellung der Potenz der Divisoren von $\delta^x R$ einen Anhaltspunkt.

§ 3.

Es mögen zunächst für einige weitere Beispiele die speciellen Factoren ermittelt werden.

Wenn die Curve ψ in dem gemeinsamen Punkte α einen Doppelpunkt besitzt, so mag φ variirt werden. $\delta^2 R$ verschwindet alsdann allemal, wenn die Curven ψ und f in α einen weiteren Schnittpunkt besitzen. Nun ist aber die Gleichung:

$$0 = [\varphi f^2]_{\alpha} = \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 - 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \right]_{x=\alpha, y=\beta}$$

nur dann erfüllt, wenn entweder f in α einen Doppelpunkt besitzt, oder wenn f einen Zweig von φ in α berührt. Da aber in beiden Fällen einer der irrationalen Factoren von $\delta^2 R$ verschwindet, so ist $[\varphi f^2]_{\alpha}$ Factor von $\delta^2 R$, und zwar specieller Factor. Die reducirte Resultante ϱ ist demnach in den Coefficienten von f , φ , ψ bezw. von $pq - 2$, $qn - 2$, $np - 1^{\text{ten}}$ Grade, wie dies auch aus dem Satz in § 2. hervorgeht.

Wenn man statt der Coefficienten von φ die von ψ variirt, so verschwindet δR allemal dann, wenn $(f\varphi)_{\alpha}$ (s. oben § 1.) verschwindet. Weil aber δR alsdann nicht bloss einfach Null wird, sondern, da ψ in α einen Doppelpunkt besitzt, auch die ersten partiellen Differentialquotienten von δR verschwinden, wenn der Punkt α so beschaffen ist, dass sich φ und f in α berühren, so wird δR wie $(f\varphi)_{\alpha}^2$ Null. Die reducirte Resultante ist demnach darstellbar durch:

$$\varrho = \frac{\delta R}{\psi_{\alpha} \cdot (f\varphi)_{\alpha}^2}.$$

Ueberhaupt: besitzt ψ in dem gemeinsamen Punkte α , durch welchen die Curven φ und f einfach hindurch gehen, einen κ -fachen Punkt, so variire man ψ . $\delta^2 R$ ist alsdann zu dividiren durch $\Psi_{\alpha} \cdot (\varphi f)_{\alpha}^{\kappa}$, wo $(\varphi f)_{\alpha} = 0$ wie oben die Bedingung für eine Berührung von φ und f in α ist.

Wenn φ und f sich in α berühren, ohne dass die beiden die Curve ψ , welche einfach hindurch geht, berühren, so transformire man die Gleichungen so, dass α in den Ursprung fällt. Dann sind die Gleichungen von der Form:

$$\psi = xu + yv; \quad f = c(x + \kappa y) + \omega; \quad \varphi = c'(x + \kappa y) + \omega';$$

wo κ , c , c' Constante; u , v beliebige ganze Functionen von x und y ; ω , ω' aber solche sind, deren Glieder niedrigster Dimension in x und y von der 2^{ten} Dimension sind. Man variire ψ und dividire durch:

$$\Psi_0^2 \cdot (c\omega' - \omega c')_0,$$

wo der angehängte Index bedeutet, dass für x, y 0, 0 einzusetzen ist.

Hätte man φ statt ψ variirt, so wäre durch:

$$\Phi_0 \cdot (u\alpha - v)_0^2 \cdot c$$

zu dividiren gewesen. Das Verschwinden von c zeigt die Existenz eines Doppelpunktes von f in dem Ursprung des Coordinatensystems an; das Verschwinden von $u\alpha - v$ eine Berührung von ψ mit den beiden Curven φ und f .

Es ist in vielen Fällen nicht schwer, sich direct von der Möglichkeit der Ausscheidung der speciellen Factoren zu überzeugen.

Berühren sich z. B. alle 3 Curven f, φ, ψ in α , so transformire man so, dass α in den Ursprung fällt und die Y -Axe gemeinsame Tangente wird. Dann haben die Gleichungen die Form:

$$\psi = xu + y^2v; \quad \varphi = xu' + y^2v'; \quad f = xu'' + y^2v''.$$

Berechnet man die Werthepeare $x_3y_3, x_4y_4, \dots$ welche $\varphi = 0$ und $f = 0$ gleichzeitig befriedigen (ausser $x = y = 0$) und bildet das Product:

$$\delta^2 R = (xu + y^2v)_3 (xu + y^2v)_4 \dots \dots \dots$$

so scheidet dasselbe den Factor $y_3^2 y_4^2 \dots$ aus. Derselbe ist aber das Quadrat desjenigen Ausdrucks, dessen Verschwinden das Zusammenfallen eines der Schnittpunkte 3, 4, $\dots$ mit $x = y = 0$ aussagt, also gleich $u'v'' - v'u''$.

Ueberhaupt: berühren die Curven f, φ, ψ in dem gemeinsamen Punkt α , durch welchen jede einfach hindurchgeht, einander i punktig ($i + 1$ gemeinsame Schnittpunkte), so dass also die Differentialquotienten bis zum i in diesem Punkt identisch übereinstimmen; so erhält man die reducirte Resultante, indem man $\delta^{i+1} R$ dividirt durch die $(i + 1)^{\text{te}}$ Potenz von $\Psi_\alpha \cdot [\varphi f]_\alpha$, wenn $[\varphi f]_\alpha = 0$ die Bedingung dafür ist, dass φ und f sich in α $(i + 1)$ punktig berühren. Diese Bedingung ist unter Adjunction der gemeinschaftlichen i ersten Differentialquotienten linear in Bezug auf die Coefficienten von φ und f .

§ 4.

Ausser dem beweglichen Punkt α mögen jetzt noch andere festliegende Punkte $\lambda, \lambda_2, \dots$ (Coordinaten $\lambda_i \mu_i$) den Curven f, φ, ψ gemeinsam sein. Es sei zunächst die Annahme, dass ausser einem einfachen Schnittpunkt α noch ein einfacher solcher λ gemeinsam sei.

Man variire etwa ψ . R und δR verschwinden identisch, weil ψ_α und ψ_λ Null sind. Es bleibt zu untersuchen:

$$\delta^2 R = \Psi_\alpha \cdot \Psi_\lambda \cdot \psi_3 \cdot \psi_4 \dots \dots \psi_{m\lambda}.$$

Das Produkt: $(\varphi f)_\alpha (\varphi f)_\lambda$ (die Bezeichnung wie in § 1.) verschwindet nur für diejenigen Werthepeare α, β , welche so beschaffen sind, dass entweder φ und f sich in den Punkten α oder λ berühren, oder dass

eine derselben in einem der beiden Punkte einen Doppelpunkt besitzt. Allemal dann verschwindet aber auch einer der irrationalen Factoren von $\delta^2 R$. Nur für das eine Werthepaar $\alpha = \lambda$, $\beta = \mu$, für welches jeder der beiden Factoren des Productes P verschwindet, ist es nicht immer unmittelbar ersichtlich, dass $\delta^2 R$ von derselben Ordnung wie P zu Null wird*). Indess muss dies, wenn α frei beweglich ist, um deswillen der Fall sein, weil 2 Curven nicht in allen bis auf einen Punkt übereinstimmen können. Die Division mit P ist demnach ausführbar.

Diese Schlüsse lassen sich auf den allgemeineren Fall übertragen, dass die 3 Curven ausser in dem variablen Punkt α noch in mehreren festen Punkten $\lambda_1 \lambda_2 \dots$ mehrfache Punkte mit sich berührenden Zweigen besitzen. *Die auszuschheidenden Factoren sind dieselben, als ob bloss jeder der gemeinsamen Punkte allein vorhanden wäre.*

Wenn dagegen α nicht frei beweglich ist, sondern z. B. auf einer Curve zu bleiben gezwungen ist, so ist der obige Schluss nicht mehr zutreffend; man muss alsdann eine direkte Untersuchung darüber anstellen, ob $\delta^2 R$ für $\alpha = \lambda_i$, $\beta = \mu_i$ ebenso oft verschwindet, wie diejenigen Ausdrücke, welche zu speciellen Factoren werden, wenn dies stattfindet**). Auf diesen Fall kommen wir weiter unten zurück.

Hat man nun 3 Curven gegeben, deren Gleichungen:

$$p(x, \alpha) = 0 \quad q(x, \alpha) = 0 \quad r(x, \alpha) = 0,$$

sowohl die Coordinaten des Punktes α (bezw. in der p' , q' , r' Ordnung), wie die des Punktes x (bezw. in der p' , q' , r' Ordnung) enthalten. Dieselben mögen in dem frei beweglichen Punkt α bezw. einen b , c , d fachen Punkt besitzen, und ausserdem noch alle drei durch gewisse feste Punkte der Ebene $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ beliebig oft hindurchgehen. Schneiden sich q und r ausser in diesen festen Punkten noch in u Punkten (von welchen $c \cdot d$ in den Punkt α fallen), r und p noch in v , p und q noch in w Punkten, von welchen bezw. $d \cdot b$, $b \cdot c$ in α

*) Wenn λ in den Ursprung verlegt wird, so hat im Allgemeinen eine Curvengleichung, welche sowohl für $x = \lambda$, wie für $x = \alpha$ je einfach identisch verschwindet, die Form:

$$(ux + vy)(x - \alpha) + (px + qy)(y - \beta) + (\beta x - \alpha y)r = 0,$$

wo p, q, v, r Functionen von x und α sind. Diese Curve hat aber für $x = \alpha = 0$, $y = \beta = 0$ einen Doppelpunkt. Wenn dies für f, φ, ψ gleichzeitig eintritt, so fällt ein vierfacher Punkt von $\delta^2 R = 0$ in $\alpha = \lambda$.

**) Ist z. B. $\alpha = \lambda = 0$, und $\mu = 0$, dagegen β von Null verschieden, so repräsentirt die Gleichung:

$$vy(y - \beta) + xu = 0$$

einen solchen Ausnahmefall. Sind φ und f von dieser Form, so muss aus dem Product P (s. oben) erst der Factor β ausgesondert werden, ehe die Division von $\delta^2 R$ ausführbar wird.

fallen, so soll der Grad derjenigen Curve bestimmt werden, welche der Punkt α beschreiben muss, damit sich die 3 Curven in noch einem weiteren ausserhalb α gelegenen Punkte z schneiden. Wir bedürfen bei Aufstellung dieser Zahl noch der Kenntniss des Grades der Curve, auf welcher sich α immer und nur dann befindet, wenn die Curven q und r noch einen weiteren Schnittpunkt ausser jenen u in dem Punkt α besitzen. Sei dieser Grad π ; u und q die entsprechenden für r und p , p und q . Man variire zunächst die Coefficienten von einer der 3 Gleichungen, z. B. von p . Die Coefficienten der niedrigsten Potenzen von ε mögen verschwinden bis zu $\delta^* R$. Alsdann lässt sich ein Produkt P von (speciellen) Factoren bilden (jeder Factor geschrieben in den Coordinaten eines der Allen gemeinsamen Punkte), dessen Verschwinden die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, dass q und r in einem der gemeinsamen Punkte $\alpha, \lambda_1, \lambda_2, \dots$ einen weiteren Schnittpunkt ausser den bereits vorhandenen besitzt. Dieses Produkt ist Factor von $\delta^* R$, nach dessen Wegheben die reducirte Resultante bleibt, deren Grad in den Coordinaten α, β gesucht wird. Nach Ausscheidung desjenigen Theils von P , welcher von den Punkten $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ herrührt, aus $\delta^* R$ bleibt ein Ausdruck, welcher (nach § 2.) in den Coefficienten von p, q, r bezw. vom Grad u, v, w ist. Derjenige Theil von P , welcher von dem Punkt α herrührt, besteht wieder aus zwei Factoren, deren einer die $c \cdot d^{\text{te}}$ Potenz des variirten p ist, und somit in den Coordinaten $\alpha \cdot \beta$ von der $c \cdot d \cdot (p + p)^{\text{ten}}$ Ordnung ist, deren anderer eine b^{te} Potenz ist (§ 3.), und eine Reduction in Bezug auf die Coordinaten α, β veranlasst $= b \cdot \pi$. Somit ist die Ordnung derjenigen Curve, auf welcher sich der Punkt α bewegen muss, damit die 3 Curven p, q, r einen weiteren Schnittpunkt ausserhalb α gemeinsam haben:

$$= u \cdot p' + v \cdot q' + w \cdot r' - c \cdot d \cdot (p' + p) - b \cdot \pi^*).$$

§ 5.

Den vorstehenden Betrachtungen lassen sich ganz analoge an die Seite stellen, welche sich auf einen Fall von allgemeinerem Interesse beziehen, dass nämlich eine der drei Curren Gleichungen nicht identisch durch die Coordinaten des gemeinsamen Punktes α befriedigt wird, dieselben vielmehr gar nicht enthält. Man hat sich alsdann α nicht mehr ganz willkürlich, sondern auf jener Curve beweglich vorzustellen. Sei $f(x) = 0$ die Gleichung derselben, $p(x, \alpha) = 0$ $q(x, \alpha) = 0$ die der

*) Durch cyclische Vertauschung erhält man zwei neue Formeln für dieselbe Zahl, welche zu den merkwürdigen Relationen Veranlassung geben:

$$c \cdot d \cdot (p + p') + b \cdot \pi = d \cdot b \cdot (q + q') + c \cdot z = b \cdot c \cdot (r + r') + d \cdot q.$$

beiden anderen Curven. Variirt man die Coefficienten von p z. B., und verschwinden etwa die $z - 2$ ersten Glieder der Entwicklung der Resultante nach ε identisch, das $z - 1^{\text{te}}$ Glied unter Zuziehung der Gleichung $f(\alpha) = 0$, so ist das z^{te} Glied $\delta^* R$ nun nicht mehr nach seinem Grad in Bezug auf α zu betrachten, sondern nach der Zahl derjenigen Coordinatenpaare α, β , durch welche sowohl $\delta^* R = 0$ als auch $f = 0$ befriedigt werden, welche jedoch weder zu singulären Punkten von f noch zu solchen Punkten λ gehören, welche von vornherein als den 3 Curven gemeinschaftlich angenommen werden. Solche Schnittpunkte wollen wir in der Folge zum Unterschied von den „festen“ Punkten (nämlich den singulären und jenen Punkten λ) kurzweg „freie“ nennen. Es sollen nun diejenigen freien Schnittpunkte α von $\delta^* R = 0$ mit $f = 0$ gefunden werden, in welchen sich p und q schneiden müssen, wenn diese beiden Curven noch einen weiteren Schnittpunkt x auf $f = 0$, welcher nicht in jenen fällt, besitzen sollen.

Wir haben analog dem früheren Fall aus der Zahl sämtlicher freien Schnittpunkte diejenigen auszuschneiden, welche einen in die singulären und festen Punkte λ oder nach α selbst zurück fallenden weiteren Schnittpunkt liefern würden. Diese Punkte sind nun aber diejenigen, welche ein dem im vorstehenden § erwähnten Produkt P entsprechend gebildetes Produkt von speciellen Factoren, gleich Null gesetzt, in Verbindung mit $f = 0$, liefern. Dies ergibt sich aus folgender Betrachtung.

Wir führen den vorliegenden Fall auf den früher behandelten, wo alle 3 Gleichungen identisch befriedigt werden, zurück, wenn wir für $f(x) = 0$ die Gleichung substituiren:

$$\Omega(x, \alpha) = f(x) \cdot \vartheta(x) \cdot \omega(\alpha) - f(\alpha) \cdot \vartheta(\alpha) \cdot \omega(x) = 0,$$

wo $\omega(x) = 0$ eine durch alle festen Punkte ebenso oft wie f selbst hindurchgehende Curve ist; $\vartheta(x) = 0$ eine beliebige Curve von so hohem Grad, dass $\vartheta(x) \cdot f(x)$ von demselben Grad wie $\omega(x)$ ist. Jene Curve Ω hat in allen gemeinsamen Punkten α und λ dieselbe Vielfachheit, wie f selbst. Ihre Gleichung zerfällt, wenn α ein Punkt auf f ist, in ein Produkt von 3 Gleichungen, deren eine $f = 0$ ist. Man denke sich wieder p variirt, und die Coordinaten der Schnittpunkte von q und Ω in $p + \varepsilon P = 0$ eingesetzt. Bezeichnet man mit $\delta^* R_\Omega$ das erste nicht verschwindende Glied in der Entwicklung dieser Resultante nach ε , mit $\delta^* R_f$ das entsprechende für die Resultante von $p + \varepsilon P = 0, f = 0, q = 0$ (gebildet unter Zuziehung der Gleichung $f(\alpha) = 0$), so ist $\delta^* R_\Omega$ von der Form:

$$\delta^* R_f \cdot R_\vartheta \cdot \omega^s(\alpha) + f(\alpha) \cdot M,$$

wo R_ϑ die Resultante von ϑ, p, q ist, s eine ganze Zahl.

Das Produkt P_Ω von speciellen Factoren, welches nach Früherem in δ^*R_Ω als Factor enthalten ist, hat die Form:

$$P_f \cdot \vartheta(\alpha) \cdot \omega(\alpha) + f(\alpha) \cdot N,$$

wo P_f das entsprechende Produkt von speciellen Factoren, gebildet unter Zuziehung von $f(\alpha) = 0$ für q und f , statt q und Ω , ist, t und r ganze Zahlen. Denn q und Ω haben, im Fall α auf f liegt, nur dann in einem der gemeinsamen Punkte einen weiteren Schnittpunkt gemeinsam, wenn entweder $\omega(\alpha)$ oder wenn $\vartheta(\alpha)$ verschwindet, oder endlich, wenn f und q einen weiteren gemeinsamen Punkt in den angenommenen besitzen. Für irgend einen Punkt α auf f , für welchen $P_f \cdot \vartheta(\alpha)$ verschwindet, muss nun aber $\delta^*R_f \cdot \omega^{s-t}(\alpha) \cdot R_\Omega$ mindestens in derselben Ordnung verschwinden, weil sonst jene Division nicht ausführbar wäre. Die freien Schnittpunkte von $P_f = 0$ mit $f(\alpha) = 0$ können nun aber von jenen Factoren nur δ^*R_f zum Verschwinden bringen, denn wenn der Punkt α so gelegen ist, dass q und f in einem Punkte λ oder in α einen weiteren Schnittpunkt besitzen, so verschwindet, wenn α „frei“ ist, im Allgemeinen weder $\omega(\alpha)$ noch die Resultante R_Ω . Hiermit ist aber unsere Behauptung erwiesen.

Von einer Ausführung der Division δ^*R_f durch P_f kann im vorliegenden Fall nicht die Rede sein. In welcher Weise dieselbe unter Adjunction der Gleichung $f(\alpha) = 0$ geschehen kann, geht aus dem Vorstehenden hervor.

§ 6.

Wir gehen nun dazu über, den in § 4. aufgestellten Satz auf den vorliegenden Fall zu übertragen. Wir nehmen an, dass die Curven p , q ausser in gewissen festen Punkten λ (die auch singuläre Punkte von f sein können), in welchen sie die Curve f beliebig oft schneiden und berühren mögen, in einem auf f beweglichen Punkt α bzw. einen b und c fachen Punkt besitzen. Vermöge der Gleichung $p = 0$ mögen einem Punkt x p_1 freie Punkte α und einem Punkt α p_2 freie Punkte x entsprechen, von welchen je b nach x bzw. α zurückfallen. Sei ferner P die Zahl derjenigen freien Punkte α auf f , welchen der vermöge der Gleichung $p = 0$ entsprechende Punkt x unendlich nahe gelegen ist, also die Zahl der Lösungen der Gleichungen:

$$f(x) = 0 \quad p(x, \alpha)_{\alpha=x} = 0,$$

wo $\alpha = x$ die benachbarte Lage andeuten soll. q_1 , q_2 , Q seien die entsprechenden Zahlen für die Gleichung $q = 0$. Um alsdann die Zahl der freien Punkte α auf f zu finden, in welchen sich p und q schneiden müssen, damit sie noch einen weiteren von α verschiedenen Schnittpunkt x auf f besitzen, hat man von der Zahl der freien Schnittpunkte von δ^*R_f die der freien Schnittpunkte von P_f abzuziehen. Man erhält

diese Zahl durch die gleichen Betrachtungen, wie im vorigen §, nur dass überall statt „Grad in Bezug auf die Coordinaten von α “ zu setzen ist: „Zahl der freien Schnittpunkte mit f “, d. h. statt p, q bezw. p_1 und q_1 , sowie statt p, q bezw. p_2, q_2 . Setzt man ferner in der Schlussformel des vorigen § $r' = 0, d = 1, u = q_2, v = p_2$, und nimmt P, Q (an Stelle von α, π) in der oben definirten Bedeutung, so erhält man als die gesuchte Zahl von Schnittpunkten:

$$(I) \quad \begin{aligned} & q_2 p_1 + p_2 q_1 - c(p_1 + p_2) - bQ \\ &= p_1(q_1 - c) + p_2(q_1 - c) - bQ, \end{aligned}$$

oder auch, durch Vertauschung:

$$(I^a) \quad = q_1(p_2 - b) + q_2(p_1 - b) - cP.$$

Das vorstehende Resultat möge noch einmal kurz in Form eines Satzes ausgesprochen werden. Wir wollen zunächst eine Ausdrucksweise erläutern, deren wir uns bedienen werden.

Einem Punkt x einer Curve f von beliebigem Geschlecht „entspricht“ eine Anzahl von Punkten α auf derselben, und umgekehrt, wenn zwischen x und α eine solche Beziehung besteht, dass zu jeder Lage des Punktes x eine Curve gehört, deren Schnittpunkte mit f die α sind und umgekehrt. Von jenen Schnittpunkten α können einige in singuläre oder sonstwie ausgezeichnete Punkte der Curve f fallen, welche nicht mitgezählt werden dürfen. Wir haben im Gegensatz zu diesen „festen“ jene anderen Punkte „freie“ genannt. Von diesen freien werden indess noch einige nach x selbst zurückfallen, wenn jene Curve in x einen ein- oder mehrfachen Punkt besitzt.

Handelt es sich nun darum, die Zahl derjenigen Punktepaare auf einer beliebigen algebraischen Curve f zu finden, welche zugleich zwei Bedingungen genügen, so bedarf es der Aufstellung folgender Daten: Entsprechen vermöge der einen Bedingung jedem Punkt x von f p_1 „freie“ Punkte α , und einem Punkt α p_2 „freie“ Punkte x , von welchen indess noch je b nach x , bezw. α , zurückfallen (s. oben): entsprechen ferner vermöge der anderen Beziehung jedem x $q_1' (= q_1 - c)$ freie Punkte α , jedem Punkt α $q_2' (= q_2 - c)$ freie Punkte x , von denen je keiner mehr nach x , bezw. α , zurückfällt, giebt es ferner Q Punkte, in welchen die vermöge der letzten Beziehung sich entsprechenden Punktepaare x, α zusammenfallen, so ist die Zahl der freien Punktepaare, welche beiden Bedingungen genügen:

$$(I^b) \quad = p_1 q_1' + p_2 q_2' - b \cdot Q.$$

Unter den Paaren x, α von Punkten auf f , welche den beiden aufgestellten Bedingungsgleichungen genügen, und welche demgemäss in den Formeln (I) und (I^a) inbegriffen sind, können sich indess immer noch solche befinden, welche einander unendlich benachbart sind. Diese

sind in jedem Fall besonders zu ermitteln und auszuschneiden, insofern dieselben als uneigentliche Lösungen angesehen werden. So insbesondere kann es vorkommen, dass in die singulären Punkte von f mehr Punktepaare x, α fallen, als im Vorstehenden durch Aufstellung des Produkts P und durch Abrechnung der in solche Punkte fallenden Verschwindungspunkte der Coefficienten von p und q berücksichtigt worden sind*).

Unter Berücksichtigung dieser Beschränkung (welche in den Anwendungen sich meistens leichter beseitigen lässt, als es scheinen könnte) erhält man durch die Formel (I) die Zahl der „freien“ Punktepaare auf einer Curve von beliebigem Geschlecht, welche zugleich zweien Bedingungengleichungen genügen.

Der Charakter und die Bedeutung des vorstehenden Satzes tritt besonders deutlich hervor, wenn man denselben auf den speciellen Fall anwendet, dass die gegebene Curve $f = 0$ eine gerade Linie $y = 0$ ist. Setzt man in $p(x, \alpha) = 0, q(x, \alpha) = 0, y = 0, \beta = 0$, so erhält man 2 algebraische Gleichungen für x , welche (unter Beibehaltung der früheren Bezeichnungen) den Factor $x - a$ bzw. b fach und c fach besitzen, desgleichen je eine Anzahl von Factoren von der Form $x - \lambda$, welche festen Punkten λ auf der Geraden entsprechen. Die Elimination von x ergibt, nachdem jene Factoren ausgeschieden, eine Gleichung in α vom Grade: $(p_1 - b)(q_2 - c) + (p_2 - b)(q_1 - c)$. Diese Zahl stimmt mit (I) für den besonderen Fall überein. Im allgemeinen Fall ist diese Ausscheidung an den Gleichungen selbst unmöglich; selbst aus der Resultante lassen sich die speciellen Factoren nicht herausheben, wenn $f = 0$ nicht identisch durch $x = a, y = \beta$ erfüllt wird. Die Formel (I) ist also die Verallgemeinerung des bekannten Ausdrucks für den Grad der Resultante von 2 Gleichungen mit 2 Variablen auf den Fall zweier Gleichungen mit 2 Paaren von Variablen, für deren Jedes noch eine weitere (dieselbe) Gleichung besteht.

§ 7.

Anwendung auf Raumcurven.

Den hauptsächlichsten Gebrauch von der im vorstehenden § bewiesenen Formel findet man in dem nachfolgenden Aufsatz über Berührungsprobleme gemacht. Auch bezüglich der Anwendung auf die

---

* Sind z. B. p und q beide von der Form: $\varphi(x) \psi(\alpha) - \psi(x) \varphi(\alpha) = 0$, und hat $f(x) = 0$ in einem Punkte d einen Doppelpunkt, durch welchen $\varphi(x) = 0$ $\psi(x) = 0$ nicht hindurchgeht, so verschwindet δR , wenn α nach d rückt, ohne dass p oder q für eine allgemeine Lage von α durch d hindurch gehen.

Theorie der Raumcurven, die im Folgenden an einigen Beispielen gegeben werden soll, sei es erlaubt, auf einige in jenem Aufsatz zu erweisende Resultate, bei Uebereinstimmung mit der dortigen Bezeichnung, Bezug zu nehmen. So insbesondere auf die geometrischen Anwendungen, woraus hervorgeht, dass eine Uebertragung von solchen Formeln auf lineare Gebilde von beliebig vielen Dimensionen gestattet ist, welche gewissermassen eine bei eindeutiger Transformation invariable Beziehung zwischen den Punktpaaren x, α aussagen. Ebenso wie dort in II. § 2. Note schliesst man auch allgemein, dass wenn nicht wirkliche Doppelpunkte oder Rückkehrpunkte der Raumcurve vorhanden sind, die oben (§ 6.) erwähnte Beschränkung der Formel (I) meist ganz wegfällt.

Es ist die Zahl $(M_1, 2)$ derjenigen Tangenten einer Raumcurve zu bestimmen, welche ausser in dem Berührungspunkt die Curve in noch einem anderen Punkt treffen. Man projicire die Raumcurve (Grad M , Geschlecht p) von einem Punkt A aus auf eine Ebene; jedem Punkt α der Raumcurve entspricht ein solcher der ebenen Curve, von welchem aus sich $2M + 2p - 2 = N_2$ Tangenten an die letztere legen lassen, wenn man die beiden in α selbst fallenden Tangenten mitzählt. Sei x ein Punkt der Raumcurve, dem ein Berührungspunkt einer jener Tangenten in der ebenen Curve entspricht. Einem solchen entsprechen rückwärts, mit Einrechnung der 2 in x selbst fallenden Punkte, M Punkte α . Dass ein Punkt x mit einem Punkt α zusammenfällt, kommt so vielmal vor, als die ebene Curve Wendepunkte hat, nämlich N_3 mal, wenn $N_3 = 3M + 6p - 6$ ist. Die zwischen den Punkten x und α bestehende Beziehung wird demnach durch eine Gleichung charakterisirt, für welche die in den §§ 5., 6. näher definirten Zahlen p_1, p_2, b, P die folgenden Werthe besitzen:

$$p_1 = M ; p_2 = N_2 ; b = 2 ; P = N_3 .$$

Nimmt man zum Centrum der Projection statt des Punktes A einen anderen Punkt B , so entsprechen einem Punkt α in derselben Weise im Allgemeinen andere Punkte x . Aber die Beziehung zwischen x und α wird wieder dieselbe Form haben, so dass für die entsprechende Gleichung die zugehörigen Zahlen dieselben Werthe besitzen, nämlich:

$$q_1 = M ; q_2 = N ; c = 2 ; Q = N_3 .$$

Das Werthepaar x, α , welches den singulären Tangenten, die in noch einem Punkt schneiden, entspricht, wird den beiden obigen Gleichungen gleichzeitig genügen. Man suche demnach die gemeinsamen Lösungen nach §§ 5., 6. Die Zahl derselben ist nach Formel (I):

$$M(N_2 - 2) + N_2(M - 2) - 2N_3 .$$

Unter diesen befinden sich indess noch diejenigen Punktpaare, welche in die Tangentialebenen, die man von der Verbindungslinie AB aus

an die Curve legen kann, fallen und uneigentlichen Lösungen entsprechen. Die Zahl dieser Paare ist:

$$N_2(M - 2).$$

Man hat demnach:

$$\begin{aligned} M_{1,2} &= M(N_2 - 2) - 2N_3 \\ &= 2(M - 2)(M - 3) + 2p(M - 6). \end{aligned}$$

Dieselbe Zahl ist im nachfolgenden Aufsatz mit Rücksicht auch auf etwa vorhandene Rückkehrpunkte der Raumcurve aufgestellt. Durch dualistische Vertauschung von M mit N_3 und β , der Zahl der Rückkehrpunkte, mit $N_1 = 4M + 12p - 12$, der Zahl der Wendungsberührungsebenen, erhält man aus jener Formel die folgende (wo wieder $\beta = 0$ gesetzt ist):

$$N_{1,2} = 6(M - 3)(M - 4) + 18p(M - 4) + 12p(p - 1)$$

für die Zahl der Tangenten der Raumcurve, welche in die Schmiegungsebene eines anderen Punktes fallen.

A) Zu einem Punkt x der Raumcurve gehören bekanntlich:

$$\nu = (M - 2)(M - 3) - 2p$$

Punkte α , welche auf einer dreifach schneidenden Sehne liegen, die durch x geht. Ferner giebt es $M_{1,2}$ (s. oben) Punkte x , mit welchen die so entsprechenden Punkte α zusammenfallen.

Die Gleichung $q(x, \alpha) = 0$, welche jene Beziehung zwischen x und α ausdrückt, besitzt folgende „zugehörige“ Zahlen (§ 6.):

$$(A) \quad q_1 - c = q_2 - c = \nu; \quad Q = M_{1,2}.$$

Die Zahl c giebt an, wie vielfach der Punkt der Curve $q(x, \alpha) = 0$ für $x = \alpha$ ist. Wir werden dies unten indirect ermitteln.

B) Durch die Tangente eines Punktes x der Raumcurve kann man $N_2 - 4$ (s. oben) Tangentialebenen an die Curve legen, welche in Punkten α berühren, deren keiner im Allgemeinen nach x fällt. Die zugehörigen Zahlen zu dieser Beziehung $p(x, \alpha) = 0$ sind:

$$(B) \quad p_1 = p_2 = N_2; \quad b = 4; \quad P = N_4.$$

Um nun die Zahl derjenigen Punktepaare x, α zu erhalten, welche auf dreifach schneidenden Sehnen einer Raumcurve liegen und für welche die zugehörigen Curvelemente in einer Ebene liegen, hat man vermöge Formel (I):

$$2\nu N_2 - 4M_{1,2}$$

als Zahl der gemeinsamen Lösungen der Gleichungen $p(x, \alpha) = 0$ und $q(x, \alpha) = 0$. Unter derselben befinden sich jedoch $M_{1,2}$ uneigentliche Lösungen, welche den beiden Bedingungen genügen, nur so, dass die Punkte x, α einander unendlich nahe liegen. Zählt man diese Zahl doppelt (den beiden Berührungspunkten entsprechend) ab, so erhält man:

$$2\nu N_2 - 6M_{1,2}$$

Punkte x, α , also halb so viel Punktpaare.

Den Werth für c , und somit für $q_1 = q_2$ bestimmt man, indem man die Formeln (I) und (I^a) in § 6. einander gleichsetzt. Man erhält die auch sonst sehr wichtige Relation:

$$(I^b) \quad b \{ Q - 2(q - c) \} = c \{ P - 2(p - l) \}.$$

Hieraus erhält man aber, nach Einsetzung der Werthe für b , etc.:

$$c = M - 4,$$

$$(A^a) \quad q_1 = q_2 = M^2 - 4M + 2 - 2p.$$

C) Von einem Punkt x der Curve kann man N_3 Schmiegungebenen an dieselbe legen, von welchen 3 nach x selbst fallen. Jedem Schmiegungepunkt α entsprechen umgekehrt M Schnittpunkte, von welchen 3 nach α fallen. Die Zahl der Fälle, wo α mit x zusammenfällt, ist gleich der Zahl N_4 der Wendungsberührebenen. Daher sind die zugehörigen Zahlen:

$$(C) \quad p_1 = M; \quad p_2 = N_3; \quad b = 3; \quad P = N_4.$$

Man soll die Zahl der Geraden angeben, welche die Raumcurve in 3 Punkten schneiden, deren einer in der Schmiegungeebene eines der beiden anderen liegt.

Man erhält die Zahl der gemeinsamen Lösungen der durch die Formeln (A) und (C) charakterisirten Gleichungen (unter welchen sich auch die gesuchten Punktpaare befinden) aus Formel (I):

$$= (M + N_3) \cdot \nu - 3 \cdot M_{1,2}.$$

Unter diesen gemeinsamen Lösungen befinden sich aber die $M_{1,2}$ Schnittpunkte der singulären Tangenten. Zählt man diese doppelt (den beiden Berührungspunkten entsprechend) ab, so ist die Hälfte der Differenz gleich der gesuchten Zahl:

$$\begin{aligned} (\gamma) \quad &= \frac{\nu}{2} (M + N_3) - \frac{5}{2} M_{1,2} \\ &= 2(M - 2)(M - 3)(M - 4) + 8p(M^2 - 8M + 18) - 6p^2. \end{aligned}$$

D) Durch einen Punkt x der Curve lassen sich $N_3 - 3$ Schmiegungebenen an dieselbe legen. In jeder befinden sich noch $M - 4$ Punkte α , welche weder mit x zusammen noch in den Schmiegungepunkt fallen. Zwischen den Punkten x und α besteht also eine Beziehung, welche für einen gegebenen Punkt x $(M - 4)(N_3 - 3)$ Punkte α , die nicht mit x zusammenfallen, ergibt, und umgekehrt ebensoviele.

Die Zahl der zusammenfallenden Paare x, α ist $N_{4,2}$ (s. oben). Die Gleichung ist also charakterisirt durch die Zahlen:

$$(D) \quad p_1 - b = p_2 - b = (M - 4)(N_3 - 3); \quad P = N_{4,2}.$$

Die den beiden Bedingungen, welche unter (D) und (A) aufgestellt

sind, genügenden Punktpaare *liegen in Schmiegungebenen, in welchen sich dreifach schneidende Sehnen befinden*. Die Zahl derselben ist mit Rücksicht auf die Formel (A*):

$$\begin{aligned} & 2(p_1 - b)(q_1 - c) - c(P - 2(p_1 - b)) \\ &= 2(M - 4)(N_3 - 3)v - (M - 4)(N_{1,2} - 2(M - 4)(N_3 - 3)) \\ &= 6(M - 4)[(M - 2)(M - 3)^2 + p(2M^2 - 13M + 24) - 6p^2]. \end{aligned}$$

Unter diesen befinden sich die Punktpaare auf den oben bereits gezählten Sehnen, welche durch den zugehörigen Schmiegungepunkt selbst hindurch gehen. (Vergl. (C), Formel (γ)).

Zählt man den Ausdruck (γ) sechsfach von der obigen Zahl ab, so bleibt die Zahl derjenigen dreifach schneidenden Sehnen, welche durch den Schmiegungepunkt einer Schmiegungeebene, in welcher sie liegen, nicht hindurch gehen. Man erhält durch Zusammenziehen:

$$6(M - 5)[(M - 2)(M - 3)(M - 4) - 2p(M^2 - 7M + 15) - 6p^2]$$

deren 6. Theil die Zahl jener Sehnen angiebt. Endlich lassen sich die Einzelwerthe von b und $p_1 = p_2$, welche die Formeln (D) vervollständigen, durch Anwendung der Formel (I^b) wie oben finden.

Es wäre leicht, die Zahl dieser Beispiele aus der Theorie der Raumcurven zu vermehren. Auch auf die Theorie der windschiefen Flächen gestattet der Satz des § 6. eine fruchtbare Anwendung. Indess würde ein näheres Eingehen hierauf die Grenzen dieses einleitenden Aufsatzes überschreiten.

Darmstadt, im Juli 1871.