ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 5.

1. *Ueber die Parameter der Krystallphysik und über gerichtete Grössen höherer Ordnung; von W. Voigt.*

(In kürzerer Form in den Nachr. v. d. Kgl. Gesellsch. der Wissensch.
zu Göttingen, Math.-phys. Klasse, 1900, Heft 4 veröffentlicht.)

I. Allgemeine Grundsätze.

1. *Vectoren und Tensoren.* Die Versuche, physikalische Eigenschaften der Krystalle durch geometrische Hilfsmittel zu veranschaulichen, sind ziemlich alt. Eines der bekanntesten Beispiele bietet die Darstellung der optischen Eigenschaften gewöhnlich doppeltbrechender Krystalle für eine jede Farbe mit Hülfe eines Ellipsoides oder eines Ovaloides durch Fresnel, die Spätere in mannigfaltiger Weise (z. B. durch Einführung der sogenannten Indexflächen) verändert bez. ergänzt haben. Untersucht man, was die verschiedenen Darstellungen Gemeinsames und Wesentliches besitzen, so findet man dasselbe in der Benutzung der Thatsache, dass *das optische Verhalten jener Körper für jede Farbe durch drei zu einander normal gerichtete Grössen erschöpfend bestimmt wird*, deren Orientirungen und Grössen der Substanz und der in Betracht gezogenen Farbe individuell sind, und deren Zahlwerte durch gewisse, jenen Richtungen parallele Fortpflanzungsgeschwindigkeiten geliefert werden.

Man hat demgemäss wohl gelegentlich gesagt, dass das optische Verhalten der nicht activen Krystalle durch drei zu einander normale *Vectoren* charakterisirt werde. Indessen ist hiergegen zu erinnern, dass die durch jene gerichteten Grössen bestimmten optischen Symmetrieaxen nicht die *Einseitigkeit* besitzen, die für Vectorgrössen charakteristisch ist, sondern dass sie *zwei gleichwertige Seiten haben*, wie Analoges von gewissen in der Elasticitätslehre auftretenden variablen Grössen, nämlich von den Spannungen und den linearen Dilatationen gilt. Bei

Benutzung des von mir seiner Zeit vorgeschlagenen und der Bezeichnung „Vector“ nachgebildeten Namens der *Tensoren*¹⁾ für zweiseitige gerichtete Grössen würde man also *drei zu einander normale Tensoren* oder kürzer *ein Tensortripel* als für das optische Verhalten eines nicht activen Krystalles charakteristisch bezeichnen können.

Ein Vector V wird symmetrisch bestimmt durch seine Projectionen oder Componenten nach drei beliebig festgelegten, am besten zu einander normalen Coordinatenaxen, d. h. durch die Ausdrücke:

$$(1) \quad V_1 = V\alpha, \quad V_2 = V\beta, \quad V_3 = V\gamma,$$

in denen α, β, γ die Richtungscosinus von V gegen die Coordinatenaxen bedeuten. Auch ein Tensor lässt sich durch derartige Projectionen symmetrisch bestimmen, aber diese Bestimmung würde nicht glücklich sein, da sie eine Umkehrung des *Vorzeichens* mit einer Umkehrung des *Richtungssinnes* der betreffenden Grösse gleichwertig erscheinen lässt, was zwar der *Einseitigkeit* des Vectors, aber keineswegs der *Zweiseitigkeit* des Tensors entspricht. Die Zweiseitigkeit des letzteren kommt zum Ausdruck, wenn man als Componenten eines Tensors T seine Producte in die Quadrate seiner Richtungscosinus α, β, γ oder in deren Producte zu je zweien definirt, also etwa setzt

$$(2) \quad \begin{cases} A = T\alpha^2, & B = T\beta^2, & C = T\gamma^2, \\ A' = T\beta\gamma, & B' = T\gamma\alpha, & C' = T\alpha\beta, \end{cases}$$

worin passend A, B, C als Componenten *erster*, A', B', C' als solche *zweiter* Art nach den Coordinatenaxen bezeichnet werden. Dabei kann man den Ausdrücken für A, B, C einer-, denen für A', B', C' andererseits je einen gemeinsamen Zahlenfactor beilegen, ohne dass hierdurch die Eigenschaft verloren ginge, dass sowohl A, B, C als A', B', C' den resultirenden Tensor T nach Grösse und nach Richtung mit gewissen, hier nicht zu erörternden Ausnahmen²⁾ vollständig bestimmen.

1) Allgemeines über Tensoren: W. Voigt, Die fundamentalen physikalischen Eigenschaften der Krystalle, Leipzig 1898. p. 20 ff.; Gött. Nachr., Math.-physik. Kl., Heft 2, 1900; Elementare Mechanik, Leipzig 1901. p. 10 ff.

2) z. B. Elementare Mechanik, p. 18.

Die obige Verfügung gewinnt noch besonders dadurch an Bedeutung, dass, wie bei den Tensoren der Elasticitätstheorie in letzterer gezeigt zu werden pflegt¹⁾, ein Tensortripel mit den Richtungscosinus $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ seiner Tensoren T_1, T_2, T_3 durch die sechs Componenten

$$(3) \quad \begin{cases} A = \sum T_h \alpha_h^2, & B = \sum T_h \beta_h^2, & C = \sum T_h \gamma_h^2, \\ A' = \sum T_h \beta_h \gamma_h, & B' = \sum T_h \gamma_h \alpha_h, & C' = \sum T_h \alpha_h \beta_h, \end{cases}$$

für

$$h = 1, 2, 3,$$

vollkommen bestimmt ist, und dass mehrere coexistirende Tensortripel sich häufig zu einer Resultanten zusammensetzen, deren Componenten durch die Summen der gleichartigen Einzelcomponenten von der vorstehenden Art dargestellt werden.

Auch in den Ausdrücken (3) können für die Componenten erster und die zweiter Art rechts gemeinsame Factoren zugefügt werden, ohne deren Charakter zu ändern.

Bezüglich der Verfügung über diese Factoren kann man sich von der Absicht leiten lassen, eine Analogie zu den Ausdrücken für *Vector*componenten herzustellen. Von letzteren geht je eine in den resultirenden Vector über, wenn die betreffende Coordinatenaxe dem Vector selbst parallel wird. Ähnlich werden die Componenten A, B, C mit je einem der Tensoren T_1, T_2, T_3 identisch, wenn die Richtungen des Tripels den Coordinatenaxen parallel werden, vorausgesetzt, dass der Factor der $\sum T_h \alpha_h^2, \dots$ so, wie in (3) geschrieben, Eins ist.

Die Componenten eines Vectors verhalten sich bei Coordinatentransformationen wie die relativen Coordinaten x, y, z zweier Punkte; die in (3) zusammengestellten Tensorcomponenten verhalten sich dabei bez. wie die Quadrate und wie die Producte jener Coordinaten zu zweien, vorausgesetzt, dass der Factor der $\sum T_h \beta_h \gamma_h$ so, wie in (3), gleich Eins belassen wird.

Aber die so erhaltenen sechs Ausdrücke (3) transformiren sich nicht *orthogonal*, wie dies Vectorcomponenten thun und wie es für zahlreiche allgemeine Betrachtungen erwünscht ist. Sollen sie diese Eigenschaften erhalten und daneben für spezielle Coordinatenrichtungen die Tensoren selbst liefern, so muss man den Ausdrücken für die Componenten zweiter Art

1) l. c. p. 20.

den Factor $\sqrt{2}$ beilegen, während man denjenigen erster Art den Factor Eins belässt.¹⁾

Für die *orthogonalen Tensorcomponenten* ergibt sich auf diese Weise das Schema

$$(4) \begin{cases} T_{11} = \sum T_h \alpha_h^2, & T_{22} = \sum T_h \beta_h^2, & T_{33} = \sum T_h \gamma_h^2, \\ T_{23} = \sqrt{2} \sum T_h \beta_h \gamma_h, & T_{31} = \sqrt{2} \sum T_h \gamma_h \alpha_h, & T_{12} = \sqrt{2} \sum T_h \alpha_h \beta_h, \end{cases}$$

für

$$h = 1, 2, 3,$$

wobei die T_{hk} neue Bezeichnungen sind.

2. *Gerichtete Grössen höherer Ordnung.* Zieht man in Betracht, dass sich die Vectorcomponenten wie die relativen Coordinaten

$$(5) \quad x, y, z,$$

die orthogonalen Tensorcomponenten wie die Aggregate

$$(6) \quad x^2, y^2, z^2, \sqrt{2} yz, \sqrt{2} zx, \sqrt{2} xy$$

transformiren, so liegt es nahe, in der hierdurch angefangenen Reihe von gerichteten Grössen noch weiter zu gehen. Zehn Functionen, die sich bei Coordinatentransformationen verhalten wie die orthogonalen Ausdrücke:

$$(7) \quad \begin{cases} x^3, y^3, z^3, \sqrt{3} x^2 y, \sqrt{3} x^2 z, \sqrt{3} y^2 z, \sqrt{3} y^2 x, \\ \sqrt{3} z^2 x, \sqrt{3} z^2 y, \sqrt{6} xyz, \end{cases}$$

wird man als die orthogonalen Componenten eines Systems gerichteter Grössen *dritter*, fünfzehn, die sich transformiren wie

$$(8) \quad \begin{cases} x^4, y^4, z^4, 2 x^3 y, 2 x^3 z, 2 y^3 z, 2 y^3 x, 2 z^3 x, 2 z^3 y \\ \sqrt{6} y^2 z^2, \sqrt{6} z^2 x^2, \sqrt{6} x^2 y^2, \\ 2 \sqrt{3} x^2 y z, 2 \sqrt{3} y^2 z x, 2 \sqrt{3} z^2 x y, \end{cases}$$

als die orthogonalen Componenten eines Systems gerichteter Grössen *vierter* Ordnung bezeichnen können etc. Dabei erscheinen die Vektoren als gerichtete Grössen *erster*, die Tensortripel als solche *zweiter* Ordnung, und die Scalare kann man als solche *nullter* Ordnung an den Anfang der Reihe stellen.

Man bemerkt, dass in den Componenten der gerichteten Grössen höherer Ordnung gewisse Wurzelgrössen eine grosse

1) Vgl. z. B. Gött. Nachr. l. c. p. 123.

Rolle spielen; zur Vereinfachung der Formeln wollen wir dieselben weiterhin stets abkürzen, und zwar setzen

$$(9) \quad \sqrt{2} = r, \quad \sqrt{3} = s.$$

Ferner wollen wir zur Erleichterung der Uebersicht hier die Symbole zusammenstellen, mit denen im Folgenden die gerichteten Grössen verschiedener Ordnung und ihre orthogonalen Componenten bezeichnet werden sollen. Soweit es sich um *Variable* handelt und die Grössen noch ganz allgemein, ohne Beziehung auf bestimmte physikalische Verhältnisse geführt werden, mögen

Scalars mit S oder Z ,

Vectoren mit V, U, W oder J , ihre (orthogonalen) Componenten mit V_1, V_2, V_3 etc.,

Tensortripel mit T, P, Q oder R , — wenn es auf die einzelnen Teile des Tripels ankommt, auch mit T_1, T_2, T_3 etc., — ihre orthogonalen Componenten aber mit $T_{11}, T_{22}, T_{33}, T_{23}, T_{31}, T_{12}$ etc. bezeichnet werden.

Ein vollständiges System gerichteter Grössen *dritter* Ordnung wollen wir mit H , seine zehn Componenten mit $H_{111}, H_{222}, \dots H_{123}$, ein System *vierter* Ordnung mit L , seine fünfzehn Componenten mit $L_{1111}, L_{2222}, \dots L_{3312}$ bezeichnen, wobei das Gesetz der Indices sich durch die Vergleichung mit dem Schema (7) bez. (8) sogleich ergibt.

Für den Fall, dass es sich um *constante Parameter* ohne specielle physikalische Bedeutung handelt, sollen die verschiedenen Grössengattungen durch die den obigen entsprechenden *kleinen* Buchstaben dargestellt werden. —

Eine eingehende Untersuchung der gerichteten Grössen dritter und vierter Ordnung soll hier nicht vorgenommen werden; für letztere fehlen anscheinend überhaupt noch geometrische Vorstudien. Für unsere Zwecke genügt die folgende Bemerkung.

Das *Tensortripel* T wird nach Grösse und Lage charakterisirt durch die centrische Oberfläche zweiten Grades von der durch die sechs Tensorcomponenten bestimmten Gleichung:

$$(10) \quad T_{11} x^2 + T_{22} y^2 + T_{33} z^2 + r(T_{23} yz + T_{31} zx + T_{12} xy) = \pm 1,$$

deren Hauptaxen der Lage nach direct mit den resultirenden Tensoren T_1, T_2, T_3 des Tripels zusammenfallen, während sie durch ihre reciproken Quadrate deren Grössen darstellen.

Ein vollständiges System H gerichteter Grössen *dritter* Ordnung wird analog charakterisirt sein durch eine Oberfläche dritten Grades mit der durch die bezüglichen Componenten bestimmten Gleichung:

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} &H_{111} x^3 + H_{222} y^3 + H_{333} z^3 + s(H_{112} x^2 y + H_{113} x^2 z \\ &\quad + H_{223} y^2 z + H_{221} y^2 x + H_{331} z^2 x + H_{332} z^2 y) \\ &\quad + r s H_{123} x y z = \pm 1. \end{aligned} \right.$$

Speciell kann man durch sieben geeignet gewählte Radienvectoren dieser Oberfläche das durch die zehn Componenten $H_{111}, \dots, H_{123}$ bestimmte *resultirende* System der gerichteten Grössen dritten Grades darstellen. Dabei geben diese Radien durch ihre (einseitigen) Richtungen unmittelbar die Richtungen der betreffenden Resultirenden, durch die reciproken dritten Potenzen ihrer Zahlwerte deren Grössen an. Das System möge im Folgenden, um die Ordnung und den Charakter der betreffenden Grössen anzudeuten, als *ein System von Trivectoren* bezeichnet werden.

Werden die sieben Trivectoren eines vollständigen Systems bez. gleich H_k , ihre Richtungscosinus gleich $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$ ($k = 1, 2, 3 \dots 7$) gesetzt, so werden seine orthogonalen Componenten nach (7) gegeben sein durch

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} H_{111} &= \sum H_h \alpha_h^3, \dots, H_{112} = s \sum H_h \alpha_h^2 \beta_h, \dots \\ H_{113} &= s \sum H_h \alpha_h^2 \gamma_h, \dots, H_{123} = r s \sum H_h \alpha_h \beta_h \gamma_h. \end{aligned} \right.$$

Ein vollständiges System L gerichteter Grössen *vierter* Ordnung ist charakterisirt durch die Oberfläche vierten Grades von der Gleichung:

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} &L_{1111} x^4 + L_{2222} y^4 + L_{3333} z^4 \\ &\quad + 2(L_{1112} x^3 y + L_{1113} x^3 z + \dots + L_{3332} z^3 y) \\ &\quad + r s (L_{2233} y^2 z^2 + L_{3311} z^2 x^2 + L_{1122} x^2 y^2) \\ &\quad + 2 s (L_{1123} x^2 y z + L_{2231} y^2 z x + L_{3312} z^2 x y) = \pm 1. \end{aligned} \right.$$

Hier kann man 12 geeignet gewählte Radienvectoren zur Darstellung des durch die 15 Componenten $L_{1111}, \dots, L_{3312}$ bestimmten *resultirenden* Systems heranziehen. Wiederum geben

jene Radian durch ihre (zweiseitigen) Richtungen die Lagen der Resultirenden an; die reciproken vierten Potenzen ihrer Zahlwerte bestimmen deren Grössen.

Wir werden weiterhin ein solches System gerichteter Grössen vierter Ordnung, um Ordnung und Charakter kurz anzudeuten, als *ein System von Bitensoren* bezeichnen.

Werden die zwölf Bitensoren eines vollständigen Systemes bez. gleich L_h , ihre Richtungscosinus gleich $\pm \alpha_h, \pm \beta_h, \pm \gamma_h$ ($h = 1, 2, 3 \dots 12$) gesetzt, so werden nach (8) seine orthogonalen Componenten gegeben sein durch

$$(14) \quad \begin{cases} L_{1111} = \sum L_h \alpha_h^4, \dots \\ L_{1112} = 2 \sum L_h \alpha_h^3 \beta_h, \dots & L_{1113} = 2 \sum L_h \alpha_h^3 \gamma_h, \dots \\ L_{1122} = r s \sum L_h \alpha_h^2 \beta_h^2, \dots & L_{1123} = 2 s \sum L_h \alpha_h^2 \beta_h \gamma_h, \dots \end{cases} -$$

Es ist bekannt, dass es Vectorcomponenten giebt, die bei Umkehrung aller Coordinatenrichtungen ihr Vorzeichen wechseln, andere, die es hierbei bewahren. Nach der Definition (1) hängt dies davon ab, wie der *resultirende* Vector sich bei einer solchen Inversion des Coordinatensystems verhält. Der Zahlwert eines *Verschiebungs*vectors bleibt dabei ungeändert, nicht aber der eines *Drehungs*vectors, da man zur analytischen Formulirung des Drehungssinnes diesen zu dem Coordinatensystem in Beziehung setzen muss, und letzteres durch die Inversion seinen Charakter ändert, z. B. aus einem rechten zu einem linken wird. Man hat, um dies in Namen anzudeuten, die Vektoren in *polare* und in *axiale* geschieden und wird vielleicht gut daran thun, auch die gerichteten Grössen höherer Ordnung in zwei (analog zu bezeichnende) Klassen zu sondern, *je nachdem die Zahlwerte ihre Resultirenden bei einer Inversion des Coordinatensystems ihre Vorzeichen bewahren oder aber umkehren*.

3. *Hilfsmittel zur Deutung specieller Parameterarten.* Nachdem wir im Vorstehenden die gerichteten Grössen beliebig hoher Ordnung und ihre Componenten definirt haben, wollen wir nun untersuchen, inwieweit sie dazu dienen können, physikalische Eigenschaften der Krystalle geometrisch zu veranschaulichen, d. h., inwieweit sich die Parameter der Krystallphysik als Componenten gerichteter Grössen auffassen bez. in dergleichen zerlegen lassen. Dabei werden wir an gewisse für

die einzelnen Gebiete charakteristische scalare Functionen anknüpfen und auf sie die nachstehenden Sätze anwenden.

Satz I. *Ist ein Scalar S eine beliebige Function eines Systems orthogonaler Variabeln, so ist jeder erste Differentialquotient nach einer dieser Variabeln bezüglich der Transformationseigenschaften dieser selbst gleichartig.*

In der That, sind $X_1, X_2 \dots X_n$ die Variabeln, die sich nach dem Schema

$$X_h = \sum_i \alpha_{hi} Y_i, \quad Y_k = \sum_j \alpha_{jk} X_j$$

in die $Y, Y_2, \dots Y_n$ transformiren, so ist auch

$$\frac{\partial S}{\partial X_h} = \sum_i \alpha_{hi} \frac{\partial S}{\partial Y_i}, \quad \frac{\partial S}{\partial Y_k} = \sum_j \alpha_{jk} \frac{\partial S}{\partial X_j}.$$

Hieraus folgt noch specieller:

Satz II. *Ist ein Scalar S eine homogene lineare Function eines Systems orthogonaler Variabeln, so ist jeder ihrer Parameter der in ihn multiplicirten Variabeln bezüglich der Transformationseigenschaften gleichartig.*

In der That, ist S in der Form $\dot{S} = \sum_h a_h X_h$ gegeben, so gilt auch $a_h = \partial S / \partial X_h$.

Aus letzterem ergibt sich die folgende Regel: Lässt sich eine beliebige scalare Function auf die Gestalt eines oder mehrerer in orthogonalen Variabeln linearen Ausdrücke bringen, so haben deren Parameter leicht erkennbare Transformationseigenschaften; da aber die Transformationseigenschaften die gerichteten Grössen verschiedener Ordnung charakterisiren, so ist mit Feststellung der ersteren auch der geometrische Charakter der betreffenden Parameter erwiesen. Bei der Anwendung dieser Regel wollen wir uns auf die wichtigste Art von Scalaren beschränken, die bei Umkehrung aller Coordinatenrichtungen ihr Vorzeichen nicht wechseln, also Functionen entgegengesetzten Verhaltens (*Pseudoscalare*), wie z. B. die magnetische Dichte, ausschliessen.

Die scalaren Functionen S , an die wir unten unsere speciellen Untersuchungen anknüpfen werden, und die in der Regel Energiegrössen darstellen, sind bilinear in je zwei Arten verschiedener Variabeln, also von vornherein im allgemeinen noch nicht in

einer Form, welche ohne weiteres die Anwendung des zweiten der vorstehenden Sätze gestattet. Es wird jedesmal die Aufgabe sein, die Glieder der Functionen S so zu combiniren, dass sie eine oder mehrere Gruppen von in orthogonalen Variabeln linearen Ausdrücken bilden; auf letztere ist der obige Satz II dann unmittelbar anzuwenden.

Hierbei bleibt ersichtlich eine gewisse Unbestimmtheit, insofern in einem Product aus einer Constanten und einer Variablen jederzeit der Constanten ein willkürlicher Factor f zugefügt werden kann, wenn man denselben zugleich an der Variablen als Nenner anbringt. In jedem Componentensystem einer bestimmten Ordnung bleibt somit ein allen gemeinsamer Factor willkürlich. Derselbe ist im weiteren der Einfachheit halber so bestimmt, dass die *ersten* Glieder der *höchsten* Componentenreihe keinen bei der Multiplication in den betreffenden constanten Coefficienten sich forthebenden Factor zeigen.

II. Specielle Anwendungen.

Wir wollen nunmehr die verschiedenen Gebiete der Krystallphysik in Bezug auf ihre Parameter systematisch untersuchen. Dabei sollen auch die einfachsten Fälle, wo die bezüglichen Resultate allbekannt sind, der Vollständigkeit halber berücksichtigt werden. Wirklich neue Aufklärungen bieten sich erst bei den complicirteren Beziehungen.

1. *Ein Scalar, bilinear in einem Scalar und drei Vectorcomponenten:*

$$(15) \quad S = Z(m_1 V_1 + m_2 V_2 + m_3 V_3).$$

Der Ausdruck hat unmittelbar die für die Anwendung des Satzes von p. 248 gewünschte Form, da die Vectorcomponenten, bez. ihre Producte in denselben Scalar, sich orthogonal transformiren. Es sind demgemäss m_1, m_2, m_3 gleichfalls Vectorcomponenten nach den Coordinatenachsen; der resultirende Vector m ist für die in der Relation (15) ausgesprochene Eigenschaft der Substanz charakteristisch, er hat polare oder axiale Natur, je nachdem gleiches von V gilt.

Das wichtigste Beispiel liefern die sogenannten *pyroelektrischen* Umsetzungen¹⁾, (thermische Electricitätserregung und

1) W. Voigt, Wied. Ann. 55. p. 705. 1895.

elektrische Erwärmung) für welche die freie Energie ξ der Volumeneinheit bei kleinen Temperaturänderungen τ gegeben ist durch den Ausdruck

$$(16) \quad \xi = -\tau(m_1 X + m_2 Y + m_3 Z),$$

falls X, Y, Z die elektrischen Feldcomponenten bezeichnen. Für die Componenten a, b, c des elektrischen Momentes nach den Coordinatenachsen ergibt sich

$$(17) \quad \begin{cases} a = -\frac{\partial \xi}{\partial X} = m_1 \tau, & b = -\frac{\partial \xi}{\partial Y} = m_2 \tau, \\ c = -\frac{\partial \xi}{\partial Z} = m_3 \tau; \end{cases}$$

der für den Vorgang charakteristische und ebenso, wie die Feldstärke, *polare* Vector ist hier das durch die Temperaturänderung Eins erregte elektrische Moment m selbst, dessen Richtung und Grösse der Substanz individuell ist.

Für die *specifiche Entropie* folgt:

$$(18) \quad \eta = -\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = m_1 X + m_2 Y + m_3 Z.$$

Gemäss dem ersten Satz von p. 248 ist η ein Scalar.

2. *Ein Scalar, bilinear in einem Scalar und sechs Tensorcomponenten:*

$$(19) \quad S = Z(k_1 T_{11} + k_2 T_{22} + k_3 T_{33} + k_4 T_{23} + k_5 T_{31} + k_6 T_{12}).$$

Auch hier ist — da, wie oben gesagt, unter den T_{hi} *orthogonale* Tensorcomponenten verstanden sind, und ein scalarer Factor die Transformationseigenschaften nicht beeinflusst — die angesetzte Form unmittelbar die von uns früher geforderte. Die Parameter k_h sind hiernach gleichfalls orthogonale Tensorcomponenten, und der in dem Ansatz ausgesprochene Vorgang wird durch ein Tensortripel erschöpfend charakterisirt.

Versteht man unter α, β, γ die Richtungscosinus einer beliebigen Richtung, so ist

$$(20) \quad k_l = k_1 \alpha^2 + k_2 \beta^2 + k_3 \gamma^2 + r(k_4 \beta \gamma + k_5 \gamma \alpha + k_6 \alpha \beta)$$

die Componente erster Art des Tensortripels der k_h nach der Richtung von l . Trägt man also je nach dem Vorzeichen von k_l eine Strecke von der Länge $\sqrt{\pm 1/k_l} = \varrho$ von einem festen

Punkte aus auf der Richtung l auf, so erfüllen die Endpunkte von ρ bei wechselnden α, β, γ eine Oberfläche, deren Gleichung bei Einführung der Coordinaten $\rho \alpha = x, \rho \beta = y, \rho \gamma = z$ lautet

$$(21) \quad \pm 1 = k_1 x^2 + k_2 y^2 + k_3 z^2 + r(k_4 yz + k_5 zx + k_6 xy).$$

Dies ist aber nach (10) die für das Tensortripel der Parameter k_h charakteristische Oberfläche. —

Das wichtigste Beispiel liefern die *thermisch-mechanischen* Umsetzungen innerhalb eines Krystalles (thermische Dilatation und mechanische Erwärmung), für welche die freie Energie ξ der Volumeneinheit die Form hat¹⁾

$$(22) \quad \xi = -\tau(p_1 x_x + p_2 y_y + p_3 z_z + p_4 y_z + p_5 z_x + p_6 x_y);$$

dabei bezeichnet wiederum τ die (klein angenommene) Temperaturänderung, $x_x, \dots, x_y$ sind die Deformationsgrössen. Da $x_x, y_y, z_z, y_z/r, z_x/r, x_y/r$ orthogonale Tensorcomponenten sind, so gilt gleiches von $p_1, p_2, p_3, p_4 r, p_5 r, p_6 r$.

Für die *Componenten des thermischen Druckes* ergibt sich

$$(23) \quad A_x = -\frac{\partial \xi}{\partial x_x} = p_1 \tau, \dots \quad A_y = -\frac{\partial \xi}{\partial x_y} = p_6 \tau,$$

wobei $A_x, B_y, C_z, r B_z, r C_x, r A_y$ orthogonale Tensorcomponenten darstellen; das resultirende Tensortripel des Parameter p_h ist also in unserem Falle dasjenige der einer Temperaturänderung Eins entsprechenden thermischen Hauptdrucke, dessen Lage und Grösse der Substanz individuell ist.

Für die *specifische Entropie* folgt:

$$(24) \quad \eta = -\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = p_1 x_x + p_2 y_y + \dots + p_6 x_y.$$

Versteht man wiederum unter α, β, γ die Richtungs-cosinus der beliebigen Richtung l , so stellt

$$(25) \quad L_l = \tau(p_1 \alpha^2 + p_2 \beta^2 + \dots + 2 p_6 \alpha \beta)$$

den bei der Temperaturerhöhung τ eintretenden normalen thermischen Druck in der Richtung l dar. $\sqrt{\pm \tau/L_l} = \rho$, als Strecke auf der Richtung l aufgetragen, liefert gemäss (21) die für das Tensortripel der Parameter p_h charakteristische Oberfläche in anschaulicher physikalischer Deutung. —

1) W. Voigt, Wied. Ann. 36. p. 747. 1889.

Ein in seiner ganzen Ausdehnung *gleichmässig* erwärmter homogener krystallinischer Körper, *der äusseren Drucken nicht ausgesetzt ist*, erfährt durch die Temperaturerhöhung eine derartige Deformation, dass die durch letztere erregten elastischen Drucke die thermischen gerade compensiren.

Versteht man unter c_{hk} die *Elasticitätsconstanten* der Substanz, so sind die Componenten $X_x, \dots X_y$ der elastischen Drucke dargestellt durch die Ausdrücke

$$(26) \quad \begin{aligned} -X_x &= c_{11} x_x + c_{12} y_y + \dots + c_{16} x_y, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

wobei die Beziehung $c_{hk} = c_{kh}$ gilt. Infolge hiervon bestehen unter den gemachten Voraussetzungen die Beziehungen

$$(27) \quad \begin{aligned} A_x &= c_{11} x_x + c_{12} y_y + \dots + c_{16} x_y, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

die, nach den $x_x, \dots x_y$ aufgelöst, ergeben

$$(28) \quad \begin{aligned} x_x &= s_{11} A_x + s_{12} B_y + \dots + s_{16} A_y, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

unter s_{hk} die *Elasticitätsmoduln* verstanden.

Mit Hülfe dieser Formeln lassen sich in dem Ausdrucke (22) für ξ die Deformationsgrössen in dem betrachteten speciellen Falle durch die thermischen Drucke ersetzen. Wir schreiben das Resultat

$$(29) \quad \xi' = -\tau (d_1 A_x + d_2 B_y + \dots + d_6 A_y),$$

wobei die d_h neue Parameter bezeichnen, deren Zusammenhang mit den p_i und den s_{hk} leicht erkennbar ist. Wegen der auf der vorigen Seite erörterten Natur der Druckcomponenten $A_x, \dots A_y$ sind $d_1, d_2, d_3, d_4/r, d_5/r, d_6/r$ orthogonale Tensorcomponenten.

Ihre Bedeutung erhellt daraus, dass

$$(30) \quad a_x = -\frac{\partial \xi'}{\partial A_x} = d_1 \tau, \dots \quad a_y = -\frac{\partial \xi'}{\partial A_y} = d_6 \tau$$

die unter den gemachten Annahmen die Temperaturerhöhung begleitenden Deformationsgrössen darstellen. Das ihnen zugehörige Tensortripel ist somit dasjenige der einer Temperaturänderung Eins entsprechenden Hauptdilatationen.

Für die spezifische Entropie gilt gleichzeitig nach (24)

$$(31) \quad \eta = -\frac{\partial \xi'}{\partial \tau} = d_1 A_x + d_2 B_y + \dots + d_6 A_y.$$

Versteht man unter α, β, γ wiederum die Richtungs-cosinus einer beliebigen Richtung l , so stellt

$$(32) \quad l_i = \tau (d_1 \alpha^2 + d_2 \beta^2 + \dots + d_6 \alpha \beta)$$

die lineäre Dilatation in der Richtung l dar.

Bei Auftragung der Strecke $\sqrt{\pm \tau / l_i} = \rho$ auf der Richtung l erhält man die Oberfläche, die gemäss (21) für das Tensortripel der Parameter d_h charakteristisch ist, in einer anschaulichen physikalischen Deutung.

3. Ein Scalar, bilinear in zweimal drei Vectorcomponenten:

$$(33) \quad \begin{cases} S = U_1 (n_{11} V_1 + n_{12} V_2 + n_{13} V_3) \\ \quad + U_2 (n_{21} V_1 + n_{22} V_2 + n_{23} V_3) \\ \quad + U_3 (n_{31} V_1 + n_{32} V_2 + n_{33} V_3). \end{cases}$$

Hier ist die direct gegebene Form für S noch nicht die von uns geforderte, denn die neun Producte von Vectorcomponenten $U_h \cdot V_k$ sind keine orthogonalen Variabeln. Da aber

$$(34) \quad \begin{cases} U_1 V_1 = T_{11}, & U_2 V_2 = T_{22}, & U_3 V_3 = T_{33}, \\ (U_2 V_3 + U_3 V_2)/r = T_{23}, & (U_3 V_1 + U_1 V_3)/r = T_{31}, \\ (U_1 V_2 + U_2 V_1)/r = T_{12} \end{cases}$$

gleichviel, ob U und V einander identisch oder voneinander verschieden sind, orthogonale Tensorcomponenten,

$$(35) \quad \begin{cases} (U_2 V_3 - U_3 V_2)/r = W_1, & (U_3 V_1 - U_1 V_3)/r = W_2, \\ (U_1 V_2 - U_2 V_1)/r = W_3 \end{cases}$$

(orthogonale) Vectorcomponenten darstellen, so kann man S sogleich in zwei Teile von der gewünschten Natur zerlegen, indem man schreibt:

$$(36) \quad \begin{cases} S = [n_{11} T_{11} + n_{22} T_{22} + n_{33} T_{33} \\ \quad + ((n_{23} + n_{32}) T_{23} + (n_{31} + n_{13}) T_{31} + (n_{12} + n_{21}) T_{12})/r] \\ \quad + [(n_{23} - n_{32}) W_1 + (n_{31} - n_{13}) W_2 + (n_{12} - n_{21}) W_3]/r. \end{cases}$$

Hieraus folgt nach dem Satz von p. 248, dass

$$(37) \quad \begin{cases} n_{11} = t_{11}, & n_{22} = t_{22}, & n_{33} = t_{33}, \\ (n_{23} + n_{32})/r = t_{23}, & (n_{31} + n_{13})/r = t_{31}, & (n_{12} + n_{21})/r = t_{12} \end{cases}$$

orthogonale Tensorcomponenten,

(38) $(n_{23} - n_{32})/r = v_1$, $(n_{31} - n_{13})/r = v_2$, $(n_{12} - n_{21})/r = v_3$
 (orthogonale) Vectorcomponenten sind, und dass somit *die neun Parameter des Ansatzes (33) auf ein Tensortripel und auf einen Vector zurückführbar sind*. Besteht zwischen den Parametern n_{hk} speciell die Beziehung

$$(39) \quad n_{hk} = n_{kh},$$

so kommt der Vector in Wegfall. —

Es ist bekannt, dass Beziehungen von der Form (33) in der Krystallphysik ausserordentlich häufig sind; meist lässt sich dabei S als die Arbeit deuten, die bei der Strömung einer imponderablen Flüssigkeit in einem widerstehenden Mittel von einer treibenden Kraft geleistet wird. Die Componenten J_1, J_2, J_3 der Strömung J ergeben sich dabei nach dem Schema

$$(40) \quad J_1 = \frac{\partial S}{\partial U_1} = n_{11} V_1 + n_{12} V_2 + n_{13} V_3, \\ \dots \dots \dots$$

als lineare Functionen der Componenten V_1, V_2, V_3 der treibenden Kraft V , die n_{hk} erhalten die Bedeutung der *Leitfähigkeitsconstanten*. In diesem Falle ist die obige Zerlegung äquivalent mit der von Stokes¹⁾ vorgenommenen Behandlung der Wärmeleitungsgleichungen; das Tensortripel t ist identisch mit dem Tripel der *Hauptleitfähigkeiten*, v ist der von Stokes zur Charakterisirung des *rotatorischen Verhaltens* eines Krystalles eingeführte Vector, der im Falle $n_{hk} = n_{kh}$ verschwindet. —

In allen bekannten Fällen der hervorgehobenen Art sind die Vektoren U und V im Ansatz (33) — und demgemäss J in den Formeln (40) — von *gleicher* Natur, entweder beide polar oder beide axial; sie verhalten sich somit auch bei einer Umkehrung des Coordinatensystems *gleich*, und die Parameter n_{hk} bleiben bei diesem Vorgang ungeändert. Daraus folgt, dass auch die Tensorcomponenten t_{hk} und die Vectorcomponenten v_k bei Umkehrung aller Coordinatenrichtungen ihr Zeichen beibehalten; v ist somit ein *axialer* Vector, t ein *polares* Tensortripel von derselben Art, wie sie die Dilatationen und die Drucke im Falle der Elasticität liefern.

Existirten factisch Wechselwirkungen von der Form (33) bez. (40) zwischen einem polaren und einem axialen Vector,

1) G. Stokes, Cambr. and Dublin Math. Journ. 6. p. 215. 1851.

wie z. B. zwischen constanten elektrischen und magnetischen Feldern oder Momenten, von denen die elektrischen bekanntlich polar, die magnetischen axial sind, so würde v zu einem *polaren* Vector werden, und t würde eines der oben erwähnten *axialen* Tensortripel darstellen, deren Componenten bei der Umkehrung aller Coordinatenrichtungen ihre Vorzeichen *ändern*. Dergleichen sind in solcher Einfachheit allerdings noch nicht aufgefunden. Indessen muss die Energie eines von einer Lichtbewegung durchsetzten natürlich-circularpolarisirenden Körpers nach Symmetrie ein Glied enthalten, das bilinear ist in den Componenten der elektrischen und der magnetischen Feldstärke — oder in irgendwelchen ihrer Differentialquotienten nach der Zeit, die mit ihnen gleiche Transformationseigenschaften besitzen. Die im allgemeinen neun Parameter dieser Function sind dann nach dem Obigen zurückführbar auf einen Vector und ein Tensortripel, deren Componenten bei Umkehrung aller Coordinatenrichtungen ihr Vorzeichen wechseln.

Die factische Existenz von Tensorsystemen dieser Art scheint noch nicht bemerkt worden zu sein; Hr. Curie¹⁾ hat indessen die Möglichkeit des Vorkommens zweiseitiger gerichteter Grössen von analogem Verhalten bereits vor längerer Zeit betont.

Er bezeichnet als *symétrie du cylindre tordu* diejenige eines gleichförmig gedrehten Cylinders, dessen Endquerschnitte um entgegengesetzt gleiche Winkel gegen den mittleren Querschnitt gedreht sind. Es ist klar, dass hiermit eine gerichtete Grösse charakterisirt ist, deren beide Seiten gleichwertig sind, und deren Componenten bei einer Umkehrung der sämtlichen Coordinatenrichtungen ihre Vorzeichen ändern, weil mit diesem Vorgang eine Umkehrung des positiven Drehungssinnes verbunden ist. *Hier tritt uns ein Tripel dieser neuen Grössen zweiter Ordnung in der Natur entgegen*; andere Fälle werden uns später beschäftigen.

Hr. Curie hat neuerdings für diese zweiseitigen Grössen den glücklichen Namen *Torsor* vorgeschlagen²⁾, den man passend dann anwenden wird, wenn man die einseitigen, mit Drehungs-

1) P. Curie, Journ. de phys. (3) 3. p. 393. 1894.

2) Procès-verbaux sommaires du Congrès international de physique, Paris, 1900. p. 17.

sinn behafteten gerichteten Grössen erster Ordnung als *Rotoren* bezeichnet.

Es würden sich dann entsprechen

als Grössen erster Ordnung: *Vector, Rotor,*

als Grössen zweiter Ordnung: *Tensor, Torsor.*

Diese Bezeichnung betont je das die beiden Grössen erster bez. zweiter Ordnung *Unterscheidende*; will man das *Gemeinsame* hervorheben, was in den übereinstimmenden Transformations-eigenschaften liegt, so wird man wohl besser die schon p. 247 vorgeschlagenen Namen wählen:

Grössen erster Ordnung: *polare und axiale Vektoren,*

Grössen zweiter Ordnung: *polare und axiale Tensoren.* —

Fasst man die Formeln (40) mit den Richtungscosinus

$$\alpha = V_1/V, \quad \beta = V_2/V, \quad \gamma = V_3/V$$

des Vectors V zusammen, so erhält man den Wert der Componente $J_i = J_1 \alpha + J_2 \beta + J_3 \gamma$ von J nach der Richtung von V :

$$(41) \quad \left\{ \begin{aligned} J_i &= V (n_{11} \alpha^2 + n_{22} \beta^2 + n_{33} \gamma^2 \\ &\quad + (n_{23} + n_{32}) \beta \gamma + (n_{31} + n_{13}) \gamma \alpha + (n_{12} + n_{21}) \alpha \beta) \\ &= V (t_{11} \alpha^2 + t_{22} \beta^2 + t_{33} \gamma^2 + t_{23} r \beta \gamma + t_{31} r \gamma \alpha + t_{12} r \alpha \beta). \end{aligned} \right.$$

Trägt man je nach dem Vorzeichen von V/J_i den Wert

$$\sqrt{\pm V/J_i} = \varrho$$

als Strecke von einem Punkt aus auf der Richtung von V auf, so erfüllen ihre Endpunkte bei beliebig variirendem V eine Oberfläche, deren Gleichung bei Einführung der Coordinaten $x = \varrho \alpha$, $y = \varrho \beta$, $z = \varrho \gamma$ des freien Endpunktes von ϱ lautet:

$$(42) \quad \pm 1 = t_{11} x^2 + t_{22} y^2 + t_{33} z^2 + t_{23} r y z + t_{31} r z x + t_{12} r x y.$$

Das Verhältniss J_i/V kann man als die *longitudinale Leitfähigkeit* des Mediums parallel der Richtung der treibenden Kraft V bezeichnen; die nach (10) für das Tensortripel t charakteristische Oberfläche gewinnt durch seine Einführung also eine sehr anschauliche Bedeutung.

4. Ein *Scalar, bilinear in drei Vector- und sechs Tensor-componenten:*

$$(43) \quad \left\{ \begin{aligned} S &= V_1 (e_{11} T_{11} + e_{12} T_{22} + e_{13} T_{33} + e_{14} T_{23} + e_{15} T_{31} + e_{16} T_{12}) \\ &\quad + V_2 (e_{21} T_{11} + e_{22} T_{22} + e_{23} T_{33} + e_{24} T_{23} + e_{25} T_{31} + e_{26} T_{12}) \\ &\quad + V_3 (e_{31} T_{11} + e_{32} T_{22} + e_{33} T_{33} + e_{34} T_{23} + e_{35} T_{31} + e_{36} T_{12}). \end{aligned} \right.$$

Auch hier hat der Ansatz nicht sogleich die Form, deren wir bedürfen. Um ihn passend umzugestalten, ist zunächst festzustellen, welche Transformationseigenschaften sich bei bilinearen Aggregaten aus Vector- und Tensorcomponenten finden.

Hierzu bemerke man zunächst, dass in Uebereinstimmung mit (7)

$$(44) \quad \begin{cases} H_{111} = U_1 V_1 W_1, \dots, \\ H_{112} = (U_2 V_1 W_1 + U_1 V_2 W_1 + U_1 V_1 W_2)/s, \dots \\ H_{123} = (U_1(V_2 W_3 + V_3 W_2) + U_2(V_3 W_1 + V_1 W_3) \\ \quad + U_3(V_1 W_2 + V_2 W_1))/rs \end{cases}$$

orthogonale Componenten eines Trivectorsystems ergeben, gleichviel ob die drei Vektoren U, V, W verschieden oder zu zwei oder zu drei untereinander gleich sind. Zieht man jetzt die Beziehungen (34) heran, so findet man, dass auch

$$(45) \quad \begin{cases} V_1 T_{11} = H_{111}, & V_2 T_{22} = H_{222}, & V_3 T_{33} = H_{333}, \\ (V_2 T_{11} + r V_1 T_{12})/s = H_{112}, & (V_3 T_{11} + r V_1 T_{31})/s = H_{113}, \\ (V_3 T_{22} + r V_2 T_{23})/s = H_{223}, & (V_1 T_{22} + r V_2 T_{12})/s = H_{221}, \\ (V_1 T_{33} + r V_3 T_{31})/s = H_{331}, & (V_2 T_{33} + r V_3 T_{23})/s = H_{332}, \\ (V_1 T_{23} + V_2 T_{31} + V_3 T_{12})/s = H_{123} \end{cases}$$

die orthogonalen Componenten eines Trivectorsystems darstellen. Ferner ist zu benutzen, dass nach den Formeln (34) u. (35)

$$(46) \quad \begin{cases} P_{11} = W_1(U_3 V_2 - U_2 V_3), \dots \\ P_{23} = W_2(U_2 V_1 - U_1 V_2)/r + W_3(U_1 V_3 - U_3 V_1)/r, \dots \end{cases}$$

die orthogonalen Componenten eines Tensortripels ergeben. Identificirt man hier U mit W und setzt gemäss (34)

$$W_1^2 = T_{11}, \dots, \quad r W_2 W_3 = T_{23}, \dots$$

so gelangt man (bei Weglassung eines allen Ausdrücken gemeinsamen Factors) zu dem Resultat, dass auch

$$(47) \quad \begin{cases} (V_2 T_{31} - V_3 T_{12}) = P_{11}, & (V_3 T_{12} - V_1 T_{23}) = P_{22}, \\ V_1 T_{23} - V_2 T_{31} = P_{33} \\ ((r V_1 T_{22} - V_2 T_{12}) - (r V_1 T_{33} - V_3 T_{31}))/r = P_{23}, \\ ((r V_2 T_{33} - V_3 T_{23}) - (r V_2 T_{11} - V_1 T_{12}))/r = P_{31}, \\ ((r V_3 T_{11} - V_1 T_{31}) - (r V_3 T_{22} - V_2 T_{23}))/r = P_{12} \end{cases}$$

orthogonale Componenten eines Tensortripels darstellen.

Endlich bemerke man, dass nach (35)

$$(48) \quad U_1 = J_2 (V_1 W_2 - V_2 W_1) - J_3 (V_3 W_1 - V_1 W_3), \dots$$

Vectorcomponenten sind; identificirt man hierin J mit W und benutzt die vorigen Beziehungen, so erkennt man, dass auch

$$(49) \quad \begin{cases} ((r V_1 T_{22} - V_2 T_{12}) + (r V_1 T_{33} - V_3 T_{31}))/r = U_1, \\ ((r V_2 T_{33} - V_3 T_{23}) + (r V_2 T_{11} - V_1 T_{12}))/r = U_2, \\ ((r V_3 T_{11} - V_1 T_{31}) + (r V_3 T_{22} - V_2 T_{23}))/r = U_3 \end{cases}$$

Vectorcomponenten sind. Zwischen den Componenten erster Art des Tensortripels besteht dabei die Beziehung

$$(50) \quad P_{11} + P_{22} + P_{33} = 0.$$

Das Verhalten aller dieser Componenten bei einer Umkehrung des Coordinatensystems folgt leicht aus dem der V_h und der T_{hk} ; ein Trivectorsystem, dessen Componenten dabei ihre Vorzeichen wechseln, wird man nach p. 247 *polar*, eines, das sie behält, *axial* nennen.

Unter Rücksicht auf die obigen Resultate kann man nun den Scalar (43) folgendermaassen zerlegen:

$$(51) \quad \left\{ \begin{aligned} S = & [s e_{11} H_{111} + s e_{22} H_{222} + s e_{33} H_{333} \\ & + (e_{32} + r e_{24}) H_{112} + (e_{31} + r e_{15}) H_{113} \\ & + (e_{13} + r e_{35}) H_{223} + (e_{12} + r e_{26}) H_{221} \\ & + (e_{21} + r e_{16}) H_{331} + (e_{23} + r e_{64}) H_{332} \\ & + (e_{14} + e_{25} + e_{36}) H_{123}] / s \\ & + \frac{1}{3} [(e_{25} - e_{36}) P_{11} + (e_{36} - e_{14}) P_{22} + (e_{14} - e_{25}) P_{33} \\ & + (e_{12} - e_{13} - \frac{1}{2} r (e_{26} - e_{35})) P_{23} \\ & + (e_{23} - e_{21} - \frac{1}{2} r (e_{34} - e_{16})) P_{31} \\ & + (e_{31} - e_{32} - \frac{1}{2} r (e_{15} - e_{24})) P_{12}] \\ & + \frac{1}{3} [(e_{12} + e_{13} - \frac{1}{2} r (e_{26} + e_{35})) U_1 \\ & + (e_{23} + e_{21} - \frac{1}{2} r (e_{34} + e_{16})) U_2 \\ & + (e_{31} + e_{32} - \frac{1}{2} r (e_{15} + e_{24})) U_3]. \end{aligned} \right.$$

Hieraus folgt, dass die 18 Parameter des Ansatzes (43) zurückführbar sind auf ein Trivectorsystem, auf ein Tensortripel und auf einen einzelnen Vector.

Die orthogonalen Componenten dieser drei Systeme gerichteter Grössen stellen sich folgendermaassen dar:

$$(52) \left\{ \begin{array}{l} e_{11} = h_{111}, \quad e_{22} = h_{222}, \quad e_{33} = h_{333}, \\ (e_{21} + r e_{16})/s = h_{112}, \quad (e_{31} + r e_{15})/s = h_{113}, \quad (e_{32} + r e_{24})/s = h_{223}, \\ (e_{12} + r e_{26})/s = h_{221}, \quad (e_{13} + r e_{35})/s = h_{331}, \quad (e_{23} + r e_{34})/s = h_{332}, \\ (e_{14} + e_{25} + e_{36})/s = h_{123}; \\ \frac{1}{3}(e_{25} - e_{36}) = t_{11}, \quad \frac{1}{3}(e_{36} - e_{14}) = t_{22}, \quad \frac{1}{3}(e_{14} - e_{25}) = t_{33}, \\ \frac{1}{3}(e_{12} - e_{13} - \frac{1}{2}r(e_{26} - e_{35})) = t_{23}, \quad \frac{1}{3}(e_{23} - e_{21} - \frac{1}{2}r(e_{34} - e_{16})) = t_{31}, \\ \frac{1}{3}(e_{31} - e_{32} - \frac{1}{2}r(e_{15} - e_{24})) = t_{12}; \\ \frac{1}{3}(e_{12} + e_{13} - \frac{1}{2}r(e_{26} + e_{35})) = v_1, \quad \frac{1}{3}(e_{23} + e_{21} - \frac{1}{2}r(e_{34} + e_{16})) = v_2, \\ \frac{1}{3}(e_{31} + e_{32} - \frac{1}{2}r(e_{15} + e_{24})) = v_3. \end{array} \right.$$

Ihre Zahl beträgt neunzehn; sie ist also um Eins höher, als die Anzahl der durch sie dargestellten Parameter e_{hk} . Der Widerspruch findet darin seine Lösung, dass zwischen den Componenten erster Art des Tensortripels die mit (50) correspondirende Beziehung besteht

$$(53) \quad t_{11} + t_{22} + t_{33} = 0;$$

deutet man also die Tensoren als Dilatationen, so ist die hier heranzuziehende von einer Volumenänderung nicht begleitet, denn $t_{11} + t_{22} + t_{33}$ wird hier gleich $x_x + y_y + z_z$. In Bezug auf die für das Tensortripel charakteristische Oberfläche zweiten Grades (10) drückt sich dies dahin aus, dass deren Gleichung auf ihre Hauptaxen bezogen, also in der Gestalt $t_1 x^2 + t_2 y^2 + t_3 z^2 = \pm 1$, der Beziehung $t_1 + t_2 + t_3 = 0$ unterworfen ist, die eine leicht angebbare geometrische Bedeutung besitzt.

Alle Componenten h_{hik} , t_{hi} , v_h verhalten sich bei der Umkehrung des Coordinatensystems, wie die e_{hk} , deren Natur sich gemäss (43) aus derjenigen der V_h und T_{hk} ergibt; sie kehren also entweder *alle* ihr Vorzeichen um oder aber behalten *alle* dasselbe bei. Demgemäss muss das Tensortripel polar sein, wenn der Vector und das Trivectorsystem axial sind, und umgekehrt. Auf diese Weise ist das zunächst frappirende Resultat erklärbar, dass zur Darstellung *derselben* physikalischen Eigenschaft eines Krystalles neben einseitigen auch zweiseitig gerichtete Grössen nötig sein können. —

Gemäss dem allgemeinen Satz von p. 247 sind

$$(54) \quad U_1 = \frac{\partial S}{\partial V_1} = e_{11} T_{11} + e_{12} T_{22} + \dots + e_{16} T_{12},$$

.

(orthogonale) Componenten eines Vectors U ,

$$(55) \quad \begin{cases} P_{11} = \frac{\partial S}{\partial T_{11}} = e_{11} V_1 + e_{21} V_2 + e_{31} V_3, \\ \dots \dots \dots \\ P_{12} = \frac{\partial S}{\partial T_{12}} = e_{16} V_1 + e_{26} V_2 + e_{36} V_3 \end{cases}$$

orthogonale Componenten eines Tensortripels P_1, P_2, P_3 .

Die axiale oder polare Natur von U und P_1, P_2, P_3 ist aus derjenigen von T_{hk}, V_h und e_{hk} leicht abzuleiten. —

Reducirt sich das Tensortripel T_1, T_2, T_3 auf einen einzigen Tensor T , so lauten seine Componenten (unter $\pm \alpha, \pm \beta, \pm \gamma$ die Richtungscosinus des ja zweiseitigen Tensors verstanden):

$$(56) \quad \begin{cases} T_{11} = T\alpha^2, & T_{22} = T\beta^2, & T_{33} = T\gamma^2, \\ T_{23} = Tr\beta\gamma, & T_{31} = Tr\gamma\alpha, & T_{12} = Tr\alpha\beta. \end{cases}$$

Fasst man nun die Gleichungen (54) mit den Factoren α, β, γ zusammen und setzt die (longitudinale) Componente von U nach einer der beiden entgegengesetzten Richtungen von T

$$U_1 \alpha + U_2 \beta + U_3 \gamma = U_l,$$

so erhält man

$$(57) \quad \begin{cases} U_l = T(e_{11} \alpha^3 + e_{22} \beta^3 + e_{33} \gamma^3 + (e_{21} + r e_{16}) \alpha^2 \beta \\ \quad + (e_{31} + r e_{15}) \alpha^2 \gamma + \dots + (e_{14} + e_{25} + e_{36}) r \alpha \beta \gamma). \end{cases}$$

Trägt man $\sqrt[3]{\pm T/U_l} = \varrho$ als Strecke auf die bevorzugte Seite der Richtung von T auf, so erfüllen deren Endpunkte bei beliebig variirendem T eine Oberfläche, deren Gleichung bei Einführung der Coordinaten $x = \varrho \alpha, y = \varrho \beta, z = \varrho \gamma$ lautet:

$$\begin{aligned} \pm 1 &= e_{11} x^3 + e_{22} y^3 + e_{33} z^3 + (e_{21} + r e_{16}) x^2 y \\ &\quad + (e_{31} + r e_{15}) x^2 z + \dots + (e_{14} + e_{24} + e_{36}) r x y z, \end{aligned}$$

also bei Rücksicht auf (52) auch

$$(58) \quad \begin{cases} \pm 1 = h_{111} x^3 + h_{222} y^3 + h_{333} z^3 + h_{112} s x^2 y \\ \quad + h_{113} s x^2 z + \dots + h_{123} r s x y z. \end{cases}$$

Die für das Trivectorsystem des Mediums charakteristische Oberfläche hat hierdurch eine einfache physikalische Deutung erhalten.

Eine zweite kann man aus dem System (55) ableiten, indem man dem Vector V die Richtungscosinus α, β, γ beilegt und die betreffenden Formeln mit den Factoren $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2, r\beta\gamma, r\gamma\alpha, r\alpha\beta$ zusammenfasst. Man erhält dann für die Componente erster Art des Tensortripels P_1, P_2, P_3 nach der Richtung von V , d. h. für

$$(59) \quad P_u = P_{11}\alpha^2 + P_{22}\beta^2 + P_{33}\gamma^2 + P_{23}r\beta\gamma + P_{31}r\gamma\alpha + P_{12}r\alpha\beta,$$

den mit (57) gleichgestalteten Ausdruck

$$(60) \quad \begin{cases} P_u = V(e_{11}\alpha^3 + \dots + (e_{21} + r e_{16})\alpha^2\beta + \dots \\ \quad + (e_{14} + e_{25} + e_{36})r\alpha\beta\gamma), \end{cases}$$

der sich wie jener weiter behandeln lässt.

Während nach dem Vorstehenden das für den Krystall charakteristische Trivectorsystem sich leicht und vollständig veranschaulichen lässt, ist Analoges in Bezug auf das an sich viel einfachere Tensortripel und in Bezug auf den Einzelvector anscheinend nicht möglich; man kann die nach (52) in ihren Componenten auftretenden Constanten nur auf ziemlich umständliche und künstliche Weise von den anderen sondern. —

Die im allgemeinen sehr complicirten Verhältnisse vereinfachen sich, wenn man der Betrachtung *specielle Krystallsysteme* unterwirft. Wir beschränken uns dabei auf den wichtigsten Fall, dass V und T beide *polar* sind.

Ist die Z -Coordinatenaxe eine dreizählige Symmetrieaxe (Symbol A_z^3), so nimmt das System der e_{hik} folgende Gestalt an:

$$\begin{array}{cccccc} e_{11} & -e_{11} & 0 & e_{14} & e_{15} & -r e_{22} \\ -e_{22} & e_{22} & 0 & e_{15} & -e_{14} & -r e_{11} \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Hieraus ergeben sich die folgenden Werte der Componenten

$$(61) \quad \left\{ \begin{array}{l} h_{111} = e_{11}, \quad h_{222} = e_{22}, \quad h_{333} = e_{33}, \\ h_{112} = -s e_{22} \quad h_{221} = -s e_{11} \quad h_{331} = h_{332} = 0, \\ h_{113} = h_{223} = (e_{31} + r e_{15})/s, \quad h_{123} = 0; \\ t_{11} = t_{22} = -\frac{1}{3}s_{14}, \quad t_{33} = +\frac{2}{3}s_{14}, \quad t_{23} = t_{31} = t_{12} = 0; \\ v_1 = v_2 = 0, \quad v_3 = \frac{1}{2}(2e_{31} - r e_{15}). \end{array} \right.$$

Das Trivectorsystem zeigt hier den der dreizähligen Axe entsprechenden Charakter, während das Tensortripel (wie der Vector) die Symmetrie eines Rotationskörpers angenommen hat.

Diese Werte umfassen andere specielle Fälle. Ist die Z -Axe vier- oder sechszählig (Symbole A_z^4 oder A_z^6), so verschwindet in dem System (61) noch e_{11} und e_{22} , wodurch das Trivectorsystem gleichfalls die Symmetrie eines Rotationskörpers erhält.

Ist ausserdem die YZ -Ebene eine Symmetrieebene (Symbol E_x), so verschwindet e_{14} , und damit überhaupt das Tensortripel; *die Krystalle von der Symmetrie $A_z^4 E_x$ und $A_z^6 E_x$ sind also für die behandelten Vorgänge allein durch ein Trivectorsystem und einen einzelnen Vector charakterisirt.*

Ist mit der vier- oder sechszähligen Z -Axe noch eine zweizählige X -Axe (Symbol A_x^2) verbunden, so ist nur e_{14} von Null verschieden; *Krystalle von der Symmetrie $A_z^4 A_x^2$ oder $A_z^6 A_x^2$ sind also für die behandelten Beziehungen vollständig durch ein ganz specielles Tensortripel charakterisirt.* —

Der Ansatz (43) findet seine wichtigste Anwendung in der Theorie der *mechanisch-elektrischen Wechselwirkungen* an acentrirten Krystallen (Piezoelektricität und elektrische Deformation), deren spezifische freie Energie ξ die Form besitzt¹⁾

$$(62) \quad \left\{ \begin{aligned} \xi = & - [X(\epsilon_{11} x_x + \epsilon_{12} y_y + \epsilon_{13} z_z + \epsilon_{14} y_z + \epsilon_{15} z_x + \epsilon_{16} x_y) \\ & + Y(\epsilon_{21} x_x + \epsilon_{22} y_y + \epsilon_{23} z_z + \epsilon_{24} y_z + \epsilon_{25} z_x + \epsilon_{26} x_y) \\ & + Z(\epsilon_{31} x_x + \epsilon_{32} y_y + \epsilon_{33} z_z + \epsilon_{34} y_z + \epsilon_{35} z_x + \epsilon_{36} x_y)] . \end{aligned} \right.$$

Dabei bezeichnen die $x_x, \dots, x_y$ die Deformationsgrössen, X, Y, Z die Componenten der elektrischen Feldstärke. Vector und Tensortripel der Variablen sind hier *polar*; das Trivectorsystem und der Einzelvector der Parameter sind gleichfalls *polar*, das Tensortripel der Parameter ist *axial* und liefert somit ein weiteres Beispiel für die p. 255 besprochene, bisher nicht bemerkte Gattung gerichteter Grössen. Die ϵ_{hk} stellen Parameter (die piezoelektrischen Constanten) dar.

Da $x_x, y_y, z_z, y_z/r, z_x/r, x_y/r$ orthogonale Tensorcomponenten sind, so stehen die ϵ_{hk} , deren Indices nur die Ziffern 1, 2, 3 enthalten, direct an der Stelle der entsprechenden e_{hk} ,

1) W. Voigt, Wied. Ann. 55. p. 704. 1895.

dagegen die ϵ_{hk} mit einem Index der Reihe 4, 5, 6 an Stelle der entsprechenden e_{hk}/r .

Ueber eine geometrische Veranschaulichung der piezoelektrischen Eigenschaften eines Krystalles habe ich bereits an einer anderen Stelle berichtet.¹⁾ Dort ist gezeigt, dass dieselbe sich in sehr symmetrischer Art mit Hülfe dreier centrischer Oberflächen zweiten Grades ausführen lässt. Indessen sind diese Oberflächen nicht durch die Natur des Krystalles allein bestimmt, sondern hängen ausserdem noch von der Lage des gewählten Coordinatensystems ab. Die mit Vorstehendem geleistete Darstellung ist, obwohl unsymmetrisch, der früheren darin unbedingt bedeutend überlegen, dass Lage und Grösse der eingeführten geometrischen Elemente sich allein und vollständig durch die Substanz bestimmen, deren Verhalten veranschaulicht werden soll. —

Die durch Deformation erregten specifischen elektrischen Momente a , b , c nach den Coordinatenaxen ergeben sich aus (62) nach den Formeln

$$(63) \quad \left\{ \begin{array}{l} a = -\frac{\partial \xi}{\partial X} = \epsilon_{11} x_x + \epsilon_{12} y_y + \dots + \epsilon_{16} x_y, \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

die im elektrischen Felde eintretenden Druckcomponenten nach den anderen

$$(64) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_x = -\frac{\partial \xi}{\partial x_x} = \epsilon_{11} X + \epsilon_{21} Y + \epsilon_{31} Z, \\ \dots \dots \dots \\ A_y = -\frac{\partial \xi}{\partial x_y} = \epsilon_{16} X + \epsilon_{26} Y + \epsilon_{36} Z. \end{array} \right.$$

Der Fall der *mechanisch-magnetischen* Wechselwirkungen wird gleichfalls durch den Ansatz (62) umfasst, nur ist hier der variable Vector nicht polar, sondern axial — ein Umstand, der sich bei der Specialisirung des allgemeinen Ausdrucks auf die einzelnen Krystallgruppen höchst wesentlich erweist.

Die Vectorcomponente U_l , deren Wert in (57) angegeben ist, hat in unserem Fall die Bedeutung des Momentes l , das durch eine einfache Dilatation δ hervorgerufen wird, nach

1) W. Voigt, Wied. Ann. 63. p. 377. 1897.

deren Richtung; die durch (60) bestimmte Tensorcomponente P_n stellt die Normalspannung N_n in der Richtung der Kraftlinien des Feldes von der Stärke K dar. Nach den Gleichungen (57) und (60) gilt hier

$$(65) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{l}{\delta} = \frac{N_n}{K} &= \varepsilon_{11} \alpha^3 + \dots + (\varepsilon_{21} + 2 \varepsilon_{16}) \alpha^2 \beta + \dots \\ &+ 2 (\varepsilon_{14} + \varepsilon_{25} + \varepsilon_{36}) \alpha \beta \gamma. \end{aligned} \right.$$

Die für das Trivectorsystem des Krystalles charakteristische Oberfläche (57) ist hierdurch auf zwei verschiedene Weisen physikalisch gedeutet. —

Solange es sich um *isothermische* Vorgänge handelt, kann man in den Formeln (62) und (63) die Deformationsgrößen durch die ihnen entsprechenden elastischen Druckcomponenten $X_x, \dots, X_y$ nach den (später zu erörternden) Gleichungen

$$(66) \quad \begin{aligned} -x_x &= s_{11} X_x + s_{12} Y_y + \dots + s_{16} X_y, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

ausdrücken und erhält dann Beziehungen von der Form:

$$(67) \quad \left\{ \begin{aligned} \xi &= + [X(\delta_{11} X_x + \dots + \delta_{16} X_y) + Y(\delta_{21} X_x + \dots + \delta_{26} X_y) \\ &+ Z(\delta_{31} X_x + \dots + \delta_{36} X_y)] \end{aligned} \right.$$

und

$$(68) \quad \begin{aligned} -a &= \delta_{11} X_x + \delta_{12} Y_y + \dots + \delta_{16} X_y, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

worin die δ_{hk} neue Parameter (die piezoelektrischen Moduln) bezeichnen. Hier ergeben sich dann auch die Anteile $a_x, \dots, a_y$ an den Deformationsgrößen, die auf den Feldwirkungen beruhen, nach (66) gemäss den Formeln:

$$(69) \quad \begin{aligned} a_x &= \delta_{11} X + \delta_{21} Y + \delta_{31} Z, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Da $X_x, Y_y, Z_z, rY_x, rZ_x, rX_y$ orthogonale Tensorcomponenten sind, so stehen jetzt die δ_{hk} für h und k gleich 1, 2, 3 an der Stelle der entsprechenden e_{hk} , die mit h oder k gleich 4, 5, 6 an Stelle der bezüglichen re_{hk} .

Diese neue Form der Darstellung führt natürlich auf andere charakteristische Richtungsgrößen erster bis dritter Ordnung. Die dem betreffenden Trivectorsystem zugehörige Oberfläche vom Typus (58) gewinnt hier eine noch anschaulichere Bedeutung, als bei der früheren Darstellung, insofern die durch (57) definierte Function U_l hier unmittelbar das longitudinale

$$(73) \quad \left\{ \begin{array}{l} S = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + \dots + a_{16} A_{16} \\ \quad \quad \quad + a_{22} A_{22} + \dots + a_{26} A_{26} \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad + \dots \end{array} \right.$$

oder bei Identificirung von U und W , V und J

$$(78) \quad \begin{cases} Q_{11} = (U_2 V_3 - U_3 V_2)^2, \dots \\ Q_{23} = r(U_3 V_1 - U_1 V_3)(U_1 V_2 - U_2 V_1), \dots \end{cases}$$

Dies liefert bei Benutzung der P_{hk} und T_{hk} von oben und bei Berücksichtigung der Abkürzungen aus (72), dass

$$(79) \quad \begin{cases} A_{23} - A_{44} = Q_{11}, & A_{31} - A_{55} = Q_{23}, & A_{22} - A_{66} = Q_{33}, \\ (A_{56} - r A_{14})/r = Q_{23}, & (A_{64} - r A_{25})/r = Q_{31}, \\ (A_{45} - r A_{36})/r = Q_{12} \end{cases}$$

die orthogonalen Componenten eines Tensortripels sind.

Hiernach kann man die durch (71) bez. (73) definirte Function S in folgender Weise zerlegen:

$$(80) \quad \left\{ \begin{aligned} S = & [a_{11} L_{1111} + a_{22} L_{2222} + a_{33} L_{3333} \\ & + (a_{15} L_{1113} + a_{16} L_{1112} + a_{26} L_{2221} + \dots + a_{35} L_{3331}) r \\ & + ((a_{23} + a_{44}) L_{2233} + (a_{31} + a_{55}) L_{3311} + (a_{12} + a_{66}) L_{1122} \\ & + (a_{14} + r a_{56}) L_{1123} + (a_{25} + r a_{64}) L_{2231} + (a_{36} + r a_{46}) L_{3312}) r / s] \\ & + \frac{1}{3} [(2 a_{23} - a_{44}) Q_{11} + (2 a_{31} - a_{55}) Q_{23} + (2 a_{12} - a_{66}) Q_{33} \\ & + (r a_{56} - 2 a_{14}) Q_{23} + (r a_{64} - 2 a_{25}) Q_{31} + (r a_{46} - 2 a_{36}) Q_{12}]. \end{aligned} \right.$$

Dies zeigt, dass die 21 Parameter des Ansatzes (71) bez. (73) bei Annahme der Beziehungen $a_{hk} = a_{kh}$ zurückführbar sind auf ein Bitensorsystem und auf ein gewöhnliches Tensortripel. Das Verhalten der beiderseitigen Componenten bei Umkehrung des Coordinatensystems hängt in leicht ersichtlicher Weise von demjenigen der T_{hk} und P_{mn} ab.

Die Ausdrücke für diese Componenten lauten folgendermaassen:

$$(81) \quad \begin{cases} a_{11} = l_{1111}, \dots, & r a_{15} = l_{1113}, \dots, & r a_{16} = l_{1112}, \dots \\ (a_{23} + a_{44}) r / s = l_{2233}, \dots, & (a_{14} + r a_{56}) r / s = l_{1123}, \dots \\ \frac{1}{3} (2 a_{23} - a_{44}) = q_{11}, \dots, & \frac{1}{3} (r a_{56} - 2 a_{14}) = q_{23}, \dots \end{cases}$$

Die Differentialquotienten von S nach den P_{hk} oder den T_{hk} sind nach dem ersten Satz auf p. 248 orthogonale Tensorcomponenten; wir setzen z. B.

Der Ansatz (71) findet unter der Annahme, dass $a_{hk} = a_{kh}$ und $P_{hk} = T_{hk}$ ist, seine wichtigste Anwendung im Gebiete der *Krystallelasticität*, wo der Ausdruck für die (freie) Energie ξ der Volumeneinheit bekanntlich lautet

$$(85) \left\{ \begin{array}{l} 2\xi = c_{11}x_x^2 + 2c_{12}x_xy_y + 2c_{13}x_xz_z + \dots + 2c_{16}x_xx_y \\ \quad + c_{22}y_y^2 + 2c_{23}y_yz_z + \dots + 2c_{26}y_yx_y \\ \quad + \dots \end{array} \right.$$

und $x_x, \dots, x_y$ die Deformationsgrössen, die c_{hk} (wie p. 252) die Elasticitätsconstanten bezeichnen. Da die $x_x, y_y, z_z, y_z/r, z_x/r, x_y/r$ die orthogonalen Componenten des Dilatations-*tripels* sind, so stehen in (85) die c_{hk} mit zwei Indices der Reihe 1, 2, 3 an Stelle der entsprechenden a_{kk} , solche mit einem Index der Reihe 1, 2, 3, und einem der Reihe 4, 5, 6 an Stelle der zugehörigen a_{hk}/r , solche schliesslich mit zwei Indices der Reihe 4, 5, 6 an Stelle der betreffenden $a_{hk}/2$.

Das Schema (81) nimmt demgemäss die Gestalt an:

$$(86) \left\{ \begin{array}{l} c_{11} = l_{1111}, \dots \quad 2c_{15} = l_{1113}, \dots \quad 2c_{16} = l_{1112}, \dots \\ (c_{22} + 2c_{44})r/s = l_{2233}, \dots \quad (c_{14} + 2c_{46})2/s = l_{1123}, \dots \\ \frac{2}{3}(c_{23} - c_{44}) = q_{11}, \dots \quad \frac{2}{3}r(c_{56} - c_{14}) = q_{23}, \dots \end{array} \right.$$

Es ist bekannt, dass die Elasticitätsconstanten von Krystallen, deren kleinste Teile Kräfte aufeinander ausüben, die nur unmerklich mit der Richtung variiren, die Beziehungen

$$\begin{array}{lll} c_{23} = c_{44}, & c_{31} = c_{55}, & c_{12} = c_{56}, \\ c_{14} = c_{56}, & c_{25} = c_{64}, & c_{36} = c_{45} \end{array}$$

erfüllen. Zieht man die Werte der Tensorcomponenten q_{hk} aus (86) heran, so erkennt man das merkwürdige Resultat¹⁾, dass *Krystalle der genannten Art in ihrem elastischen Verhalten vollständig durch das Bitensorsystem allein charakterisirt werden. Das im allgemeinen noch hinzutretende Tensortripel hängt also ganz wesentlich von der „Polarität“ der kleinsten Teilchen des Krystalles ab.* —

1) Vgl. hierzu W. J. M. Rankine, Phil. Trans, 146. p. 261. 1856; S. Venant, Liouv. Journ. (2) 8. p. 257. 1863.

Die elastischen Druckcomponenten folgen aus (85) nach dem Schema (82) zu

$$(87) \quad -X_x = \frac{\partial \xi}{\partial x_x} = c_{11} x_x + c_{12} y_y + \dots + c_{16} x_y, \\ \dots \dots \dots$$

Reducirt sich das Dilatationstripel auf eine einfache Dilatation p mit den Richtungscosinus $\pm \alpha$, $\pm \beta$, $\pm \gamma$, so lassen sich die an das System (82) angeknüpften Bemerkungen anwenden und man erhält für die normale Druckcomponente P_p in der Richtung von p nach (83) den Wert

$$(88) \quad \left\{ \begin{aligned} -P_p &= p(c_{11} \alpha^4 + \dots + 4c_{16} \alpha^3 \beta + 4c_{15} \alpha^3 \gamma + \dots \\ &\quad + 2(c_{23} + 2c_{44}) \beta^2 \gamma^2 + \dots + 4(c_{14} + 2c_{56}) \alpha^2 \beta \gamma + \dots), \end{aligned} \right.$$

womit eine Deutung des für den Krystall charakteristischen Bitensorsystems an die Hand gegeben ist. —

In mancher Hinsicht wichtiger noch, als der Ausdruck (85) für die (freie) Energie, ist der bei isothermischen Vorgängen mit ihm gleichwertige, in dem die *Druckcomponenten* als Variable auftreten, nämlich

$$(89) \quad \left\{ \begin{aligned} 2\xi &= s_{11} X_x^2 + 2s_{12} X_x Y_y + 2s_{13} X_x Z_z + \dots + 2s_{16} X_x X_y \\ &\quad + s_{22} Y_y^2 + 2s_{23} Y_y Z_z + \dots + 2s_{26} Y_y X_y \\ &\quad + \dots \dots \dots \end{aligned} \right.$$

Seine Parameter s_{hk} heissen (wie p. 252) die Elasticitätsmoduln der Substanz. Da X_x , Y_y , Z_z , rY_z , rZ_x , rX_y die orthogonalen Componenten des Druck- oder Spannungstripels sind, so entsprechen sich, falls h und k gleich 1, 2, 3, und m und n gleich 4, 5, 6 sind,

$$s_{hk} \text{ und } a_{hk}, \quad s_{hm} \text{ und } r a_{km}, \quad s_{mn} \text{ und } 2 a_{mn}.$$

Demgemäss lautet das Schema (81) nunmehr folgendermaassen:

$$(90) \quad \left\{ \begin{aligned} s_{11} &= l'_{1111}, \dots & s_{15} &= l'_{1113}, \dots & s_{16} &= l'_{1112}, \dots \\ (2s_{23} + s_{44})/rs &= l'_{2223}, \dots & (s_{14} + s_{56})/s &= l'_{1123}, \dots \\ \frac{1}{3}(4s_{23} - s_{44}) &= q'_{11}, \dots & \frac{1}{3}(s_{56} - 2s_{14})/r &= q'_{23}, \dots \end{aligned} \right.$$

Für die Deformationsgrössen gelten hier die Gleichungen

$$(91) \quad -x_x = \frac{\partial \xi}{\partial X_x} = s_{11} X_x + s_{12} Y_y + \dots + s_{16} X_y, \\ \dots \dots \dots$$

Reducirt sich das Drucktripler auf einen einzigen Normaldruck L_i mit den Richtungs cosinus $\pm \alpha, \pm \beta, \pm \gamma$, so gewinnen die Ueberlegungen von p. 268 Anwendung, und wir erhalten für die lineare Dilatation l in der Richtung von L_i den Ausdruck

$$(92) \quad \begin{cases} -l = L_i(s_{11} \alpha^4 + \dots + 2s_{16} \alpha^3 \beta + 2s_{15} \alpha^3 \gamma + \dots \\ \quad + (2s_{23} + s_{44}) \beta^2 \gamma^2 + \dots + 2(s_{14} + s_{56}) \alpha^2 \beta \gamma + \dots). \end{cases}$$

Der hieraus für $-l/L_i$ resultierende Wert ist *der Modul s_i der longitudinalen Dilatation bei einseitigem Zug*; diese Grösse steht hiernach im allerengsten Zusammenhang mit dem für die allgemeinen Elasticitätsmoduln s_{hk} charakteristischen Bitensor-system.

Wenn also mitunter aus dem praktischen Grund der leichten Bestimmbarkeit des Moduls s_i sein Verlauf mit der Richtung zur Charakterisierung der Elasticitätsverhältnisse eines Krystalles benutzt wird, so lässt sich ein solches Verfahren nach dem Vorstehenden auch mit theoretischen Gründen stützen. Es ist aber nicht zu vergessen, dass das Bitensorsystem, bez. der Modul s_i , *allein* zur erschöpfenden Darstellung der elastischen Verhältnisse eines Krystalles nicht ausreicht, dass man vielmehr noch ein Tensortripel, bez. einen Modul mit sechs Parametern heranzuziehen hat. Bezüglich des letzteren weichen die theoretischen und die praktischen Anforderungen einigermaßen voneinander ab; der von der Theorie empfohlene, mit den durch (90) bestimmten Componenten q'_{hk} , hat keine einfache *physikalische* Bedeutung, die von mir an einem anderen Orte angegebenen¹⁾ relativ leicht beobachtbaren Grössen sind *theoretisch* complicirter.

b) Für die Behandlung *des zweiten Falles* ($a_{hh} = 0$, $a_{hk} = -a_{kh}$) wollen wir eine neue Bezeichnung der Parameter einführen und den Ansatz (71) schreiben:

[illegible]

1) W. Voigt, Wied. Ann. 63. p. 381. 1897.

oder anders angeordnet

$$(94) \left\{ \begin{aligned} S = & b_{32} (P_{33} T_{22} - T_{33} P_{22}) + \dots + b_{14} (P_{11} T_{23} - T_{11} P_{23}) + \dots \\ & + b_{15} (P_{11} T_{31} - T_{11} P_{31}) + \dots + b_{16} (P_{11} T_{12} - T_{11} P_{12}) + \dots \\ & + b_{56} (P_{31} T_{12} - T_{31} P_{12}) + \dots, \end{aligned} \right.$$

wobei jedes einzelne Glied zwei weitere, daraus durch cyklische Vertauschung der Indices zu gewinnende repräsentirt. Den letzteren Ausdruck kürzen wir passend noch ab in

$$(95) \left\{ \begin{aligned} S = & b_{32} B_{32} + \dots + b_{14} B_{14} + \dots + b_{15} B_{15} + \dots \\ & + b_{16} B_{16} + \dots + b_{56} B_{56} + \dots, \end{aligned} \right.$$

wobei die Bezeichnungen B_{hk} an die Stellung der einzelnen Glieder in dem Schema (93) anknüpfen und durch Vergleichung von (95) mit (94) ohne weiteres verständlich werden.

Um diesen Ausdruck in Gruppen mit orthogonalen variablen Factoren zu zerlegen, geht man passend von den Formeln (44) für die Componenten eines Trivectorsystems aus, ersetzt darin W_1 durch $W_2 J_3 - W_3 J_2$ etc. und identificirt schliesslich U mit W , V mit J . Dann gelangt man zu den Beziehungen

$$(96) \left\{ \begin{aligned} H_{111} = & U_1 U_2 V_1 V_3 - U_1 U_3 V_1 V_2, \dots \\ H_{112} = & [(U_2^2 V_1 V_3 - U_1 U_3 V_2^2) + (U_1 U_2 V_2 V_3 - U_2 U_3 V_1 V_2) \\ & + (U_1 U_3 V_1^2 - U_1^2 V_1 V_3)] s, \dots \\ H_{123} = & [(U_1^2 V_2^2 - U_2^2 V_1^2) + (U_2^2 V_3^2 - U_3^2 V_2^2) \\ & + (U_3^2 V_1^2 - U_1^2 V_3^2)] / r s, \end{aligned} \right.$$

welche bei Einführung von $U_1^2 = T_{11}, \dots, V_1^2 = P_{11}, \dots$ und bei Rücksicht auf die Abkürzungen B_{hk} sogleich ergeben, dass

$$(97) \left\{ \begin{aligned} B_{56} = & H_{111}, \quad B_{64} = H_{222}, \quad B_{45} = H_{333}, \\ (r B_{15} - r B_{25} - B_{64})/s = & H_{112}, \quad (r B_{36} - r B_{16} - B_{45})/s = H_{113}, \\ (r B_{26} - r B_{36} - B_{45})/s = & H_{223}, \quad (r B_{14} - r B_{24} - B_{56})/s = H_{221}, \\ (r B_{34} - r B_{14} - B_{56})/s = & H_{331}, \quad (r B_{25} - r B_{35} - B_{64})/s = H_{332}, \\ (B_{32} + B_{13} + B_{21})r/s = & H_{123} \end{aligned} \right.$$

die orthogonalen Componenten eines Trivectorsystems darstellen.¹⁾

1) Die folgenden Formeln enthalten in dem ersten Abdruck mehrere fehlerhafte Indices, die oben berichtet sind.

Weiter hat man zu benutzen, dass, weil die Quadrate der resultirenden Vektoren Scalaren sind,

$$(98) \quad \begin{cases} R_{11} = U_1^2 V^2 - V_1^2 U^2, \dots \\ R_{23} = r(U_2 V_3 V^2 - V_2 V_3 U^2), \dots \end{cases}$$

orthogonale Tensorcomponenten darstellen. Verfährt man mit diesen Ausdrücken wie mit (96), so erkennt man leicht, dass auch

$$99) \left\{ \begin{array}{l} B_{21} - B_{13} = R_{11}, \quad B_{32} - B_{21} = R_{22}, \quad B_{13} - B_{32} = R_{33}, \\ B_{14} + B_{24} + B_{34} = R_{23}, \quad B_{25} + B_{35} + B_{15} = R_{31}, \\ B_{36} + B_{16} + B_{26} = R_{12} \end{array} \right.$$

die orthogonalen Componenten eines Tensortripels ergeben, welches wiederum die specielle Eigenschaft hat, dass gilt:

$$(100) \quad R_{11} + R_{22} + R_{33} = 0.$$

Hiernach gestattet der Ansatz (93) bez. (95) die folgende Zerlegung:

$$(101) \left\{ \begin{aligned} S = & [(r b_{56} - b_{24} + b_{34}) s H_{111} + (r b_{64} - b_{35} + b_{15}) s H_{222} \\ & + (r b_{45} - b_{16} + b_{26}) s H_{333}, \\ & + (2 b_{15} - b_{25} - b_{35}) H_{112} - (2 b_{16} - b_{26} - b_{36}) H_{113} \\ & + (2 b_{26} - b_{36} - b_{16}) H_{223} - (2 b_{24} - b_{34} - b_{14}) H_{221} \\ & + (2 b_{34} - b_{14} - b_{24}) H_{331} - (2 b_{35} - b_{15} - b_{25}) H_{332} \\ & + (b_{32} + b_{13} + b_{21}) H_{123}] / r s, \\ & + \frac{1}{3} [(b_{21} - b_{13}) R_{11} + (b_{32} - b_{21}) R_{22} + (b_{13} - b_{32}) R_{33} \\ & + (b_{14} + b_{24} + b_{34}) R_{23} + (b_{25} + b_{35} + b_{15}) R_{31} \\ & + (b_{36} + b_{16} + b_{26}) R_{12}]. \end{aligned} \right.$$

Dies zeigt, dass die 15 Parameter b_{hk} des Ansatzes (93) zurückführbar sind auf ein Trivectorsystem und auf ein Tensortripel. Deren orthogonale Komponenten haben die folgenden Werte:

$$(102) \quad \begin{cases} h_{111}=b_{56}-\left(b_{24}-b_{34}\right) / r, & . . . \\ h_{112}=\left(2 b_{15}-b_{25}-b_{35}\right) / r s, & h_{113}=-\left(2 b_{16}-b_{26}-b_{36}\right) / r s, \\ . & . . . \\ h_{123}=\left(b_{32}+b_{13}+b_{21}\right) / r s ; \\ r_{11}=\frac{1}{3}\left(b_{21}-b_{13}\right), & r_{22}=\frac{1}{3}\left(b_{32}-b_{21}\right), & r_{32}=\frac{1}{3}\left(b_{13}-b_{32}\right); \\ r_{23}=\frac{1}{3}\left(b_{14}+b_{24}+b_{34}\right), & r_{31}=\frac{1}{3}\left(b_{25}+b_{35}+b_{15}\right), \\ r_{12}=\frac{1}{3}\left(b_{36}+b_{16}+b_{26}\right). \end{cases}$$

Wiederum gilt zwischen den drei Tensorcomponenten erster Art die Beziehung

$$(103) \quad r_{11} + r_{22} + r_{33} = 0,$$

wodurch die Anzahl der unabhängigen Componenten derjenigen der Parameter b_{hk} gleich wird.

Eine directe physikalische Deutung des Bivectorsystems und des Tensortripels scheint in diesem Falle Schwierigkeiten zu bieten. —

Beiläufig möge bemerkt werden, dass die Functionen B_{hk} ausser zu den in (97) und (99) angegebenen Componenten eines Trivectorsystems und eines Tensortripels auch noch zu *Vector*componenten zusammengefasst werden können. In der That sind Ausdrücke von der Form

$$(104) \quad W_1 = (U_1 V_1 + U_2 V_2 + U_3 V_3)(U_2 V_3 - U_3 V_2), \dots$$

da die erste Klammer ein Scalar ist, *Vector*componenten. Verfährt man mit denselben in der früheren Weise, so erkennt man, dass auch

$$(105) \quad \begin{cases} r B_{34} - r B_{24} + B_{56} = W_1, & r B_{15} - r B_{35} + B_{64} = W_2, \\ r B_{26} - r B_{16} + B_{45} = W_3 \end{cases}$$

Vectorcomponenten darstellen.

Hieraus folgt, dass sich die Parameter der Function (93) bez. (95) auch durch ein Trivectorsystem, ein Tensortripel und einen Vector darstellen lassen, wobei man deren Componenten drei willkürliche Bedingungen auferlegen kann. Da aber durch die Heranziehung von *drei* geometrischen Gebilden an Stelle von *zwei* die Anschaulichkeit nicht zunimmt, sondern abnimmt, so mag von einer solchen Ausgestaltung der Untersuchung hier abgesehen werden. —

Gehen wir nun zu dem allgemeinen Fall des Ansatzes (71) zurück, der, wie seiner Zeit gesagt, durch Superposition der unter a) und b) behandelten speciellen Fälle hergestellt werden kann, so ergibt sich das Resultat, dass die 36 Parameter der allgemeinsten in zweimal sechs Tensorcomponenten bilinearen Function sich zurückführen lassen auf ein Bitensorsystem, ein Trivectorsystem und zwei Tensortripel, von denen das eine dadurch beschränkt ist, dass seine drei Componenten erster Art die Summe Null liefern.

Diese complicirten Verhältnisse finden wahrscheinlich bei den Vorgängen der *inneren Reibung* statt. —

Hiermit sind die fundamentalen Beziehungen der Krystallphysik im wesentlichen erschöpft, denn die Fälle, wo es sich um scalare Functionen von anderer Natur handelt, als oben besprochen, sind selten und theils mit Hülfe der auseinander-gesetzten Principien auf die obigen zurückführbar, theils weniger wichtig.

Ein Beispiel der ersteren Art giebt die Energie eines in einem elektrostatischen Felde befindlichen und von Lichtschwingungen durchsetzten Körpers, die linear in einem, quadratisch in einem anderen Systeme von Vectorcomponenten ist. Ein Beispiel der letzteren Art ist die Energie eines ferromagnetischen Krystalles. Wir dürfen von dergleichen hier absehen.

Resultate.

Ausgehend von der Bemerkung, dass die gewöhnlichen Vectorcomponenten sich wie Coordinaten, die Componenten von Tensortripeln wie Quadrate und Producte von Coordinaten transformiren, sind als *orthogonale Componenten eines Systems gerichteter Grössen n^{ter} Ordnung* allgemein $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ Functionen bezeichnet, die sich transformiren, wie die durch geeignete Zahlenfactoren orthogonal gemachten Producte der Coordinaten zu je n , deren Anzahl gleichfalls $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ beträgt. Die Vektoren erscheinen hierbei als gerichtete Grössen *erster*, die Tensoren als solche *zweiter* Ordnung.

Die Parameter der Krystallphysik sind, mit Ausnahme einiger unwesentlicher Fälle, sämtlich zurückführbar auf gerichtete Grössen *erster* bis *vierter* Ordnung, und zwar erfordert das einzelne Erscheinungsgebiet häufig mehr als *eine* Gattung. Die betreffenden Grössen gestatten in vielen Fällen eine directe physikalische Deutung.

Göttingen, im December 1900.

(Eingegangen 24. Februar 1901.)