Schreiben des Herrn Ministerialraths von Steinheil an den Herausgeber.

Sie erinnern sich vielleicht, dass ich Ihnen vor einiger Zeit die Idee mittheilte, durch einen cylindrischen Massstab in Gestalt eines Rades, den Abstand von zwei festen Punkten zu messen, indem das Rad von dem einen Punkt zum andern auf einem Eisenbahngleise rollt. Wenn dieses Rollen oder Abwickeln ohne alles Gleiten erfolgte, so könnte man auf diese Weise die Länge der Linien der einen Schiene einer Eisenbahn mit grosser Genauigkeit und zwar mit Rücksicht auf die Ausdehnung des Rades bei verschiedenen Temperaturen finden. Wenn ferner der Verlauf der gemessenen Linie mit einer zur Reduction genügenden Genauigkeit bekannt wäre, liesse sich so vielleicht die von *Bessel* in seiner Gradmessung von Ostpreussen § 9, Pag. 36, angeregte Idee den Bogen auf der Erdoberfläche unmittelbar, d. h. ohne Hülfe von Dreiecken zu messen, mit Benutzung der erst seitdem entstandenen Eisenbahnen, jetzt ausführen. Die Methode würde das Zunehmen des Fehlers, der jetzt aus der Multiplication der Grundlinie hervorgeht, eliminiren.

Sowohl von Ihnen, als von Herrn Generalleutenant von *Baeyer*, dem ich ebenfalls den Gedanken mittheilte, bin ich aufgefordert worden, die Hauptfrage des Problems — ob das Rad gleitet oder nicht — durch Versuche zu entscheiden.

Das ist seitdem geschehen und es liegen Beobachtungen vor, deren Resultat mit Rücksicht auf die noch sehr mangelhaften Hilfsmittel im hohen Grade überraschen muss. Aus ca. 50 Befahrungen einer Eisenbahnstrecke von nur 17 Metres hat sich der mittlere Fehler der einmaligen Befahrung ca.

$$= \frac{1}{4} \text{ Millimeter} = \frac{1}{80000}$$

der ganzen Länge ergeben, und es hat sich damit zugleich die Ausdehnung des Rades (Kupfer) aus nur 7° R. Temperaturdifferenz für

$$1^\circ \text{ Réaumur} = 0,0000212$$

gefunden, während man im Allgemeinen für Kupfer = 0,0000215 annimmt. Zugleich hat sich gezeigt, dass das Rad keine Spur gleitet. Die Aufgabe verspricht sonach bei weiterer Verfolgung nutzbringend zu werden.

Ich erlaube mir daher noch einige Details über die bisherigen Versuche mitzutheilen.

Die Durchführung meiner Vorschläge und die Messungen verdanke ich Herrn Prof. Dr. *Ernst Voit* dahier, der seine Geschicklichkeit in physikalischen Beobachtungen dadurch aufs Neue bewährt hat. Mein Alter und mein Befinden gestatten mir nicht mehr, selbst Hand anzulegen.

In dem hiesigen Glaspallaste wurde das Doppelgleise einer geraden Eisenbahn von ca. 20 Metres Länge angelegt. Die Schienen sind dieselben, welche die *Bayer'sche* Staatsbahn verwendet. Die Genauigkeit der Legung und die Abstände der Schienen sind wie bei den Staatsbahnen eingehalten. Zu den ersten rohen Versuchen diente ein dem physikalischen Cabinet des Staates gehöriger Wegmesser in Gestalt eines Schubkarrens. Die Axe des Rades läuft in Friktionsrollen und um das hölzerne Rad ist ein Reif von Kupfer festgeschraubt. Ein Indexstrich am Rande des Rades trifft zusammen mit einem am Boden befestigten Index. Nach 6 Umgängen des Rades wird wieder die Lage seines Indexstriches gegen eine am Boden befestigte Scale notirt. Das Rad wird nur aus freier Hand geleitet. Es macht daher unvermeidlich Schwankungen in der Richtung gegen den Endpunkt, die Fehler erzeugen.

Dennoch stimmen die Wiederholungen unter einander schon auf ca. $\frac{1}{10000}$ der ganzen Länge. Auf die Ausdehnung des Rades ist dabei noch nicht Rücksicht genommen da grössere Fehlerquellen mitwirkten. Versuche mit stossweiser Bewegung des Rades und plötzlichem Einhalten liessen nichts von Gleiten erkennen. Es stand zu vermuthen, dass die Unsicherheit ($\frac{1}{10000}$) hauptsächlich von der mangelhaften Leitung des Rades, zum Theil auch daher rühre, dass die Mantelfläche des Rades nicht genau cylinderisch war. Das Rad bekommt daher ein Gestelle mit Friktionsrollen, welches seine Vertikalebene genau in der Vertikalebene der Schienen erhalten soll und es wird das Rad cylindrisch abgedreht.

Die Bewegung ist noch nicht ganz gleichmässig, denn der Uebergang der kleinen Friktionsrollen von einer Schiene zur anderen veranlasst Stösse, die ein Zittern bewirken. Die Führung ist also jetzt wohl besser, doch lange nicht vollkommen gut. Zur Messung der 6 Radumgänge liess ich an den Endpunkten starke zugespitzte Pfähle ca. 2 Metres tief in das Erdreich einrammen. Da die Temperatur des Bodens in dieser Tiefe constant ist, so erhalte ich dadurch 2 Punkte,

die Nullpunkte der Scalen, über den Axen der Pfähle, deren Abstand unabhängig ist von äusserem Temperaturwechsel. *)

Auf beiden Pfählen sind centrisc Messapparate aufgestellt, die es ermöglichen, die Unterschiede des Radindexstriches von den beiden Nullpunkten der Messapparate je nach 6 Radumgängen zu bestimmen. In Ermangelung von Comparatoren wie sie *Repsold* bei den Massvergleichen anwendet, sind 2 Supports benutzt, von welchen jeder ein zur Richtung der Bahn senkrechtes Fernrohr-Mikroskop trägt. Die Supportschraube parallel zur Bahn ist zu den Mikrometermessungen verwendet. Eine Scala giebt die ganzen Schraubenumgänge, der in 100 Theile getheilte Schraubenkopf die genaue Einstellung. Da der Indexstrich des Rades mit seinem Endpunkt den Wendepunkt der Cyclois beschreibt, so ist eine sehr scharfe Einstellung möglich. Obschon die Messungen an diesem provisorischen Apparate keine Ansprüche auf möglichste Genauigkeit machen können, so erfüllen sie doch den Zweck.

Der Wagen, der das Rad leitet, kann, ohne ihn umzuwenden, zwischen den Nullpunkten hin- und zurück bewegt werden.

An diesem Apparate soll nun der mittlere Fehler der einmaligen Befahrung der Bahn und die Ausdehnung des kupfernen Radreifens für 1° R. aus wiederholten Messungen abgeleitet werden.

Wir wollen die Reduktionsformeln hiezu entwickeln, um Einsicht in den Vorgang zu geben.

*) Will man diess streng erreichen, so müssen die Pfeiler tiefer fundirt werden und von unten auf getrennt vom Erdreich sein. Der Zwischenraum kann dann mit schlechten Wärmeleitern, die keinen Druck üben — Stroh, oder Sägespähne oder Baumwolle — ausgefüllt werden. Es versteht sich von selbst, dass die Pfeiler hinreichend stark im Verhältniss zu ihrer Höhe ausgeführt und vor Sonnenschein geschützt werden müssen. Bei Benutzung eines solchen invariablen Abstandes folgt aus je zwei Messungen des Abstandes der Werth und die absolute Längenausdehnung des Masses für die Temperaturdifferenz der beiden Messungen. Aus einer grössern Anzahl von Messungen lassen sich dann die wahrscheinlichsten Werthe der Bestimmungen ableiten. Ueberhaupt ist zu Ausdehnungsbestimmungen ein grosser Abstand der constanten Punkte vortheilhafter, als ein Abstand gleich dem des Masses, dessen Ausdehnung bestimmt werden soll, weil Aenderungen in den als constant angenommenen Punkten ein im Verhältniss der Länge kleinerer Theil des Ganzen werden. Nach meiner Meinung sollte daher die Ausdehnung der Messstangen für eine Basis-messung aus einem Multiplum ihrer Längen bestimmt werden. (S. später)

Sei

A

der Abstand der Nullpunkte der Stationen I. und II. bei der Temperatur Null Grad in Millimeter,

a

die Vergrösserung von A , durch Einstellen des Fernrohr-Mikroskopes auf den Indexstrich des Rades in seinem Wendepunkt, in Support-Umgängen gemessen, auf Station I.

a'

dasselbe auf Station II.

Sei ferner

m

der Factor, mit dem die Messung a multiplicirt werden muss, um sie in Millimeter zu verwandeln;

m'

ein ähnlicher Factor für die Station II.;

t_R

die Lufttemperatur auf Station I.;

t'_R

die Lufttemperatur auf Station II.

Nennen wir die Beobachtungen der Reihe nach

auf Station I.	auf Station II.
a_1 und t_1	a'_2 und t'_2
$a_3 = t_3$	$a'_4 = t'_4$
$a_5 = t_5$	$a'_6 = t'_6$
$\vdots$	$\vdots$
$a_n = t_n$	$a'_{n+1} = t'_{n+1}$

so treffen alle ungeraden Zahlen auf Station I., alle geraden auf Station II., wodurch die geraden Zahlen der Beobachtung auf Station I. und die ungeraden auf Station II. ausfallen.

Setzen wir

U

die Länge des Radumfanges in Millimeter bei der Temperatur 0° ,

U' und U''

bei anderen Temperaturen, so ist da A sehr nahe in der Länge von $6U$ hergestellt wurde, wenn das Rad von Station I. nach Station II. geführt und auf beiden Stationen beobachtet wurde für

$$\frac{t_1 + t'_2}{2} \dots 6U' = A^{mm} + a_1 m + a'_2 m' \dots (1)$$

und nachdem das Rad wieder nach Station II. zurückgeführt und beobachtet ist, für

$$\frac{t'_2 + t_3}{2} \dots 6U'' = A^{mm} + a'_2 m + a_3 m \dots (1')$$

Bezeichnet

l

die Länge von 6 Radumgängen ($6U$) bei der Temperatur 0° ,

Δ

die Längenausdehnung des Metalles, aus welchem das Rad besteht, für 1° R. und die Längeneinheit, so hat man

$$\frac{t_1 + t'_2}{2} \dots 6U' = l \left(1 + \Delta \frac{(t_1 + t'_2)}{2} \right) \dots (2)$$

$$\frac{t'_2 + t_3}{2} \dots 6U'' = l \left(1 + \Delta \frac{(t'_2 + t_3)}{2} \right) \dots (2')$$

Wird nun aus (1) und (2) $6U'$

aus (1') und (2')

$6U''$ eliminiert,

so findet sich

$$l \left(1 + \Delta \frac{(t_1 + t'_2)}{2} \right) = A + a_1 m + a'_2 m'$$

$$l \left(1 + \Delta \frac{(t'_2 + t_3)}{2} \right) = A + a'_2 m' + a_3 m$$

$$l \left(1 + \Delta \frac{(t_3 + t'_4)}{2} \right) = A + a_3 m + a'_4 m'$$

$$l \left(1 + \Delta \frac{(t'_4 + t_5)}{2} \right) = A + a'_4 m + a_5 m$$

Wenn daher A bekannt ist, so ergibt sich aus je 2 solcher Gleichungen, eine Bestimmung von Δ und von l .

Um zu sehen, wie weit die Bestimmungen bei Bewegung des Rades von I. nach II. mit denen von II. nach I. übereinstimmen, wird es zweckmässig sein, jede Beobachtungsreihe für sich zu berechnen. In jeder Reihe wird man jede einzelne Beobachtung vergleichen mit dem Mittelwerthe aus der ganzen Reihe.

Wir haben sonach

von I. nach II.

$$\left. \begin{aligned} l \left(1 + \Delta \frac{(t_1 + t'_2)}{2} \right) &= A + a_1 m + a'_2 m' \\ l \left(1 + \Delta \frac{(t_3 + t'_4)}{2} \right) &= A + a_3 m + a'_4 m' \\ l (1 + \Delta (t_\mu)) &= A + a_\mu m + a'_\mu m' \end{aligned} \right\} \dots (3)$$

von II. nach I.

$$\left. \begin{aligned} l' \left(1 + \Delta' \frac{(t'_2 + t_3)}{2} \right) &= A + a'_2 m' + a_3 m \\ l' \left(1 + \Delta' \frac{(t'_4 + t_5)}{2} \right) &= A + a'_4 m' + a_5 m \\ l' (1 + \Delta' (t'_\mu)) &= A + m' a'_\mu + m a_\mu \end{aligned} \right\} \dots (3')$$

Zieht man jede Beobachtung vom Mittelwerthe (μ) aus der ganzen Reihe ab, so eliminirt sich A und man findet:

$$\left. \begin{aligned} l \Delta \left(t_\mu - \frac{(t_1 + t'_2)}{2} \right) &= (a_\mu - a_1) + m' (a'_\mu - a'_2) \\ l \Delta \left(t_\mu - \frac{(t_3 + t'_4)}{2} \right) &= (a_\mu - a_3) + m' (a'_\mu - a'_4) \end{aligned} \right\} (4)$$

Setzen wir der Kürze wegen dafür

$$\left. \begin{aligned} l \Delta (t_{1.2}) &= a_{1.2} \\ l \Delta (t_{3.4}) &= a_{3.4} \end{aligned} \right\} \dots (5)$$

oder

$$\left. \begin{aligned} l \Delta (t_{1.2}) - a_{1.2} &= 0 \\ l \Delta (t_{3.4}) - a_{1.2} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (5')$$

so wird der wahrscheinlichste Werth für $(l\Delta)_w$ oder die ganze Längenausdehnung

$$(l\Delta)_w = \frac{a_{1.2} t_{1.2} + a_{3.4} t_{3.4} + a_{5.6} t_{5.6} + \dots}{(t_{1.2})^2 + (t_{3.4})^2 + (t_{5.6})^2 + \dots} \dots (6)$$

Rechnen wir mit $(l\Delta)_w$ und den Temperaturdifferenzen in den Gleichungen (5'):

$$\left. \begin{aligned} l \Delta_w (t_{1.2}) &= M_1 \\ l \Delta_w (t_{3.4}) &= M_2 \end{aligned} \right\}$$

so ist

$$\left. \begin{aligned} M_1 - a_{1.2} &= F_1 \\ M_2 - a_{3.4} &= F_2 \\ &\vdots \\ M'_\nu - a'_\nu &= F'_\nu \end{aligned} \right\} \dots (7)$$

also der mittlere Fehler jeder Befahrung

$$F_\mu = \sqrt{\frac{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 \dots F_\nu^2}{\nu - 1}} \dots (8)$$

Die Mittelwerthe der Reihe I. nach II. in (3) geben

$$l + l\Delta(t_\mu) = A + a_\mu$$

woraus die Länge l bei der Temperatur $= 0$ wird

$$l = A + a_\mu - l\Delta t_\mu \dots\dots\dots (9)$$

Die Reihe von II. nach I. giebt

$$l' = A + a'_\mu - l'\Delta t'_\mu$$

Es folgt also daraus, da A als bekannt vorausgesetzt ist, der Umfang des Rades bei 0°

$$U^0 = \frac{l + l'}{12} \dots\dots\dots (10)$$

und

$$\Delta_w = \frac{l\Delta_w}{l} \dots\dots\dots (11)$$

Die angestellten Beobachtungen sind folgende:

Von I. nach II.			Von II. nach I.		
	t_R	a		t'_R	a'
1	14,8	+14,195	2	15,0	-25,981
3	15,1	14,173	4	15,6	25,960
5	15,5	14,111	6	15,7	25,458
7	15,7	13,771			
9	16,1	13,849	10	16,1	25,098
13	17,5	13,863	12	17,8	25,059
			14	17,9	24,542
17	18,3	13,057	16	18,8	23,493
19	18,8	12,782	18	18,9	23,491
21	18,9	12,720	20	19,1	23,344
23	19,1	12,523	22	19,6	22,970
25	19,5	12,538	24	19,8	22,890
27	19,6	12,440	26	19,8	22,854
29	21,5	12,202	30	21,9	22,115
31	22,0	12,132	32	22,2	21,788
33	22,2	11,806	34	22,3	21,462
35	22,2	11,518	36	22,0	21,104
37	21,9	11,206	38	21,8	20,821
39	21,5	10,894	40	21,5	20,551
43	15,7	11,127	42	15,8	22,117
45	15,9	11,076	44	15,9	22,137
47	16,1	11,110	46	16,1	22,108
49	16,4	11,110	48	16,4	22,114
51	16,7	11,150	50	16,7	22,132
53	16,9	11,104	52	16,8	22,103
55	18,5	11,501	54	18,8	21,881
57	18,8	11,370	56	19,0	21,908
59	19,0	11,289	58	19,1	21,739
61	19,9	11,240	60	19,8	21,578
63	20,2	11,096	62	20,5	21,418
65	20,5	10,911	64	20,5	21,204

Jedes a und a' ist das Mittel aus 6 Ablesungen.

Wir wollen jetzt die Resultate der Reduction dieser Beobachtungen hier zusammen stellen.

	Von I. nach II.	Von II. nach I.
	$m = 1.340$	$m' = 1.420$
Befahrungen ..	26	27
(3) t_μ	18 ⁰⁷	18 ⁰⁷
(3) a_μ	-15 ^{mm} 901	-16 ^{mm} 09
(6) $l\Delta_w$	0 . 39086	0 . 34655
A	17406 . 31	
(9) $a_\mu - l\Delta t_\mu$..	-23 . 21	-22 . 58
l	17383 . 10	17383 . 73
(10) U	2897 . 18	2897 . 29
U	2897 . 23	
(11) Δ_w	0 . 000022485	0 . 000019936
Δ_w im Mittel..	0 . 00002121	
Ausdehnung, Kupfer, ist $=$	0 . 00002150	
(8) F_μ	$\pm 0^{\text{mm}}246$	$\pm 0^{\text{mm}}348$
Mittel	$\pm 0^{\text{mm}}297$	
Der ganzen Länge	$70\frac{1}{581}$	$68\frac{1}{540}$ $70\frac{1}{528}$

Allgemein ist also

$$U = 2897^{\text{mm}}23 + t_R(0.0623) \\ [8.79432]$$

Da sich $t_\mu = t'_\mu = 18.70$ gefunden hat, so sollte auch $a_\mu = a'_\mu$ sein.

$$\text{Allein es ist } a_\mu = -15^{\text{mm}}90 \\ a'_\mu = -16 . 09$$

Diese Abweichung der beiden Reihen ist nahezu so gross, als der Fehler der einzelnen Beobachtung, d. h. er ist 5 mal grösser als er zu erwarten wäre, wenn der Apparat keine constanten Fehler erzeugte. Es sind also noch constante Fehlerquellen vorhanden. Bei der mangelhaften Führung des Rades kann dies nicht befremden. Der Grund kann auch darin liegen, dass die am Quecksilberthermometer notirten Temperaturen nicht der wirklichen Temperatur des Rades entsprachen, da das Rad offenbar später als das Thermometer die Temperatur annimmt. Eine Unsicherheit von $\frac{1}{2}$ Grad würde den ganzen constanten Fehler erklären. Man wird also auch hier Metallthermometer von der Dicke des Radreifses in Anwendung zu bringen haben, wie ja auch *Bessel* bei seiner Basismessung Metallthermometer angewendet hat.

Den mittleren Fehler der einmaligen Befahrung wollen wir vergleichen mit demjenigen Theil des Fehlers der Basis-messung von *Bessel*, der von der Operation des Messens sich ergab. Dieser ist (pag. 55)

$$\pm 1^m 657 = 3^m 38.$$

Seine Basis beträgt

$$935 \text{ Toisen} = 1822^m 3.$$

Sie ist also 104,83 mal länger als die befahrene Linie von 17^m383.

Da nun der zu erwartende mittlere Fehler *coet. par.* wie die $\sqrt{\quad}$ aus der Vergrößerung zunimmt, so wäre mein Fehler bei der Länge der *Bessel'schen* Grundlinie

$$= \sqrt{104.83} = 10.249 (0,297) = 3^m 044$$

der *Bessel'sche* ist $\quad \quad \quad = 3.738,$

folglich hat die Abwicklung einen kleineren mittleren Fehler ergeben, als die Messung mittelst Glaskeil.

Wenn man beachtet, dass dieses Resultat mit mangelhaften Hilfsmitteln erlangt wurde, so wird der Vorzug der Methode des Messens durch Abwicklung noch einleuchtender.

Wir haben die Längenausdehnung des Kupferreifes für 1° und die Längeneinheit gefunden

$$0,0000212$$

Man nimmt an

$$0,0000215.$$

Diese Uebereinstimmung ist aber erlangt mit Temperatur-differenzen, die im Maximo nur

$$\pm 3^{\circ} 6 \text{ R.}$$

erreichen.

Es eignet sich sonach die Methode ganz vorzüglich zu Ausdehnungsbestimmungen.

Dieser günstige Erfolg hat mich veranlasst, einen vollkommeneren Apparat ausführen zu lassen. Das Messrad hat einen dicken gehärteten Stahlreif und ist vollkommen cylindrisch. Es wird geleitet durch ein vorausgehendes und ein nachfolgendes Rad auf derselben Schiene. Die Leiträder fassen aber die Schiene von beiden Seiten. Auch Metall-thermometer von der Dicke des Radreifes sind in Arbeit.

Mit diesen neuen Apparaten hoffe ich, die constanten Fehler in viel engere Grenzen einzuschliessen.

Erst wenn das erreicht ist, werde ich an den 2. Theil des Problemes gehen und untersuchen, ob sich auch der Verlauf einer doppelt gekrümmten Linie mit der zur Reduction auf einen grössten Kreis erforderlichen Genauigkeit ermitteln lässt.

München, 1868 November 19. *v. Steinheil.*

Beobachtungen des Merkurs-Durchganges am 4. November 1868 auf der Sternwarte zu Lund.

Der Himmel war des Morgens ganz trübe und auch später wurde die Sonne nur bisweilen durch die Wolken sichtbar. Einige Minuten vor dem Austritte des Merkurs wurde die Sonne klar und blieb so, bis Mercur halb ausgetreten war. Ich beobachtete:

$$\text{Durchmesser des Merkurs} = 8'' 81;$$

aber diese Bestimmung hängt nur von einer doppelten Einstellung ab.

$$\begin{array}{ll} \text{Mittlere Zeit Lund: } 21^h 52^m 43^s & \text{Mercur berührt noch nicht den Sonnenrand.} \\ \text{,, , , , } 21 \text{ } 52 \text{ } 51,6 & \text{Innere Berührung.} \end{array}$$

Ich beobachtete am 9zölligen Refractor mit 320maliger Vergrößerung. Die Bilder waren sehr ruhig und die innere Berührung geschah in der Weise, dass der Lichtfaden zwischen den Rändern des Merkurs und der Sonne erst dann brach, als seine Breite verschwindend klein geworden war. Es zeigte sich keine Spur einer Verdrehung der Bilder oder des von anderen Beobachtern erwähnten schwarzen Tropfens. Zur Zeit der zweiten Berührung war die Sonne von Wolken verdeckt.

Lund, 1868 December 7.

N. Dunér.