es auch in der That des Luftwiderstandes wegen sein muss. Wenn auch die Zahl dieser Beobachtungen noch zu gering ist, um weitere Schlüsse darauf bauen zu können, zeigen sie doch, dass es geübten Beobachtern möglich ist, auch dieses

Element mit Sicherheit zu bestimmen, was wohl beherzigt werden sollte, da die Kenntniss desselben zu manchen höchst interessanten Untersuchungen Veranlassung bieten würde.

Wien, 1868 Juli 16. Dr. *Edmund Weiss*.

Bemerkungen über das Problem der drei Körper. Von Herrn *R. Radau* in Paris.

Ich erlaube mir, Ihnen im Folgenden einige Resultate aus einer Arbeit mitzuthellen, die, wie ich hoffe, binnen Kurzem gedruckt sein wird. Bekanntlich haben die Gleichungen für die Bewegung eines freien Systems eine sehr einfache Form, wenn man die Coordinaten auf einen festen Punkt oder auf den Schwerpunkt des Systems bezieht, dasselbe gilt von dem Integral der lebendigen Kraft und von den drei Flächensätzen. Diese Einfachheit geht verloren, wenn man die Anzahl der Gleichungen dadurch reducirt, dass man entweder alle Körper auf einen derselben bezieht, oder die barycentrischen Coordinaten eines Körpers mit Hülfe der zwischen diesen Coordinaten bestehenden Relationen eliminirt. Es giebt aber ein Mittel, dieselbe Reduction zu bewerkstelligen, ohne dass dabei die einfache Form der Differentialgleichungen und der Integrale geopfert wird, und dieses Mittel liefert die orthogonale Substitution. Hierin liegt das Princip der Methode, deren sich *Jacobi* in seiner Abhandlung über die Elimination der Knoten (1842) bedient.

Die orthogonale Substitution ist eine lineare Transformation, deren Umkehrung dadurch erhalten wird, dass man das Quadrat der Coefficienten um seine Diagonale dreht, wodurch alle Linien Columnen werden, und umgekehrt. Wendet man dieselbe orthogonale Substitution auf zwei Systeme $x_0, x_1, \dots, x_n$ und $x'_0, x'_1, \dots, x'_n$ an, welche dadurch in $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$ und $\xi'_0, \xi'_1, \dots, \xi'_n$ übergehen, so bleibt die Form der Summe $x_0 x'_0 + x_1 x'_1 + \dots$ ungeändert. Ich will das Product xx' symbolisch durch $((x))$ bezeichnen; es wird also $\Sigma ((x)) = \Sigma ((\xi))$.

Hier bedeuten x und x' irgend welche Functionen, welche derselben Substitution unterworfen sind, man kann also statt x auch dx oder die Characteristik D_x setzen; ferner kann man statt des Products xx' eine Summe ähnlicher Producte einführen. Es geht daraus hervor, dass, wenn dieselbe Substitution auf die drei Coordinaten x, y, z angewandt wird, das Symbol $((x))$ irgend einen der Ausdrücke:

$$x^2, xy, x^2 + y^2, x^2 + y^2 + z^2, dx^2 + dy^2 + dz^2, xdy - ydx, dx\delta x' - dx'\delta x, d^2x.\delta x,$$

u. s. w. bedeuten kann, d. h. das Quadrat einer Entfernung, das Quadrat einer Geschwindigkeit, eine Arealgeschwindigkeit, ein Product aus Differentialen und Variationen der Coordinaten, und dergl. Schreibt man endlich $\sqrt{m}x$ statt x , und $\sqrt{\mu}\xi$ statt ξ , so wird die symbolische Gleichung: $\Sigma m((x)) = \Sigma \mu((\xi))$, und sie bedeutet, dass die orthogonale Substitution gewisse Productensummen ungeändert lässt wie z. B. die Trägheitsmomente — die lebendige Kraft des Systems — seine Arealbewegung — die Variation der Kräftefunction, $\delta U = \Sigma m \frac{d^2x}{dt^2} \cdot \delta x$ — die Variation der Function $H = T - U$, welche $\delta H = \Sigma m \left(\frac{dx}{dt} \delta x' - \frac{dx'}{dt} \delta x \right)$ ist, u. s. w. Hieraus folgt, dass die Form der Differentialgleichungen und diejenige der Integrale der lebendigen Kraft und der Flächensätze ebenfalls ungeändert bleiben, wenn man die Coordinaten durch eine orthogonale Substitution transformirt.

Wir können nun annehmen, dass ξ_0 die Coordinate X des Schwerpunkts der $n+1$ Massen $m_0, m_1, \dots, m_n$ bedeutet, und μ_0 die Gesamtmasse M des Systemes; dann wird

$$S = \sum_0^n m_i((x_i)) - M((X)) = \sum_1^n \mu_i((\xi_i)).$$

Die Summe S enthält jetzt nur n Glieder anstatt $n+1$. Sie ist der ursprünglichen Summe gleich, wenn wir unter S die Variation der Kräftefunction verstehen, weil bekanntlich $d^2X = 0$, und sie unterscheidet sich von der ursprünglichen Summe nur durch eine Constante, wenn S die lebendige Kraft oder die Arealgeschwindigkeit bedeutet, weil dann $((X))$ eine constante Grösse ist. Es wird also die Anzahl der Variablen und der Differentialgleichungen von $3n+3$ auf $3n$ gebracht, ohne dass die Form der Gleichungen oder diejenige der bekannten Integrale darunter leidet.

Die Coefficienten der allgemeinen orthogonalen Substitution lassen sich, wie *Cayley* gezeigt hat, als Determinanten

einer bestimmten Anzahl willkürlicher Grössen darstellen, zwischen denen gewisse Relationen stattfinden. Die hier angewandte Substitution ist zwar vom Grade $n+1$, wird aber in ihrer Allgemeinheit dadurch beschränkt, dass ξ_0 die Coordinate des Schwerpunkts werden soll. Es lässt sich nun zeigen, dass die Coefficienten dieser speciellen Substitution vom Grade $n+1$ sich aus den Coefficienten der allgemeinen orthogonalen Substitution vom Grade n nach einem einfachen Gesetz herleiten. So kann man z. B. die Coefficienten der speciellen ternären Substitution, welche dem Problem der drei Körper zukommt, aus den Coefficienten der allgemeinen binären Substitution, d. h. aus dem sinus und cosinus eines willkürlichen Winkels zusammensetzen. Für den Fall von drei Körpern enthält also die Transfor-

$$S = \frac{1}{M} \sum_0^n m_i m_h ((x_i - x_h)) = \sum_0^n m_i ((x_i)) - M((X)) = \sum_0^n m_i ((x_i - X)).$$

Die Summe S kann also bedeuten: die lebendige Kraft oder die Arealbewegung um den Schwerpunkt, die Variation der Kräftefunction um den Schwerpunkt u. s. w. Sie kann überdiess durch die Differenzen der Coordinaten ausgedrückt werden, wodurch man eine bequeme Form der Integrale für den Fall erhält, dass der Ursprung der Coordinaten in einem der Körper angenommen wird. Es ist nun leicht, S auf n Glieder zu reduciren, indem man die Coordinaten auf einen veränderlichen Ursprung bezieht, der durch die Gleichung $\sqrt{m_0} x_0 + \sqrt{M} X = 0$ bestimmt wird. Dann hebt sich nämlich $m_0 ((x_0))$ gegen $M((X))$ fort, und es bleibt $S = \sum_1^n m_i ((x_i))$.

Der neue Ursprung ist der Schwerpunkt der Massen $\sqrt{m_0}$ und $\sqrt{M}$, von denen die erstere an die Stelle von m_0 tritt, während man sich die zweite im Schwerpunkt des Systems denkt; M ist, wie bereits gesagt, die Gesamtmasse des Systems. Bezeichnen wir die neuen Coordinaten durch ξ , so ist $-\sqrt{\frac{m_0}{M}} \xi_0$ die Coordinate des Schwerpunkts in Bezug auf den neuen Ursprung, also, wenn x und X wieder die absoluten Coordinaten sind,

$$x_i - X = \xi_i + \sqrt{\frac{m_0}{M}} \xi_0,$$

und

$$(\sqrt{M m_0} + m_0) \xi_0 + m_1 \xi_1 + m_2 \xi_2 + \dots = 0.$$

$$M_i = \sum_0^i m_h, \quad M_0 = m_0, \quad M_n = M; \quad M_i X_i = \sum_0^i m_h x_h, \quad X_0 = x_0, \quad X_n = X.$$

mation nur eine willkürliche Grösse. Ich zähle die Massen $\mu_1, \mu_2, \dots$ nicht als willkürliche Grössen mit, da man dieselben offenbar der Einheit gleich setzen kann, ohne dass die Allgemeinheit der Transformation dadurch beeinträchtigt wird; man bestimmt eben nur das Product $\sqrt{\mu} \xi$ oder $\mu \xi^2$, die Massen μ dienen blos dazu, die Anschauung zu erleichtern.

Ich will nun zeigen, dass es Specialfälle der in Rede stehenden Transformation giebt, die sich direct auf sehr einfache Weise behandeln lassen, und aus denen man sogar die allgemeinere Transformation ableiten kann. Man beweist ohne Mühe (indem man z. B. das Symbol $((x))$ als das Quadrat x^2 oder als das Product xy auffasst) die identische Gleichung:

Da sich ξ_0 durch die übrigen Coordinaten ξ ausdrückt, so haben wir nur $3n$ unabhängige Variable und nur $3n$ Differentialgleichungen, aber diese Gleichungen haben die kanonische Form, weil die Function S ungeändert geblieben ist; dasselbe gilt von dem Integral der lebendigen Kraft und von den Flächensätzen. Ich nenne deshalb den neuen Ursprung den kanonischen Punkt.

In jedem freien System von $n+1$ Körpern giebt es also $n+1$ Punkte, um welche sich je n Körper so bewegen, als wenn diese Punkte fest wären. In derselben Art bewegen sich alle $n+1$ Körper um den Schwerpunkt des Systems. Die kanonischen Punkte findet man, indem man statt aller Massen ihre Quadratwurzel setzt, in den Schwerpunkt aber die Quadratwurzel aus der Gesamtmasse verlegt, und zwischen $\sqrt{M}$ und jedem $\sqrt{m_i}$ den Schwerpunkt sucht. Für das Sonnensystem ist $\sqrt{M} = 1,0067$, wenn $m_0 = 1$ die Sonnenmasse bedeutet; es liegt also der kanonische Punkt fast genau in der Mitte zwischen dem Mittelpunkt der Sonne und dem allgemeinen Schwerpunkt, und bleibt daher beständig im Innern des Sonnenkörpers.

Eine andere Transformation des symbolischen Ausdrucks S erhält man so. Sei M_i die Summe der Massen $m_0, m_1, \dots$ bis m_i , und X die Coordinate ihres Schwerpunkts, also

Dann ist, wie leicht zu beweisen,

$$S = \sum_1^n m_i \frac{M_{i-1}}{M_i} ((x_i - X_{i-1})).$$

Man erhält also auch alle Resultate der oben erwähnten Substitution, wenn man den Körper m_1 auf m_0 , den Körper m_2 auf den Schwerpunkt von m_0 und m_1 , überhaupt jeden neu hinzukommenden auf den Schwerpunkt des vorhergehenden bezieht.

Man kann also $\xi_i = x_i - X_{i-1}$ und $\mu_i = m_i \frac{M_{i-1}}{M_i}$ setzen. Es ergeben sich hieraus die linearen Transformationsgleichungen

$$x_0 - X = -\sum_1^n \frac{m_h}{M_h} \xi_h, \quad x_i - X = \xi_i - \sum_1^n \frac{m_h}{M_h} \xi_h.$$

Hat man es mit drei Körpern zu thun, so kann man also den zweiten mit der Masse $\mu_1 = \frac{m_0 m_1}{m_0 + m_1}$ auf den ersten (m_0), und den dritten mit der Masse $\mu_2 = \frac{m_2(m_0 + m_1)}{m_0 + m_1 + m_2}$ auf den Schwerpunkt der beiden ersten beziehen. Ist m_0 die Sonne, so weichen die Massen μ_1 und μ_2 nur wenig von m_1 und m_2 ab; ist m_0 die Erde, m_1 der Mond und m_2 die Sonne, so weicht μ_1 wieder nur wenig von m_1 ab, dagegen wird die Masse μ_2 der fingirten Sonne jetzt nicht nahezu $= m_2$, sondern nahezu $= m_0$, d. h. gleich der Erdmasse. Dies ist die Transformation, welche Herr Weiler

für die Theorie des Mondes adoptirt. Sie ist im Grunde genommen identisch mit der folgenden, von *Jacobi* angegebenen. Da $x_1 - X_1 = \frac{m_0}{m_0 + m_1} (x_1 - x_0)$ ist, so kann man statt der obigen Werthe von ξ_1 und μ_1 , nämlich anstatt $\xi_1 = x_1 - x_0$ und $\mu_1 = \frac{m_0 m_1}{m_0 + m_1}$, auch die folgenden: $\xi_1 = x_1 - X_1$ und $\mu_1 = \frac{m_1(m_0 + m_1)}{m_0}$ setzen, da ja das Product $\mu_1 \xi_1^2$ dadurch nicht geändert wird, d. h. man kann auch die fingirte Masse μ_1 auf den Schwerpunkt der Körper m_0 und m_1 beziehen, also beide Massen μ_2 und μ_1 um diesen Punkt sich bewegen lassen, wie diess *Jacobi* (§ II., № 15 in seiner Abhandlung) vorschlägt. Man könnte ebenso gut $\mu_1 = 1$ setzen, wie bereits oben bemerkt; der Werth von μ ist hier unwesentlich. Man könnte endlich die Massen m_0 und m_1 beibehalten und die drei Körper m_0 , m_1 , μ_2 auf den Schwerpunkt der beiden ersten beziehen, denn

$$S = m_0 ((x_0 - X_1)) + m_1 ((x_1 - X_1)) + \mu_2 ((\xi_2)).$$

Transformirt man jetzt diese Variablen ξ_1 , ξ_2 durch eine binäre Substitution mit Hülfe des Winkels φ , so erhält man die allgemeine Transformation, in welcher φ die willkürliche Constante vorstellt. Setzen wir $m_0 = 1$, $\tan \theta = \sqrt{\frac{m_1 m_2}{M}}$, so lässt sich die allgemeine Transformation auf die Form bringen:

$$\begin{aligned} x_0 - x_1 &= \xi_1 + \frac{m_2}{1 + m_2} \left(1 - \frac{\tan \varphi}{\tan \theta}\right) \xi_2, & \mu_1 &= \frac{m_1}{1 + m_1} \sec^2(\theta - \varphi) \\ x_0 - x_2 &= \xi_2 + \frac{m_1}{1 + m_1} \left(1 - \frac{\tan(\theta - \varphi)}{\tan \theta}\right) \xi_1, & \mu_2 &= \frac{m_2}{1 + m_2} \sec^2 \varphi, \end{aligned}$$

wo der Winkel φ zwischen Null und ξ liegen muss, wenn die zweiten Glieder im Verhältniss zu den ersten sehr klein werden sollen. Für die Mondtheorie müsste man $\varphi = 0$ oder $= \theta$ nehmen, wodurch wir wieder auf unsere frühere einfache Substitution zurückkommen, d. h. auf die von Herrn Weiler angewandte. Kommt zu den drei Körpern noch ein vierter m_3 , so nehmen wir $\mu_3 = \frac{m_3(m_0 + m_1 + m_2)}{m_0 + m_1 + m_2 + m_3}$ und beziehen μ_3 auf den Schwerpunkt der drei ersten Körper u. s. w. Dabei bleiben Massen und Coordinaten der drei ersten Körper dieselben, wie vorher. Alle folgenden Massen μ weichen jetzt sehr wenig von den entsprechenden Planetenmassen ab, und der Ursprung ihrer Coordinaten fällt ganz in die Nähe des allgemeinen Schwerpunkts, d. h. also in die Nähe der Sonnenoberfläche.

Durch eine der angegebenen Substitutionen reducirt sich also S auf eine Summe von n Gliedern, und das Problem der $n+1$ Körper auf ein Problem der Bewegung von n Körper um ein fixes Centrum, denn die Kräfte-

function lässt sich durch die Radien Vektoren und die gegenseitigen Abstände der Massen μ ausdrücken. Die unveränderliche Ebene des transformirten Problems ist übrigens dieselbe, welche zum Schwerpunkt des ursprünglichen Systems gehört, wie aus der Gleichung $S = \sum_0^n m_i ((x_i - X)) = \sum \mu_i ((\xi_i))$ hervorgeht, wo S die Arealbewegung bedeuten kann.

Führt man nun Polarcoordinaten ein: die Radien Vektoren ρ , ihre Abstände v vom Knoten (vom Durchschnitt ihrer Bahn mit der unveränderlichen Ebene), die Knotenlängen ϑ und die Neigungen λ , bezeichnet man ferner durch f das Product aus der Masse in die doppelte Arealgeschwindigkeit, und setzt man endlich $m \frac{d\rho}{dt} = \rho'$, so finden folgende Beziehungen statt. Die Geschwindigkeit, oder vielmehr die Bewegungsgrösse jedes Körpers lässt sich zerlegen (parallel und senkrecht zum Radius Vector) in die beiden Componenten ρ' und $\frac{f}{\rho}$, die lebendige Kraft wird also

$$2T = \sum \frac{1}{\mu} \left(\rho'^2 + \frac{f^2}{\rho^2} \right).$$

Bezeichnet man durch H die Differenz $T-U$, so findet man schliesslich $\frac{d\rho}{dt} = \frac{dH}{d\rho}$, $\frac{d\rho'}{dt} = -\frac{dH}{d\rho}$. Es sind also die Radien Vektoren und die Radialgeschwindigkeiten conjugirte kanonische Variablen. Noch findet man $\frac{df}{dt} = -\frac{dH}{dv}$, und $\frac{dv}{dt} = \frac{dT}{df} + \frac{\cos \lambda}{f} \frac{dU}{d \cos \lambda}$. Für den Fall von drei Körpern wird hieraus $\frac{dv}{dt} = \frac{dH}{df}$. In diesem Fall zeigen nämlich die Flächensätze, dass die Resultante K zweier Kräfte f_1 und f_2 , die man sich senkrecht zu den Bahnebenen der Körper μ_1 und μ_2 denkt, ihrer Grösse und Richtung nach constant ist; sie stellt die Normale der unveränderlichen Ebene vor, und wir können sie als die Diagonale eines Parallelogramms betrachten, dessen Seiten f_1 und f_2 senkrecht auf den Bahnebenen stehen. Hieraus folgt, dass die Bahnen sich beständig in der unveränderlichen Ebene schneiden, und dass sich f_1 und f_2 durch die Neigungen λ_1 und λ_2 ausdrücken lassen. Wir haben $f_1 \sin \lambda_1 + f_2 \sin \lambda_2 = 0$ und $f_1 \cos \lambda_1 + f_2 \cos \lambda_2 = K$. Man kann daher λ_1 und λ_2 durch f_1 und f_2 ersetzen. Die Kräftefunction enthält ausser den Radien Vektoren nur die Winkel $v_1, v_2, \lambda_1 - \lambda_2$, und es ist $f_1^2 + f_2^2 + 2f_1 f_2 \cos(\lambda_1 - \lambda_2) = K^2$. Die lebendige Kraft enthält nur die Grössen ρ, ρ' und f . Es lässt sich also H durch die acht Variablen $\rho_1, \rho_2, \rho'_1, \rho'_2, v_1, v_2, f_1, f_2$ ausdrücken, und das Problem der drei Körper reducirt sich auf das kanonische System:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{dH}{d\rho}, \quad \frac{d\rho'}{dt} = -\frac{dH}{d\rho}, \quad \frac{dv}{dt} = \frac{dH}{df}, \quad \frac{df}{dt} = -\frac{dH}{dv},$$

wo man den Variablen nacheinander die Indices 1 und 2 zu geben hat. Lässt man dt fort, so bleiben sieben Gleichungen der ersten Ordnung, von denen man ein Integral kennt, nämlich $H = \text{const.}$ Also sind es eigentlich nur sechs

Gleichungen der ersten Ordnung. Diese Reduction auf sechs Gleichungen erster Ordnung ist übrigens schon in *Jacobi's* Resultaten (freilich nicht explicite) enthalten. Den Knoten $\mathfrak{J}$ findet man nachträglich durch eine Quadratur.

Dadurch, dass ich die Flächen f statt der Neigungen λ einführe, geht die letzte Spur der unveränderlichen Ebene aus den Gleichungen heraus; sie enthalten nur noch die Bewegung in den zwei Bahnebenen. Man kann aber auch anders verfahren, nämlich anstatt des Knotens der Bahnen den Knoten der Ebene der drei Körper eliminiren. Projicirt man das Parallelogramm f_1, f_2, K auf die Ebene der Radien ρ_1, ρ_2 (welche die Ebene der drei Körper ist, wenn wir unsere einfachen Substitutionen anwenden), so ist die Projection wieder ein Parallelogramm, dessen Seiten und Diagonale resp. senkrecht auf ρ_1, ρ_2 und auf dem Durchschnitt der Körperebene mit der unveränderlichen Ebene, d. h. auf dem Knoten der Körperebene stehen. Die Winkel in diesem Parallelogramm sind also gleich den Winkeln u_1, u_2 , welche ρ_1 und ρ_2 mit dem Knoten ihrer Ebene bilden. Nennen wir I die Neigung der Körperebene gegen die unveränderliche Ebene, θ_1 und θ_2 ihre Neigungen gegen die Bahnebenen, so ist $K \cos I = f_1 \cos \theta_1 + f_2 \cos \theta_2$, $\frac{K \sin I}{\sin(u_1 - u_2)} = \frac{f_2 \sin \theta_2}{\sin u_1} = -\frac{f_1 \sin \theta_1}{\sin u_2}$, man kann also f_1 und f_2 durch die Projectionen $f_1 \cos \theta_1, f_2 \cos \theta_2$, und durch die Winkel u_1, u_2 ausdrücken. Es lässt sich also auch H durch die acht Variablen $\rho_1, \rho_2, \rho'_1, \rho'_2, u_1, u_2, f_1 \cos \theta_1, f_2 \cos \theta_2$ ausdrücken, von denen die vier letzteren die Längen der Radien Vektoren in der Körperebene und die Arealbewegung in derselben Ebene bedeuten. Von diesen Variablen hat aber *Edn. Bour* bewiesen, dass sie auch ein kanonisches System von acht Gleichungen liefern. So haben wir also nur noch die Bewegung in der Ebene der drei Körper zu suchen.

Beobachtungen des Planeten (100). Von Herrn Prof. Dr. C. H. F. Peters.

Von dem in voriger Woche angezeigten neuen Planeten (100), der, wie aus einem gestern von Herrn Professor *Watson* eingegangenen Schreiben erhellt, von demselben bereits am 11. d. M. aufgefunden worden, habe ich noch die folgenden Beobachtungen erhalten:

1868	Ham. Coll. m. Zt.	Scheinbare		Log $(p\Delta)''$					
		α (100)	δ (100)	in α	in δ				
Juli 15	11 ^h 40 ^m 48 ^s 3	21 ^h 8 ^m 46 ^s 37	—16° 7' 41" 7	0,501n	0,892	1	Vergl.	mit	Öltzen—Arg. 21133—4.
16	12 15 3,5	8 10,06	13 7,4	0,323n	0,879	10	=	=	21244.
17	11 6 50,3	7 35,63	18 16,4	0,580n	0,866	10	=	=	=
19	12 29 23,0	21 6 17,30	—16 29 43,2	0,113n	0,883	10	=	=	21246.

Refractionsunterschied ist berücksichtigt. Die Sternörter sind die des Catalogs ohne weitere Correction.

Litchfield Observatory of Hamilton College, Clinton, N. Y., 1868 Juli 21.

C. H. F. Peters.