MEMORIE E COMUNICAZIONI.

RIDUZIONE DEI FASCI DI CURVE PIANE DI GENERE 2.

Nota di Michele de Franchis, in Palermo.

Adunanza del 14 agosto 1898.

Questo lavoro si riattacca alle note ricerche dei signori Noether, Bertini, Guccia, Del Pezzo, Segre, Martinetti, Jung, Castelnuovo sulla riduzione dei sistemi lineari di curve piane (*).

(*) Noether: *Zur Theorie der eindeutigen Ebenentransformationen* (Math. Ann. Bd. V, s. 635);

Bertini: *Ricerche sulle trasformazioni univoche involutorie nel piano* (Ann. di Matem., t. VIII₂, pag. 244);

Guccia: *Generalizzazione di un teorema di Noether* (Questi Rend., t. I, pag. 139), *Sulla riduzione dei sistemi lineari di curve ellittiche e sopra un teorema generale delle curve algebriche di genere p* (Ibid., t. I, pag. 169) e *Due sistemi lineari d'ordine minimo, di genere $p = 2$* (Ibid., t. I, pag. 388);

Del Pezzo: *Sulle superficie dell' n^{mo} ordine immerse nello spazio di n dimensioni* (Ibid., t. I, pag. 241);

Segre: *Sui sistemi lineari di curve piane algebriche di genere p* (Ibid., t. I, pag. 217);

Martinetti: *Sopra alcuni sistemi lineari di curve piane algebriche di genere due* (Ibid., t. I, pag. 205);

Rend. Circ. Matem., t. XIII, parte 1^a.—Stampato il 15 settembre 1898. 1

In esso, servendomi del metodo di Noether, pervengo aritmeticamente a sette tipi di fasci di genere 2. Il trovare poi direttamente se questi sette tipi esistano effettivamente, presenta, per alcuni di essi, delle difficoltà. Io sono riuscito a dimostrare l'esistenza di sei dei sette tipi, dando per cinque di essi la più generale costruzione (e determinando in conseguenza di qual natura siano i legami fra i punti base). Per il settimo tipo dimostro la non esistenza.

In quanto al sesto tipo, che è un certo fascio di curve di 13^{mo} ordine, mi contento di dimostrarne qui l'esistenza, servendomi di una trasformazione piana doppia. Appunto qui osservo che la classificazione dei fasci di curve piane di genere 2 si può far dipendere da quella dei piani doppi razionali la cui curva di diramazione sia dell'ordine $2n$ con un punto, O , $(2n - 6)$ -plo o $(2n - 5)$ -plo. Quest'ordine d'idee mi venne richiamato dal ch.mo prof. Enriques, al quale sono lieto di poter rendere pubblicamente vive grazie per i consigli di cui m'è stato largo. Io possiedo in effetti tale classificazione, ma non ho creduto di porla qui, per non rendere ancor più lungo il lavoro. Il metodo dei piani doppi si presta però per veder subito l'esistenza dei fasci trovati.

Dietro il mio lavoro e quelli dei sigg. Bertini, Segre, Guccia, Martinetti e Castelnuovo, si può dire completa la riduzione dei sistemi lineari di curve piane di genere 2.

1. Noi consideriamo come equivalenti due sistemi lineari di curve che possano dedursi l'uno dall'altro mediante una trasformazione Cremoniana, e ci proponiamo la ricerca dei tipi (non equivalenti) dei fasci di curve piane di genere 2.

Dato un fascio (irriducibile) di curve di genere 2, denotiamone con n l'ordine, e con $r_1, r_2, \dots, r$, le molteplicità dei punti base (alcuni dei quali anche infinitamente vicini tra loro nel senso di

Jung: *Ricerche sui sistemi lineari di genere qualunque e sulla loro riduzione all'ordine minimo* (Ann. di Matem., t. XV₂ pag. 277 e t. XVI₂ pag. 291);

Castelnuovo: *Sulle superficie algebriche le cui sezioni piane sono curve iperellittiche*. (Questi Rend. t. IV, pag. 73).

Noether). Si avranno le due relazioni:

$$(1) \quad \sum_{i=1}^s r_i^2 = n^2$$

$$(2) \quad \sum_{i=1}^s r_i = 3n + 2.$$

Inoltre si hanno le disequaglianze:

$$(3) \quad r_i \leq n - 2 \quad (i = 1, 2, \dots, s)$$

$$(4) \quad r_i + r_j \leq n \quad (i, j = 1, 2, \dots, s; i \neq j)$$

$$(5) \quad 3 < n.$$

Le formole (2) e (4) mostrano che:

Un fascio di curve di genere 2 non può possedere meno di tre punti base (distinti od infinitamente vicini) ().*

Poniamo l'ordine delle r_i in guisa che sia:

$$(6) \quad r_1 \geq r_2 \geq r_3 \geq \dots \geq r_s > 0.$$

Se $r_1 + r_2 + r_3 > n$, i tre punti r_1 -plo, r_2 -plo, r_3 -plo non sono certamente in linea retta. Quindi *se essi sono a distanza finita fra loro ovvero anche infinitamente vicini, purchè al punto r_1 -plo non siano, separatamente, infinitamente vicini i punti r_2 -plo, r_3 -plo si può eseguire una trasformazione quadratica, avente per punti fondamentali i tre punti dati; ed il fascio trasformato del dato ha l'ordine inferiore ad n .*

Dico che, *escluso un caso eccezionale, anche quando, pur essendo $r_1 + r_2 + r_3 > n$, i punti r_2 -plo ed r_3 -plo sono, separatamente, infinitamente vicini al punto r_1 -plo, si può sempre trovare una trasformazione Cremoniana la quale abbassi l'ordine del fascio.*

(*) Veramente, mediante le disequaglianze date, potrebbe dirsi qualche cosa di più, ma a noi basta semplicemente questa proposizione.

Per la dimostrazione, cangiamo alquanto le notazioni e poniamo:

$$r_1 = j, \quad r_2 = i_1, \quad r_3 = i_2;$$

supponiamo inoltre, per maggior generalità, che al punto j -plo si siano anche separatamente avvicinati punti di molteplicità $i_3, i_4, \dots, i_v$ ($v \geq 2$).

Dico che esistono punti base oltre questi. Basta osservare che

$$(7) \quad n - 2 \geq j \geq i_1 + i_2 + \dots + i_v,$$

ed osservare che, se i punti base fossero questi soli che noi abbiamo considerato, la (2) non sarebbe verificata.

Indichiamo dunque con $h_1, h_2, \dots, h_\mu$ le molteplicità dei punti base diversi da quelli considerati.

Si ha, per ipotesi,

$$(8) \quad j + i_1 + i_2 > n$$

ed inoltre i tre punti j -plo, i_1 -plo, i_2 -plo sono i punti base di più elevata molteplicità, ed è $j \geq i_1 + i_2$ ($i_1, i_2 > 0$), quindi si può supporre:

$$j > i_1 \geq i_2 \geq i_3 \geq \dots \geq i_v > 0 \quad (v \geq 2)$$

$$i_2 \geq h_1 \geq h_2 \geq \dots \geq h_\mu > 0. \quad (\mu \geq 1)$$

Se intanto $j + 2h_1 > n$, si può sempre con una trasformazione quadratica abbassar l'ordine del fascio. Difatti, se il punto h_1 -plo non cade nel punto j -plo (cioè non è un punto *satellite* di qualcuno dei punti i -pli), la trasformazione quadratica cercata è, p. e., quella che ha per punti fondamentali il punto h_1 -plo ed i punti j -plo, i_1 -plo. Se poi il punto h_1 -plo fosse satellite d'un punto i -plo, sarebbe $i_1 \geq h_1$ e quindi $j + i_1 + h_1 > n$, laonde la trasformazione quadratica avente i punti fondamentali nei punti j -plo, i_1 -plo, h_1 -plo abbasserebbe l'ordine del fascio.

Resta quindi da far l'ipotesi:

$$j + 2h_1 \leq n,$$

dalla quale $h_1 \leq \frac{n-j}{2}$. Poniamo:

$$(9) \quad \begin{cases} h_k^2 = \sigma_k \left(\frac{n-j}{2} \right)^2 & (k = 1, 2, \dots, \mu) \\ i_k^2 = s_k i_1^2 & (k = 1, 2, \dots, \nu) \end{cases}$$

Risulta essere:

$$0 < \sigma_k \leq 1; \quad 0 < s_k \leq 1,$$

laonde

$$(10) \quad \begin{cases} h_k \geq \sigma_k \frac{n-j}{2} \\ i_k \geq s_k i_1. \end{cases}$$

Con ciò, le formole (1) e (2) danno:

$$(11) \quad n^2 = j^2 + i_1^2 \sum_{k=1}^{\nu} s_k + \left(\frac{n-j}{2} \right)^2 \sum_{k=1}^{\mu} \sigma_k$$

$$(12) \quad 3n + 2 \geq j + i_1 \sum_{k=1}^{\nu} s_k + \frac{n-j}{2} \sum_{k=1}^{\mu} \sigma_k.$$

Da queste, eliminando $\sum_{k=1}^{\mu} \sigma_k$ [cioè moltiplicando la (12) per $\frac{n-j}{2}$, sottraendo da essa la (11) e riducendo a zero il primo membro], si ha:

$$(13) \quad 0 \geq \frac{n-j}{2} (3j - n - 2) + \left(\frac{n-j}{2} - i_1 \right) i_1 \sum_{k=1}^{\nu} s_k.$$

Essendo $j + i_1 + i_2 > n$ ed $i_1 \geq i_2$, è $j + 2i_1 > n$, cioè $i_1 > \frac{n-j}{2}$ ed inoltre è

$$i_1 \sum_{k=1}^v s_k \leq \sum_{k=1}^v i_k \leq j,$$

quindi sarà, a maggior forza,

$$0 \geq \frac{n-j}{2}(2j-n-2) + j(n-j-i_1),$$

od ancora

$$(14) \quad n-j \geq \frac{n-j}{2}(2j-n) + j(n-j-i_1).$$

Ora $j + i_1 + i_2 > n$, $i_1 + i_2 \leq j$, quindi $2j > n$, cioè $2j-n > 0$.

Inoltre $j + i_1 \leq n$ e quindi $n-j-i_1 \geq 0$. Segue perciò dalla (14)

$$n-j \geq \frac{n-j}{2}(2j-n),$$

dovendo essere $2j-n > 0$, $n-j > 0$, da questa ricavasi

$$2 \geq 2j-n > 0.$$

Laonde o $2j-n=1$, ovvero $2j-n=2$.

Discutiamo partitamente questi due casi:

1° CASO: $2j-n=1$.—Posto $j=p$, ricavasi $n=2p-1$ e la (14) dà

$$p-1 \geq 2p(p-1-i_1).$$

Essendo, per ipotesi, $p=j$, $j \geq i_1 + i_2$, $i_2 \geq 1$, e quindi $p-1-i_1 \geq 0$, questa disuguaglianza non è possibile che per $p-1-i_1=0$ ossia per $i_1=p-1$. In tal caso, sarà necessariamente $i_2=1$ (per la condizione $j \geq i_1 + i_2$, $i_2 \geq 1$), ed è certamente $v=2$. Se h_1 è > 1 , il punto h_1 -plo 0 è a distanza finita dal

punto j -plo ovvero s'è indefinitamente avvicinato al punto i_1 -plo. In entrambi i casi questi tre punti individuano una trasformazione quadratica che li ha come fondamentali, e dessa abbassa l'ordine n . Se poi $h_1 = 1$, ma esiste qualcuno dei punti h_k -pli il quale sia a distanza finita dal punto j -plo ovvero sia punto satellite del punto i_1 -plo, la stessa conclusione si può trarre. Essa non si può più trarre quando tutti i punti h_k -pli fossero semplici ed infinitamente vicini al punto i_2 -plo (qui semplice): denotando con s il loro numero, deve essere, per le relazioni (1), (2):

$$(2\rho - 1)^2 = (\rho - 1)^2 + \rho^2 + s$$

$$6\rho - 1 = \rho - 1 + \rho + s,$$

laonde

$$2\rho(\rho - 3) = 0.$$

Da questa, essendo $\rho > 0$, si ha $\rho = 3$, laonde $n = 5$, $j = 3$, $i_1 = 2$, $s = 12$. Il nostro fascio deve dunque essere un fascio di curve di 5° ordine, avente un punto, 1, come base triplo ed a questo infinitamente vicino un punto, 2, come base doppio, ed inoltre avente dodici punti base semplici, 3, 4, 5, ..., 14, tali che, per $2 < s < 14$, il punto $s + 1$ è satellite di s e che il punto 3 è satellite di 1.

Se i punti 1, 3, 4 non sono in linea retta, esiste la trasformazione Cremoniana di 3° ordine di cui la rete omaloidica ha un punto base doppio in 1 e punti base semplici in 2, 3, 4, 5, e questa abbassa l'ordine del fascio. Invece non esiste alcuna trasformazione Cremoniana che abbassi l'ordine, quando 1, 3, 4 sono in linea retta (*). In tal caso soltanto dunque il fascio di 5° ordine è d'ordine minimo. Tal fascio verrà denotato col simbolo

$$(C_5) \equiv (1^3, 2^2, 3, 4, 5, \dots, 14)_5; [(1, 2), (1, 3, 4, \dots, 14), (1, 3, 4)]_1.$$

(*) Jung: loc. cit., Mem. II, § 7. Togliendo dal fascio (C_5) i punti base 11, 12, 13, 14, si ottiene un sistema lineare ∞^3 d'ordine minimo già incontrato dal sig. Bertini (loc. cit., n° 9).

2° CASO: $2j - n = 2$. In tal caso, posto $j = \rho$, si ha $n = 2\rho - 2$ e la (14) dà:

$$0 \geq \rho(\rho - 2 - i_1),$$

perciò $\rho - 2 - i_1 \leq 0$ (essendo $\rho > 0$). Ma si sa dover essere $\rho - 2 - i_1 \geq 0$, quindi $\rho - 2 - i_1 = 0$, cioè $i_1 = \rho - 2$. Ma allora è $i_2 \leq 2$.

Osservando che, per ipotesi, $h_1 \leq i_2$ e che risultò $i_2 \leq 2$, se è $i_2 = 2$, denotisi con $p_2 - 1$ il numero delle h che hanno il valor 2, e con p_1 il numero di quelle che sono eguali ad 1; se poi $i_2 = 1$, poniamo $p_2 = 0$ e con $p_1 - 1$ denotiamo il numero delle h (tutte eguali ad 1). In ogni caso, si avranno le due equazioni [provenienti da (1), (2)]:

$$2\rho^2 - 4\rho = 4p_2 + p_1,$$

$$4\rho - 2 = 2p_2 + p_1,$$

dalle quali:

$$p_2 = \rho^2 - 4\rho + 1$$

$$p_1 = 12\rho - 2\rho^2 - 4.$$

Da queste, dovendo essere $p_1 \geq 0$, $p_2 \geq 0$, ricavasi $6 > \rho > 3$, e quindi si hanno i due casi $\rho = 4$, $\rho = 5$. Il 1° caso dà $n = 6$, $j = 4$, $i_1 = 2$, $p_2 = 1$, $p_1 = 12$, cioè un fascio di curve di 6° ordine con un punto base quadruplo, due punti base doppi ad esso infinitamente vicini e 12 punti base semplici.

Questi o sono a distanza finita dal punto quadruplo od infinitamente vicini a qualcuno dei punti base doppi. In ogni caso, c'è sempre una trasformazione quadratica che abbassa l'ordine del fascio (*). Il 2° caso ($\rho = 5$) dà $n = 8$, $j = 5$, $i_1 = 3$, $p_2 = 6$, $p_1 = 6$,

(*) Togliendo invece i 12 punti base semplici, si ottiene un sistema ∞^{11} di ordine minimo (cfr. GUCCIA: *Due sistemi*, etc., loc. cit.).

ossia un fascio di curve di 8° ordine con un punto base quintuplo, uno triplo, 6 doppi e 6 semplici. Comunque si dispongano fra di loro infinitamente vicini i punti base di questo fascio, si vede che si può sempre abbassarne l'ordine mediante una trasformazione quadratica. Difatti, se qualcuno dei punti doppi è a distanza finita dal punto quintuplo, la trasformazione quadratica che ha come fondamentali tal punto ed i punti quintuplo e triplo esiste ed abbassa l'ordine. Se poi tutti i punti doppi cadono sul punto quintuplo allora o ce n'è qualcuno che s'è prima avvicinato al punto triplo ovvero c'è un punto doppio infinitamente vicino al quintuplo (separatamente dal triplo) e tutti gli altri punti doppi sono infinitamente vicini ad esso (succedendosi l'uno all'altro in un certo ordine). In ognuno di tali casi, esiste evidentemente una trasformazione quadratica che ha la proprietà di abbassare l'ordine del fascio.

La discussione precedente porta dunque al seguente lemma:

Se i tre punti base di molteplicità più elevata di un fascio di curve piane di genere 2 e d'ordine n hanno la somma delle loro molteplicità $> n$, comunque poi siano legati fra loro, esiste sempre una trasformazione Cremoniana che, applicata al fascio, ne abbassa l'ordine, escluso il caso di un fascio

$$(C_5) \equiv (1^3, 2^2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \dots, 14)_5; \\ [(1, 2), (1, 3, 4, \dots, 14), (1, 3, 4)_1],$$

cioè d'un fascio di curve di 5° ordine dotate d'un punto, 1, base triplo, un punto, 2, base doppio, infinitamente vicino ad 1, e dodici punti base semplici, 3, 4, 5, ..., 14, di cui 3 è infinitamente vicino ad 1, 4 a 3, 5 a 4, etc., e tali che 1, 3, 4 sono in linea retta.

L'esistenza di questo fascio sarà accertata più oltre.

2. Dal momento che un fascio di curve di genere 2 e d'ordine n ha necessariamente almeno tre punti base, e che, quando la somma delle tre molteplicità più elevate ($r_1 + r_2 + r_3$) è $> n$, l'ordine n può sempre abbassarsi mediante una trasformazione quadratica, esclusa fatta del fascio (C_5) del n° precedente, segue che la ricerca dei tipi dei fasci di curve piane di genere 2, si può far dipendere

[escludendo i fasci equivalenti al (C_3) predetto] dalla ricerca dei fasci di curve d'ordine n e genere 2 in cui è

$$(15) \quad r_1 + r_2 + r_3 \leq n.$$

Suppongasì adunque d'avere un fascio di curve di genere 2 e d'ordine n per cui valga la (15).

Dalla (1) e dalla (2) del n° 1 si ricava :

$$(16) \quad r_3 \sum_{i=1}^3 r_i - \sum_{i=1}^3 r_i^2 = n(3r_3 - n) - r_3(r_1 + r_2 - 2) + r_1^2 + r_2^2.$$

Il primo membro di questa è, per le (6), ≥ 0 , ed è $= 0$ solo nel caso in cui sia

$$(17) \quad r_3 = r_4 = r_5 = \dots = r_n.$$

Quindi è

$$(18) \quad n(3r_3 - n) - r_3(r_1 + r_2 - 2) + r_1^2 + r_2^2 \geq 0,$$

ove il segno d'uguaglianza può sussistere solo nel caso in cui siano verificate le (17). Per le (6) e la (15) è $3r_3 \leq n$, quindi dalla disuguaglianza precedente e dalle (15) si trae facilmente :

$$(r_1 + r_2 + r_3)(2r_3 - r_1 - r_2) - r_3(r_1 + r_2 - 2) + r_1^2 + r_2^2 \geq 0,$$

ossia, sviluppando e dividendo per 2,

$$(19) \quad r_3(r_3 + 1) - r_1 r_2 \geq 0.$$

Qui abbiamo da considerare due casi :

1° CASO.—Sia

$$r_3(r_3 + 1) - r_1 r_2 = 0.$$

Allora, dovendo essere $r_1 \geq r_2 \geq r_3$, si vede che deve essere necessariamente $r_1 - 1 = r_2 = r_3$. Nel nostro caso inoltre, in (18)

vale il segno $=$, quindi valgono le (17). In complesso, dev'essere:

$$r_1 - 1 = r_2 = r_3 = \dots = r_s = \rho,$$

ρ essendo un numero intero e > 0 . Inoltre la stessa (18) dà $3\rho + 1 = n$.

La (2) del n° 1 dà allora:

$$s\rho + 1 = 9\rho + 5$$

ossia

$$(s - 9)\rho = 4.$$

Si può in tre modi soddisfare con numeri interi a quest'equazione. Si hanno le soluzioni:

$$(a) \quad s = 13, \quad \rho = 1$$

$$(b) \quad s = 11, \quad \rho = 2$$

$$(c) \quad s = 10, \quad \rho = 4.$$

La soluzione (a) offre $n = 4$, $r_1 = 2$, $r_2 = r_3 = \dots = r_{13} = 1$, cioè un fascio di curve di 4° ordine con un punto base doppio e con 12 punti base semplici, fascio che indicheremo con

$$(C_4) \equiv (1^2, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13)_4.$$

La (b) offre $n = 7$, $r_1 = 3$, $r_2 = r_3 = \dots = r_{11} = 2$ cioè un fascio di curve di 7° ordine con un punto base triplo ed altri 10 punti base doppi. Questo fascio si denoterà con

$$(C_7) \equiv (1^3, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2, 9^2, 10^2, 11^2)_7.$$

La (c) finalmente offre $n = 13$, $r_1 = 5$, $r_2 = r_3 = \dots = r_{10} = 4$, cioè un fascio di curve di 13° ordine con un punto quintuplo e

nove punti quadrupli. Tal fascio si denoterà con

$$(C_{13}) \equiv (1^5, 2^4, 3^4, 4^4, 5^4, 6^4, 7^4, 8^4, 9^4, 10^4)_{13}.$$

2° CASO. — Sia invece :

$$r_3(r_3 + 1) - r_1 r_2 > 0.$$

Questa dà necessariamente $r_1 = r_2 = r_3 = r$ (r essendo un intero > 0). Qui la (18) considerata insieme alle disuguaglianze $n - 3r \geq 0$, $r \geq 1$, dà $3r = n$. Denotiamo ora con p_0 il numero di quelle r_i che sono eguali ad r ($p_0 \geq 3$), con p_1 quelle che sono eguali ad $r - 1$ ($p_1 \geq 0$), con p_2 quelle che sono eguali ad $r - 2$, ..., con p_{r-1} quelle che sono eguali ad 1. La (1) e la (2) divengono :

$$(20) \quad p_0 r^2 + p_1(r-1)^2 + p_2(r-2)^2 + \dots + p_{r-1} = 9r^2$$

$$(21) \quad p_0 r + p_1(r-1) + p_2(r-2) + \dots + p_{r-1} = 9r + 2.$$

Dalla (20) e dalla (21) ricavasi $p_0 < 9$. Sottraendo dalla (20) la (21) moltiplicata per $r - 1$, si ricava :

$$(22) \quad p_0 r - p_2(r-2) - 2p_3(r-3) - \dots - (r-2)p_{r-1} = 7r + 2,$$

dalla quale si ha $p_0 > 7$. Quindi $p_0 = 8$. Con questo valore, la (20) e la (21) divengono :

$$(23) \quad p_1(r-1)^2 + p_2(r-2)^2 + \dots + p_{r-1} = r^2$$

$$(24) \quad p_1(r-1) + p_2(r-2) + \dots + p_{r-1} = r + 2.$$

Moltiplicando la (24) per r e sottraendo la (23),

$$p_1(r-1) + 2p_2(r-2) + 3p_3(r-3) + \dots + (r-1)p_{r-1} = 2r.$$

Sottraendo questa dalla (24) moltiplicata per 2,

$$p_1(r-1) - p_3(r-3) - \dots - (r-3)p_{r-1} = 4,$$

laonde $p_i > 0$. Quindi concludiamo che tra le r_i ve ne sono 8, e non più, eguali ad r (e queste le denotiamo con $r_1, r_2, \dots, r_8$) e v'è inoltre una r_i , almeno, eguale ad $r-1$. Questa possiamo denotarla con r_9 . Tutte le altre r_i sono $< r$. Le (1) e (2) del n° 1 divengono allora :

$$(25) \quad \sum_{i=10}^s r_i^2 = 2r - 1$$

$$(26) \quad \sum_{i=10}^s r_i = 3.$$

Ora le soluzioni di quest'ultima equazione sono in numero finito e sono :

$$(d) \quad r_{10} = r_{11} = r_{12} = 1$$

$$(e) \quad r_{10} = 2, \quad r_{11} = 1$$

$$(f) \quad r_{10} = 3.$$

La (d) dà [per la (25)] $2r - 1 = 3$, laonde $r = 2$. Quindi $n = 6$, $r_1 = r_2 = \dots = r_8 = 2$, $r_9 = r_{10} = r_{11} = r_{12} = 1$. Essa fornisce un fascio di curve di 6° ordine del tipo :

$$(C_6) \equiv (1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2, 9, 10, 11, 12)_6.$$

La (e) dà, similmente, $2r - 1 = 5$, laonde $r = 3$. Quindi $n = 9$, $r_1 = r_2 = \dots = r_8 = 3$, $r_9 = r_{10} = 2$, $r_{11} = 1$. Essa fornisce un fascio di curve di 9° ordine del tipo :

$$(C_9) \equiv (1^3, 2^3, 3^3, 4^3, 5^3, 6^3, 7^3, 8^3, 9^2, 10^2, 11)_9.$$

Finalmente la (f) dà $r = 5$, e quindi :

$$n = 15; \quad r_1 = r_2 = \dots = r_8 = 5; \quad r_9 = 4; \quad r_{10} = 3,$$

cioè un fascio :

$$(C_{15}) \equiv (1^5, 2^5, 3^5, 4^5, 5^5, 6^5, 7^5, 8^5, 9^4, 10^3)_{15}.$$

In conclusione :

I tipi aritmeticamente possibili dei fasci di curve piane di genere 2 (non equivalenti per trasformazioni birazionali del piano) sono :

$$(C_4) \equiv (1^2, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13)_4$$

$$(C_5) \equiv (1^3, 2^2, 3, 4, 5, \dots, 14)_5; [(1, 2), (1, 3, 4, \dots, 14), (1, 3, 4)_1].$$

$$(C_6) \equiv (1^3, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2, 9, 10, 11, 12)_6$$

$$(C_7) \equiv (1^3, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2, 9^2, 10^2, 11^2)_7$$

$$(C_9) \equiv (1^3, 2^3, 3^3, 4^3, 5^3, 6^3, 7^3, 8^3, 9^2, 10^2, 11)_9$$

$$(C_{13}) \equiv (1^5, 2^4, 3^4, 4^4, 5^4, 6^4, 7^4, 8^4, 9^4, 10^4)_{13}$$

$$(C_{15}) \equiv (1^5, 2^5, 3^5, 4^5, 5^5, 6^5, 7^5, 8^5, 9^4, 10^3)_{15},$$

ove col simbolo $(1^{a_1}, 2^{a_2}, 3^{a_3}, \dots, s^{a_s})_n$ denotiamo un fascio di curve d'ordine n coi punti base $1, 2, 3, \dots, s$ multipli secondo i numeri $a_1, a_2, a_3, \dots, a_s$. Pel fascio (C_5) , la notazione $[(1, 2), (1, 3, 4, \dots, 14), (1, 3, 4)_1]$ denota che il punto 2 è infinitamente vicino ad 1, che il punto 3 è infinitamente vicino ad 1; 4 a 3; 5 a 4; $\dots$, 14 a 13 e che i punti 1, 3, 4 sono in linea retta.

3. Adesso bisogna vedere quali di tali fasci effettivamente esistono. In quanto all'esistenza dei fasci (C_4) e (C_6) , essa si dimostra immediatamente, e si trova la più generale costruzione dei due fasci, osservando che i sistemi $[C_4] \equiv [1^2]_4$ e $[C_6] \equiv [1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2]_6$ sono rispettivamente ∞^{11} , ∞^3 . Pigliate due C_4 diverse o rispettivamente due C_6 diverse di tali sistemi, esse determinano due fasci (C_4) , (C_6) della natura voluta.

Per dimostrare l'esistenza del fascio (C_5) (n° 2) e trovarne la costruzione più generale, supponiamo per un momento che tal fascio (C_5) , esista. Togliendo i punti base 12, 13, 14, si ottiene una rete $[C_5]$. Questa rete è tale che, imponendo alle sue curve di passare

per il punto 12 infinitamente vicino ad 11, restano determinati due altri punti base 13, 14, infinitamente vicini a 12. Dico che questa è proprietà di qualunque rete $[C_5] \equiv [1^3, 2^2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11]_5$, che abbia i punti base addensati come i precedenti, cioè che abbia il punto 2 satellite di 1, 3 di 1, 4 di 3, 5 di 4, ..., 11 di 10, ed i punti 1, 3, 4 in linea retta. Difatti, quando io impongo alle curve di $[C_5]$ il punto base 12 infinitamente vicino ad 11, tra le curve del fascio che così verrò a determinare c'è la retta (1, 3, 4), contata 5 volte. Questo vedesi subito, considerando, invece che $[C_5]$, una rete $[C_7]$, trasformata di $[C_5]$ mediante una trasformazione quadratica che abbia un punto fondamentale nel punto 1 e gli altri punti fondamentali generici. Ora, siccome la retta (1, 3, 4), contata 5 volte è una curva *totale* del fascio (C_5) così ottenuto e non ha intersezioni con un'altra C_5 del fascio a distanza finita da 1, così il fascio (C_5) , staccato dalla rete data, imponendo il punto base 12 satellite di 11, ha gli altri due punti base 13, 14 a distanza infinitesima da 1 e si vede subito (è meglio per questo riferirsi al fascio staccato dalla rete $[C_7]$) che il punto 13 è satellite di 12 e 14 di 13.

Quindi il fascio (C_5) esiste e la costruzione precedente è la più generale.

Passiamo ora alla

DISCUSSIONE DEL FASCIO (C_7) . — Consideriamo il sistema delle curve di 4° ordine aggiunte a (C_7) ($n^o 2$): esso è un fascio. Facciamo dapprima l'ipotesi che tal fascio sia irriducibile. Dico che ciò non può essere. Difatti, se le C_4 generiche aggiunte a (C_7) sono irriducibili, costituiscono un fascio di curve di genere 2, e precisamente:

$$(C_4) \equiv (1^2, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13)_4,$$

essendo 12 e 13 due certi punti del piano.

Qua però si può far l'obbiezione che, quando i punti base 1, 2, ..., 11 fossero (tutti od alcuni) infinitamente vicini, potrebbero forse le C_4 acquistare qualche molteplicità più elevata in qualcuno di essi e perciò [tuttochè fosse (C_4) irriducibile] potrebbero non essere più le C_4 di genere 2. Ma è chiaro che in tal caso si può, mediante una trasformazione quadratica, portare (C_7) in un (C_7)

della stessa natura avente riducibile il sistema aggiunto (di 4° ordine). Escludendo quindi il caso che il (C_7) possa mediante trasformazioni Cremoniane ridursi ad un (C_7) le cui aggiunte di 4° ordine siano riducibili, abbiamo che il sistema aggiunto (C_4) è quello che abbiamo già scritto.

Le C_7 secano le C_4 in gruppi dell'unica g_2^1 esistente su una C_4 , quindi i gruppi di punti secati sulle C_4 da una C_7 (o viceversa) sono allineati col punto 1. In altri termini, le rette per 1 secano una C_7 in 4 punti che constano di due gruppi dell'unica g_2^1 su C_7 . Per ognuno di questi gruppi passa una C_4 . Fissata quindi una C_7 , facciamo corrispondere ad ogni retta del fascio di centro 1 la coppia di curve C_4 che passano per i due gruppi della g_2^1 secati su C_7 dalla retta data. In tal guisa, determiniamo una proiettività tra le rette del fascio $(1)_1$ e coppie di curve di (C_4) che costituiscono entro la forma fondamentale *fascio* una involuzione di 1° specie e 2° grado. In altri termini, otteniamo una corrispondenza proiettiva tra il fascio di rette $(1)_1$ ed un fascio riducibile di curve di 8° ordine:

$$(C_8) \equiv (1^4, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2, 9^2, 10^2, 11^2, 12^2, 13^2)_8.$$

Il luogo dei punti comuni a curve corrispondenti di tali due fasci proiettivi è una

$$C_9 \equiv (1^{5+\varepsilon_1}, 2^{2+\varepsilon_2}, 3^{2+\varepsilon_3}, 4^{2+\varepsilon_4}, \dots, 10^{2+\varepsilon_{10}}, 11^{2+\varepsilon_{11}}, 12^{2+\varepsilon_{12}}, 13^{2+\varepsilon_{13}})_9$$

$$(\varepsilon_i \geq 0)$$

dalla quale deve staccarsi C_7 . Resta una

$$C_2 \equiv (1^{2+\varepsilon_1}, 2^{\varepsilon_2}, 3^{\varepsilon_3}, \dots, 10^{\varepsilon_{10}}, 11^{\varepsilon_{11}}, 12^{2+\varepsilon_{12}}, 13^{2+\varepsilon_{13}})_2.$$

Per l'irriducibilità di (C_4) , ricavasi $\varepsilon_i = 0$ e la conica C_2 è una retta, $(1, 12, 13)_1$, doppia. Questa non può contenere altri punti base, ed è fondamentale per (C_4) . La sua residua rispetto a questo è una $C_3 \equiv (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11)_3$. Ma questa non può esistere, se (C_7) è irriducibile.

Resta quindi da far l'ipotesi che il fascio (C_7) abbia l'aggiunto

riducibile (perchè sopra s'è visto che sempre a questo possiamo ridurre, quando le C_4 aggiunte abbiano il genere < 2).

Tale riducibilità può avvenire solamente per la presenza di parti fisse in ogni C_4 aggiunta; ciò perchè, se una C_4 aggiunta a (C_7) si componesse di due parti variabili (in un fascio), ognuna di queste secherebbe necessariamente in *un* punto ogni C_7 , e quindi le C_7 sarebbero razionali. La parte fissa comune a tutte le C_4 aggiunte dev'essere (per la stessa ragione) fondamentale per (C_7) e d'ordine < 4 . Si vede subito che la parte variabile dell'aggiunto a (C_7) non può essere nè una conica nè una retta (come si vede contandosene le intersezioni colle C_7 , in tutti i possibili casi), quindi dev'essere una cubica. Sicchè le curve dell'aggiunto (C_4) di (C_7) si devono comporre d'una retta fissa e di una curva C_3 variabile in un fascio.

La retta fissa, essendo fondamentale per (C_7) , deve contenere il punto 1 e due altri punti base, p. e., 2 e 3. Quindi i punti 1, 2, 3 sono allineati ed i punti 1, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 sono punti base d'un fascio di cubiche

$$(C_3) \equiv (1, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11)_3.$$

Queste cubiche sono certamente ellittiche [anche se alcuni o tutti i punti base del sistema (C_7) fossero infinitamente vicini], ciò perchè un fascio di curve (in particolare cubiche) razionali ha la sovrabbondanza nulla, quindi se esistesse un punto base doppio, esso e gli altri punti base sarebbero punti base di (C_7) e ci sarebbe una trasformazione quadratica portante (C_7) in un (C_7) ed il fascio (C_3) in un (C_2) , e ciò, come s'è visto, è impossibile.

Ciò posto, consideriamo la curva di (C_7) che contiene la retta $(123)_1$. La residua di questa retta sarà una

$$C_6 \equiv (1^2, 2, 3, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2, 9^2, 10^2, 11^2)_6.$$

Questa è certamente l'insieme di due C_3 :

$$C'_3 \equiv (1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11)_3,$$

$$C''_3 \equiv (1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11)_3,$$

le quali, essendo il fascio (C_7) irriducibile, sono necessariamente distinte. Dunque nel fascio (C_7) c'è una curva composta :

$$C_7' \equiv (1, 2, 3), (1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11), \\ (1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11),$$

Consideriamo una C_3 qualunque del fascio $(1, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11)$. Essa viene secata dal fascio (C_7) secondo una g_2^1 . Le coppie di questa g_2^1 su questa cubica ellittica C_3 sono allineate con un punto fisso di C_3 . Dal momento che tra le C_7 c'è la C_7' , il punto fisso su C_3 è il punto 1. Quindi *le coppie di punti secate dalle C_7 sulle C_3 (o viceversa) sono allineate con 1.*

Consideriamo una C_7 e la serie g_4^1 secata su di essa dalle rette per 1. Ogni gruppo della g_4^1 si compone, per ciò che s'è detto, di due coppie della g_2^1 esistente su C_7 (la quale g_2^1 è unica e perciò è quella secata dalle C_3). Considerando la curva $C_3' \equiv (1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11)$, il gruppo della g_2^1 secato da essa su C_7 consta di due punti riuniti nel punto 2, e quindi la C_3' ha, nel punto 2, due intersezioni riunite colla retta $(1, 2, 3)$, quindi la rocca in 2, od, in particolare, ha ivi punto doppio. Quest'ultimo caso è da escludere, per l'irriducibilità di (C_7) .

Quindi la C_3' deve *toccare* la retta $(1, 2, 3)$, nel punto 2. Similmente mostrasi che la $C_3'' \equiv (1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11)$, deve *toccare* la retta $(1, 2, 3)$, nel punto 3.

Fissata una C_7 , si può stabilire una proiettività fra il fascio di rette per 1 e certe coppie di curve C_3 [costituenti entro al fascio (C_3) una g_2^1], facendo corrispondere ad ogni retta per 1 la coppia di curve C_3 che tagliano la C_7 nelle 2 coppie in cui sappiamo che si scindono i quattro punti sezioni della retta con C_7 . In questa proiettività, alla retta $(1, 2, 3)$, deve corrispondere la coppia di cubiche C_3', C_3'' .

Quindi:

Se esiste il fascio $(C_7) \equiv (1^1, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2, 9^2, 10^2, 11^2)$, esso deve potersi con una trasformazione quadratica ricondurre ad un fascio (C_7) , della stessa natura, in cui:

(a) i punti 1, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 sono punti base d'un fascio di cubiche (C_3) ;

(b) i punti 1, 2, 3 sono allineati, ed i punti 2, 3 sono punti ove la retta $(1, 2, 3)_1$ è toccata da due cubiche del fascio (C_3) .

(c) Inoltre, per ogni C_7 , esiste una corrispondenza proiettiva tra le rette per 1 e certe coppie di curve del fascio (C_3) (costituenti entro al fascio un'involuzione g_2^1), in modo che la curva C_7 sia il luogo dei punti comuni alle rette per 1 ed alle corrispondenti coppie di curve C_3 . In questa corrispondenza, alla retta $(1, 2, 3)_1$ deve corrispondere la coppia di curve C_3 toccanti $(1, 2, 3)_1$ (nei punti 2 e 3).

Noi mostreremo che, viceversa, si può costruire, mediante la proprietà (c), un fascio irriducibile (C_7) del tipo voluto, ove siano verificate le ipotesi (a) e (b).

Perciò nel piano assumiamo un sistema di coordinate proiettive (x_1, x_2, x_3) , in guisa che la retta $(1, 2, 3)_1$ sia la retta $x_1 = 0$, ed in guisa che i punti 1, 2, 3 (che supponiamo due a due distinti) abbiano rispettivamente le coordinate $(0, 1, 1)$, $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$.

Le curve C'_3, C''_3 hanno per equazioni:

$$C'_3 \equiv a_1 x_3^2 x_1 + x_3 (b_1 x_1^2 + b_2 x_1 x_2 + b_3 x_2^2) \\ + c_1 x_1^3 + c_2 x_1^2 x_2 + c_3 x_1 x_2^2 + c_4 x_2^3 = 0$$

$$C''_3 \equiv \alpha_1 x_2^2 x_1 + x_2 (\beta_1 x_1^2 + \beta_2 x_1 x_3 + \beta_3 x_3^2) \\ + \gamma_1 x_1^3 + \gamma_2 x_1^2 x_3 + \gamma_3 x_1 x_3^2 + \gamma_4 x_3^3 = 0,$$

colle condizioni:

$$(s) \quad b_3 + c_4 = 0$$

$$(t) \quad \beta_3 + \gamma_4 = 0,$$

ed è da notare che dobbiamo supporre $a_1 \neq 0, \alpha_1 \neq 0$ (perchè le cubiche C'_3, C''_3 non devono aver punto doppio nei punti 2, 3).

Il fascio di rette per 1 può scriversi:

$$(27) \quad x_1 + \mu(x_2 - x_3) = 0,$$

mentre la nostra involuzione di coppie di curve C_3 (appartenenti al

fascio $C'_3 + \lambda C''_3 = 0$, le cui coppie corrispondono nel modo anzidetto alle rette per 1, si può scrivere:

$$(28) \quad C'_3 C''_3 + \mu (C'_3 + g C''_3)(C'_3 + h C''_3) = 0.$$

La curva generata dai due fasci proiettivi (27), (28) è una C_7 di equazione:

$$C_7 \equiv x_1 (C'_3 + g C''_3)(C'_3 + h C''_3) - (x_2 - x_3) C'_3 C''_3 = 0.$$

Questa ha, in generale, in 2 ed in 3 un punto semplice ed ivi per tangente la retta (23). Però, se vogliamo che essa abbia un punto doppio in 2 ed in 3, bisogna che si abbia:

$$\gamma_4(a_1 + \gamma_4) = 0$$

$$c_4(\alpha_1 - g h c_4) = 0.$$

Le soluzioni $\gamma_4 = 0$, $c_4 = 0$ di queste sono da scartarsi, perchè, badando alla (t) ed alla (s) rispettivamente, si otterrebbe una C_7 contenente la retta $x_1 = 0$.

Dobbiamo quindi fare:

$$(u) \quad a_1 + \gamma_4 = 0$$

$$(v) \quad \alpha_1 - g h c_4 = 0,$$

le quali forniscono valori non nulli per γ_4 , c_4 . Verificando a queste, si ottiene una C_7 che ha in 1 punto triplo ed in 2 e 3 punti doppi. Inoltre essa ha punti doppi nei punti 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, che, oltre ad 1, costituiscono la base del fascio $C'_3 + \lambda C''_3 = 0$. La C_7 così ottenuta non contiene chiaramente come parte nè la retta $x_1 = 0$, nè le cubiche C'_3 , C''_3 . Accoppiandola alla curva composta $x_1 C'_3 C''_3 = 0$, si determina un fascio:

$$(C_7) \equiv (1^3, 2^3, 3^3, 4^3, 5^3, 6^3, 7^3, 8^3, 9^3, 10^3, 11^3)_7.$$

Questo è irriducibile, perchè nè ha parti fisse, nè la sua curva generica si può comporre di più curve d'uno stesso fascio (*).

Dunque :

Il fascio (C_7) esiste e la costruzione precedente è la più generale.

DISCUSSIONE DEL FASCIO (C_9) . Ammettiamo per un momento l'esistenza e l'irriducibilità del fascio

$$(C_9) \equiv (1^3, 2^3, 3^3, 4^3, 5^3, 6^3, 7^3, 8^3, 9^2, 10^2, 11)_9.$$

Consideriamo le due cubiche $C'_3 \equiv (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)_3$, $C''_3 \equiv (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10)_3$. Supponiamo per il momento :

1° Che i punti 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 siano fra loro a distanza finita;

2° Che le cubiche C'_3 , C''_3 siano irriducibili. Queste restrizioni verranno tolte in seguito.

Le cubiche C'_3 , C''_3 sono distinte, per l'irriducibilità di (C_9) , inoltre, per la stessa ragione, non possono aver punto doppio in nessuno dei punti 1, 2, 3, ..., 11. Esse secano le C_9 , fuori dei punti 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, in un punto. Tal punto non può esser variabile, perchè altrimenti la corrispondente curva C'_3 (o C''_3) avrebbe un punto doppio e la C_9 passante per tal punto conterrebbe come parte la C'_3 (o la C''_3), il che contraddice al fatto che C'_3 (o C''_3) è secata in un punto variabile dalle C_9 . Dunque l'ulteriore punto d'intersezione delle C_9 colle curve C'_3 , C''_3 dev'essere un punto base (diverso da 1, 2, ..., 10) e quindi il punto 11. Si conchiude che i punti 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 11 sono i punti base d'un fascio di cubiche che denotiamo :

$$(C_3) \equiv (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 11)_3.$$

La cubica $C'_3 \equiv (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11)_3$, fondamentale per il fascio (C_9) , ha, rispetto a questo, una curva residua

$$C'_6 \equiv (1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2, 9, 10^2)_6.$$

(*) La (u) e la (v) determinano, in un numero ∞^1 di modi, l'involuzione nel fascio $C'_3 + \lambda C''_3 = 0$ e la proiettività dei gruppi di questa col fascio di rette per 1. In corrispondenza, si ottengono tutte le C_7 del fascio.

Similmente la residua di $C_3'' \equiv (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11)_3$ è una

$$C_6'' \equiv (1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2, 9^2, 10)_6.$$

Consideriamo il fascio di curve di 6° ordine aggiunte a (C_9) . Esso dev'essere un fascio:

$$(C_6) \equiv (1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2, 9, 10 \dots)_6.$$

Ma in (C_6) sono contenute la C_6' e la C_6'' , quindi il fascio (C_6) ha un punto base 9' infinitamente vicino a 9 ed un punto base 10' infinitamente vicino a 10. I punti 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 sono punti base d'un fascio di curve di 6° ordine con 9 punti doppi (fascio d'Halphen) (*) e similmente i punti 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10.

Resta a discutere il caso in cui la C_3' (o la C_3'') da noi considerata si spezzi. Anzitutto, nel caso in cui più punti base di (C_9) fossero infinitamente vicini, potrebbe la C_3' (o la C_3'') forse acquistare qualche punto doppio, in un punto ove succedesse un tale addensamento di punti base. Ma allora è chiaro che si può, con una trasformazione quadratica, passare dal fascio (C_9) ad un fascio (C_9) dello stesso tipo, in guisa che a C_3' (od a C_3'') corrisponda una conica [mantenendosi di ordine ≤ 3 l'altra curva C_3'' (o C_3')]. Sicchè siamo condotti a studiare il caso in cui qualcuna delle due curve C_3' , C_3'' , p. e., $C_3' \equiv (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)_3$, si spezzi. È chiaro che lo spezzamento può avvenire soltanto con curve di questi tre tipi:

o

$$C_3' \equiv (1, 2, 3, 4, 5, 6)_2 (7, 8, 9)_1,$$

ovvero

$$C_3' \equiv (1, 2, 3)_1 (4, 5, 6, 7, 8, 9)_2,$$

(*) Per la costruzione e le proprietà di tal fascio, vedasi Halphen: *Sur les courbes planes du sixième degré à neuf points doubles* (Bull. de la Soc. Math. de France, t. X, pag. 162).

ovvero

$$C_3 \equiv (1, 2, 3)_1 (4, 5, 6)_1 (7, 8, 9)_1.$$

In ognuno di questi tre casi si vede facilmente che *tutta* la curva C'_3 deve far parte di *una* curva C_9 e questo basta per proseguire la discussione precedente.

Quindi :

Se esiste il fascio (C_9) , i punti 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 11 sono punti base di un fascio di cubiche, mentre i punti 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ed i punti 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10 sono rispettivamente le basi di due fasci di curve di 6° ordine con nove punti doppi (fasci d'Halphen).

Il fascio (C_9) deve contenere due curve spezzate : una la

$$(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11)_3 (1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2, 9, 10^2)_6;$$

l'altra la

$$(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11)_3 (1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2, 9^2, 10)_6.$$

In base a questi dati, possiamo passare alla più generale costruzione del fascio (C_9) .

Si assumano nel piano, ad arbitrio, 8 punti, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, in maniera però che il fascio di cubiche per essi sia irriducibile, e sia 11 l'ulteriore punto base del fascio di cubiche. Considerisi il luogo Γ (di 9° ordine con punti tripli in 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8) (*) del 9° punto base dei fasci di curve di 6° ordine con 9 punti doppi, dei quali 8 siano nei punti 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Su questo luogo piglisi il punto 9, ed indi il punto 10, il quale sia fuori della cubica $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)_3$. Si suppone inoltre che il punto 10 non si scelga in guisa che le curve

$$C'_6 \equiv (1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2, 9^2, 10)_6$$

$$C''_6 \equiv (1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2, 9, 10^2)_6$$

(*) Halphen, loc. cit.

abbiano qualche curva comune. Questo si può sempre ottenere: basta pigliare, p. e., il punto 10 in guisa che sia irriducibile la curva C'_6 ed in guisa che 10 sia fuori dei dodici punti doppi (diversi dai punti base) di curve (particolari) del fascio $(1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2, 9^2)_6$.

Denotando con C'_3 , C''_3 rispettivamente le cubiche $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11)_3$ ed $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11)_3$, è chiaro che il fascio

$$C'_3 C''_6 + \lambda C''_3 C'_6 = 0$$

è un fascio

$$(C_9) \equiv (1^3, 2^3, 3^3, 4^3, 5^3, 6^3, 7^3, 8^3, 9^2, 10^2, 11)_9;$$

esso è irriducibile, ed è il più generale fascio (C_9) di tal tipo.

Abbiamo così dimostrata l'esistenza dei fasci (C_4) , (C_5) , (C_6) , (C_7) , (C_9) , dando inoltre per essi le costruzioni più generali.

Ora passiamo alla

DISCUSSIONE DEL FASCIO (C_{15}) . — Qui dimostreremo che:
il fascio

$$(C_{15}) \equiv (1^5, 2^5, 3^5, 4^5, 5^5, 6^5, 7^5, 8^5, 9^4, 10^3)_{15}$$

non può esistere.

Supponiamo, per un momento, a distanza finita i punti 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, e consideriamo la cubica

$$C_3 \equiv (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)_3.$$

Essa non può passare per 10, per l'irriducibilità di (C_{15}) , nè avere punto doppio in qualcuno dei punti 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (per la stessa ragione).

Essa ha una intersezione (oltre a tali punti) colle C_{15} . Questa intersezione non può esser mobile. Difatti, in tal caso, C_3 ha almeno un punto doppio, quindi due casi sono da considerare:

1° o C_3 è irriducibile. Allora la C_{15} , passante per il punto

doppio di C_3 , la contiene per intero, e questo contraddice al fatto che C_3 non è fondamentale per il fascio (C_{15}) .

2° o la C_3 si spezza. Al solito, gli spezzamenti possibili sono di questa natura :

$$C_3 \equiv (1, 2, 3, 4, 5, 6)_2 (7, 8, 9)_1$$

$$C_3 \equiv (1, 2, 3)_1 (4, 5, 6, 7, 8, 9)_2$$

$$C_3 \equiv (1, 2, 3)_1 (4, 5, 6)_1 (7, 8, 9)_1.$$

In ognuno di tali casi, si verifica che *tutta* C_3 è contenuta in una C_{15} , il che contraddice al fatto che una delle sue parti ha una intersezione variabile con le C_{15} (*).

Dunque dovrebbe l'intersezione ulteriore delle C_{15} colla C_3 essere un punto fisso ossia un punto base per C_{15} , e quindi il punto 10, ma questo non può essere se (C_{15}) è irreducibile.

Resta da far l'ipotesi dell'addensamento di due o più punti base di (C_{15}) . In tal caso, se la cubica $C_3 \equiv (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)_3$ è riducibile, ovvero, pur essendo irreducibile non ha il punto doppio in uno dei punti base, il ragionamento precedente serve ancora ad escludere l'esistenza del fascio (C_{15}) . Se poi un punto ove si siano addensati alcuni dei punti base è doppio per la cubica, c'è sempre una trasformazione quadratica che porta il (C_{15}) in un (C_{15}) e la cubica in una conica, ossia porta al caso in cui C_3 sia riducibile, ed il ragionamento precedente prova che (C_{15}) non può esistere. Dunque :

il fascio C_{15} non esiste.

DISCUSSIONE DEL FASCIO (C_{13}) . — Qui ci contentiamo (vedi la prefazione) di mostrare che il fascio (C_{13}) esiste.

Consideriamo in un piano π sette punti: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

(*) Si può osservare (il che fa lo stesso) che la residua di C_3 rispetto al fascio è una C_{12} la quale è tale che ogni C_{15} la contiene. Perciò il fascio C_{15} è necessariamente riducibile. Questa osservazione giova meglio quando i punti base sieno infinitamente vicini.

di cui i punti 2, 3, 4, 5, 6, 7 stiano sopra una conica, e consideriamo la rete di curve di 3° ordine per i punti 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, rete che indicheremo con $[C_3]$. Si può stabilire una corrispondenza proiettiva fra le curve di $[C_3]$ e la rete delle rette di un piano π' . Facendo corrispondere ai due punti (variabili) intersezioni di due C_3 della rete il punto intersezione delle rette corrispondenti, si ha una trasformazione doppia del piano π nel piano π' (*).

La curva di diramazione del piano π' è una curva di 4° ordine C'_4 avente un punto doppio O' il quale corrisponde a tutta la conica $(2, 3, 4, 5, 6, 7)_2$ del piano π . Alle rette di π corrispondono in π' curve di 3° ordine aventi in O' un punto doppio e tangenti in 4 punti variabili alla C'_4 . Al punto 1 di π corrisponde una retta di π' non passante per O' (e tangente doppia di C'_4), mentre ai punti 2, 3, 4, 5, 6, 7 corrispondono le 6 tangenti che si possono condurre da O' a C'_4 . Consideriamo in π' un fascio (irriducibile) di curve di 5° ordine passanti per O semplicemente ed aventi 3 tacnodi $8', 9', 10'$ posti su C'_4 ed aventi ivi come tangenti tacnodali le tangenti a C'_4 . A tal fascio di curve corrisponde nel piano π un fascio (irriducibile) di curve di 13° ordine

$$(C_{13}) \equiv (1^5, 2^4, 3^4, 4^4, 5^4, 6^4, 7^4, 8^4, 9^4, 10^4)_{13},$$

ove con 8, 9, 10 abbiamo denotato i punti corrispondenti ad $8', 9', 10'$.

E con ciò è dimostrata l'esistenza del fascio (C_{13}) .

Quindi si può concludere:

I tipi (non equivalenti per trasformazioni birazionali del piano) dei fasci di curve di genere 2 sono:

$$(a) \quad (C_4) \equiv (1^2, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13)_4$$

(*) Per lo studio delle trasformazioni doppie, vedasi De Paolis: *Le trasformazioni piane doppie* (Atti della R. Accademia dei Lincei, 1877), mentre per la loro classificazione in tipi vedasi: Clebsch: *Ueber den Zusammenhang einer Classe etc.* (Math. Ann., Bd. 3), Noether: *Ueber die ein-zweideutigen Ebenentransformationen* (Sitzungsberichte der phil. med. Soc. zu Erlangen, 1878) e Bertini: *Deduzione delle trasformazioni piane doppie dai tipi fondamentali delle involutorie* (Rend. del R. Ist. Lombardo, t. XXII₄).

- (b) $(C_5) \equiv (1^1, 2^2, 3, 4, 5, \dots, 14)_5;$
 $[(1, 2), (1, 3, 4, 5, \dots, 14), (1, 3, 4)_1] (*)$
- (c) $(C_6) \equiv (1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2, 9, 10, 11, 12)_6$
- (d) $(C_7) \equiv (1^3, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2, 9^2, 10^2, 11^2)_7$
- (e) $(C_9) \equiv (1^3, 2^3, 3^3, 4^3, 5^3, 6^3, 7^3, 8^3, 9^2, 10^2, 11)_9$
- (f) $(C_{13}) \equiv (1^5, 2^4, 3^4, 4^4, 5^4, 6^4, 7^4, 8^4, 9^4, 10^4)_{13}.$

La costruzione più generale dei fasci (a), (b), (c), (d), (e) è quella precedentemente data.

Palermo, agosto 1898.

MICHELE DE FRANCHIS.

ERRATA-CORRIGE.

A tutto il brano che va dall'ultimo rigo di pag. 6 al rigo 9° di pag. 7, sostituisca il seguente:

Sicchè tutte le h sono eguali ad 1, e, denotando con s il loro numero, deve essere, per le relazioni (1), (2):

(*) Per la spiegazione di questi simboli vedasi il n° 2 (ultimo enunciato).